数理論理学　期末試験

予想問題

担当:　渕野 昌　　　　**2016 年 07 月 20 日**

$\boxed{1}$　R を 2 変数の関係記号として $\mathcal{L} = \{R\}$ とする．$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ を $A = \{0,1,2,3,4\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$ で定義する．

(1)　以下の $\mathcal{L}$-文 φ で $\mathfrak{A}$ で成り立つもの (つまり $\mathfrak{A} \models \varphi$ となるもの) はどれか？ それぞれの論理式が $\mathfrak{A}$ で成り立つ／成り立たない理由を述べよ．

(a) $\exists x_0 \exists x_1 \forall y\ (y \equiv x_0 \vee y \equiv x_1)$,　　(b) $\exists x_0 \exists x_1 \forall y\ (\neg y \equiv x_0 \vee \neg y \equiv x_1)$,
(c) $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$,
(d) $\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$,　　(e) $\forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x))$.

(2)　$i = 0, \ldots, 4$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi_i(a)\ \Leftrightarrow\ a = i$ が成り立つような $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_i = \varphi_i(x)$ を与えよ．

$\boxed{2}$　$\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ として，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}} \rangle$ を考える．ただし，$0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ はそれぞれ記号 $0, 1, +, \cdot$ の $\mathfrak{N}$ での解釈としての，自然数上の通常のゼロ，イチ，加算，乗算とする．このとき，

(1)　$\mathfrak{N} \models \varphi(m,n) \Leftrightarrow m = n + 3$
がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x,y)$ を与えよ．

(2)　$\mathfrak{N} \models \varphi(m,n) \Leftrightarrow m \leqq n$
がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x,y)$ を与えよ．

(3)　$\mathfrak{N} \models \varphi(m,n) \Leftrightarrow m$ は n の倍数
がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x,y)$ を与えよ．

(4)　$\mathfrak{N} \models \varphi(\ell,m,n) \Leftrightarrow \ell$ は m と n の最小公倍数
がすべての $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x,y,z)$ を与えよ．

$\boxed{3}$　f を 1 変数関数記号として，$\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, f\}$ とし，$0^{\mathbb{R}}$, $1^{\mathbb{R}}$, $+^{\mathbb{R}}$, $\cdot^{\mathbb{R}}$ をそれぞれ実数での通常のゼロ，イチ，加算，乗算とする．(1) 任意の関数 $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し，

$\langle \mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad f^{\mathbb{R}}$ は増加関数

が成り立つような $\mathcal{L}$-文 φ を求めよ．

(2)　任意の関数 $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し，

$\langle \mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad f^{\mathbb{R}}$ は連続で $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$

が成り立つような $\mathcal{L}$-文 φ を求めよ．

$\boxed{4}$　右の真偽表を満たすような命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A, B)$ を作れ:

A	B	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$\boxed{5}$

(1)　真偽表を作って，命題論理の論理式 $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ がトートロジーであることを確かめよ．

(2)　$\mathcal{L}$ を任意の言語として，φ, ψ を任意の $\mathcal{L}$-論理式とするとき，シークエント $\Rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能であることを示せ．

$\boxed{6}$　Γ を $\mathcal{L}$-論理式の有限集合として φ, ψ を $\mathcal{L}$-論理式とする．このとき，シークエント $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能であることと，シークエント $\Gamma \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能であることは同値になることを示せ．