数理論理学　演習 No.1

担当: 渕野 昌　　　　2013.05.29(Wed)

この演習問題と解答例は http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html にリンク予定です.

以下の演習問題を 2013 年 05 月 29 日 (水) の講義時間 (2 限目) 解いてください．講義時間に解いたものを補足拡張して，まとめたものをレポート (A4 の用紙を用いてください) として，2013 年 06 月 05 日の講義の始まる前に提出してください．レポートは返却しないので，自分用のコピーを手元に残すようにしてください.

1. A, B, C を命題記号とするとき，次の論理式のブール関数への解釈を真偽値表を作成して求めよ:

   (a) $(A \vee \neg A)$　　(b) $((A \to \neg\neg B) \vee A)$　　(c) $((A \to B) \to (B \to C))$
   (d) $((A \wedge (\neg A \vee B)) \to B)$

2. 問題 1. (a) $\sim$ (d) の論理式のうちトートロジーはどれか?

3. ブール関数 $f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ は，任意の $\langle t_1, ..., t_n\rangle, \langle u_1, ..., u_n\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，$t_1 \leq u_1$,...,$t_n \leq u_n$ なら，常に $f(t_1, ..., t_n) \leq f(u_1, ..., u_n)$ が成り立つとき，単調 (monotone) であるという.

   (a) 命題記号から出発して $\wedge$ と $\vee$ の適用の繰り返しで得られるような論理式 φ のブール関数への解釈は常に単調になることを，φ の構成に関する帰納法で示せ.

   (b) すべての単調なブール関数は，命題記号から出発して $\wedge$ と $\vee$ の適用の繰り返しで得られるような論理式のブール関数への解釈として表現できることを示せ.

   ヒント:　$\mathbb{2}^n$ の要素 $\vec{t} = \langle t_1, ..., t_n\rangle, \vec{u} = \langle u_1, ..., t_n\rangle$ に対し，$\vec{t} \ll \vec{u}$ を，$t_1 \leq u_1$,...，かつ $t_n \leq u_n$ となること，として定義する．$f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ が単調なら，$\{\vec{t} \in \mathbb{2}^n : f(\vec{t}) = 1\}$ は，($\ll$ に関して) 上方向に閉じていて，この集合の ($\ll$ に関する) 極小元 (minimal elements) が有限個存在する.

4. φ, ψ を任意の命題論理の論理式とするとき，次のシークエント (a), (b), (c) の LK での証明を与えよ:

   (a) $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　　(b) $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
   (c) $\varphi, (\neg\varphi \vee \psi) \Rightarrow \psi$.

問題の解説

(2013 年 07 月 30 日 16:45)

1.: 論理式のブール関数への解釈の定義に従って，与えられた論理式に現れる命題記号から出発して，すべての部分論理式のブール関数への解釈に対応する真偽値表を作ってゆけばよい.

たとえば， (b) では，論理式 $\neg B$, $\neg\neg B$, $(A \to \neg\neg B)$, $((A \to \neg\neg B) \lor A)$ をそれぞれ，$\psi_0(A, B)$, $\psi_1(A, B)$, $\psi_2(A, B)$, $\psi_3(A, B)$ とあらわすことにすると，それぞれの論理式に対応する 2 変数のブール関数は，変数を x と y であらわすことにして,

x	y	$f_{\psi_0(A,B)}(x, y)$	$f_{\psi_1(A,B)}(x, y)$	$f_{\psi_2(A,B)}(x, y)$	$f_{\psi_3(A,B)}(x, y)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1

となる．これは，命題変数とブール関数の変数を同一視し，論理式とその解釈としてのブール関数も同一視して,

A	B	$\neg B$	$\neg\neg B$	$(A \to \neg\neg B)$	$((A \to \neg\neg B) \lor A)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1

と書かれることも多い.

また，(c) では,

A	B	C	$(A \to B)$	$(B \to C)$	$((A \to B) \to (B \to C))$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

のようになる．この表から $((A \to B) \to (B \to C))$ を $\varphi(A, B, C)$ と表すことにすると，$f_{\varphi(A,B,C)}(0, 0, 0) = 1$, $f_{\varphi(A,B,C)}(0, 0, 1) = 1$, $f_{\varphi(A,B,C)}(0, 1, 0) = 0$,... となることがわかる.

2.: 命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ がトートロジーであるとは，$f_{\varphi(A_0,...,A_{n-1})}$ が常に値 1 をとる関数になることだった．このことは，1 を真，0 を偽と考えることにすると，φ の命題記号にどのような真偽の値を割り振っても，φ は常に真になること，と解釈できる．たとえば，1. (b) の論理式は上の真偽値表によりトートロジーであることがわかるが，1. (c) の論理式では，$f_{\varphi(A,B,C)}(0, 1, 0) = 0$ となることから (あるいは $f_{\varphi(A,B,C)}(1, 1, 0) = 0$ となることから) この論理式はトートロジーでない.

3. (a): 命題記号から出発して $\land$ と $\lor$ の適用の繰り返しで得られるような論理式の，構成に関する帰納法で証明すればよい．このためには,

a. 命題変数に対して主張が成り立つこと
b. φ と ψ に対し主張が成りたてば，$(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ のどちらに対しても主張が成り立つこと

を示せばよい． a. と b. はそれぞれ講義録の (1.6) と (1.7),(a), (b) に対応することに注意すれば容易に示せる — ほとんど自明なので逆に，何がポイントになっているかが明らかになっているような説明の仕方の工夫が必要である.

3. (b): $\mathbb{2}^n$ 上の半順序 $\ll$ を 2. のヒントでのように定義する．$f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ を任意の単調なブール関数とするとき，$f^{-1}[1] = \{\vec{t} \in \mathbb{2}^n : f(\vec{t}) = 1\}$ として，$\vec{t}_0,...,\vec{t}_{k-1}$ を $f^{-1}[1]$ の $\ll$ に関する極小な要素とする．つまり $\vec{t}_i$, $i < k$ は $f(\vec{t}_i) = 1$ だが $\vec{u} \ll \vec{t}$ となる $\vec{t}$ と異なる $\vec{u} \in \mathbb{2}^n$ に対して $f(\vec{u}) = 0$ が常に成り立つようなもので，$\vec{t}_0,...,\vec{t}_{k-1}$ はそのような $f^{-1}[1]$ の要素を網羅しているものとする．

各 $\vec{t} \in \mathbb{2}^n$ に対し，$\vec{t} = \langle t_0, ..., t_{n-1}\rangle$ として，$\varphi_{\vec{t}}$ を，$\bigwedge\{A_i : i < n, t_i = 1\}$ とする．ただし，$\vec{t} = \langle 0, 0, ..., 0\rangle$ のときには，$\varphi_{\vec{t}}$ はトートロジー，例えば $(A_0 \vee \neg A_0)$ とする．明らかに，

(1) $\qquad f_{\varphi_{\vec{t}}(A_0,...,A_{n-1})}(\vec{t}) = 1$

で，この問題の (a) から，

(2) $\qquad f_{\varphi_{\vec{t}}(A_0,...,A_{n-1})}$ は単調である．

また，逆に，

(3) $\qquad f_{\varphi_{\vec{t}}(A_0,...,A_{n-1})}(\vec{u}) = 1$ なら，$\vec{t} \ll \vec{u}$

となることも容易に示せる (演習).

補題． 与えられていた単調関数 f と，上でのような $\vec{t}_0,...,\vec{t}_{k-1}$ に対し，

(4) $\qquad \varphi_f = \varphi_{\vec{t}_0} \vee \cdots \vee \varphi_{\vec{t}_{k-1}}$

とすると，$f = f_{\varphi_f}$ である．

証明． $f(\vec{t}) = 1$ とすると，ある $i < k$ に対し，$\vec{t}_i \ll \vec{t}$ となる．このとき (1) と (2) により，$f_{\varphi_{\vec{t}_i}}(\vec{t}) = 1$ だから，定義 (4) により，$f_{\varphi_f}(\vec{t}) = 1$ である．

逆に，$f_{\varphi_f}(\vec{t}) = 1$ なら，(4) より，ある $i < k$ に対し，$f_{\varphi_{\vec{t}_i}}(\vec{t}) = 1$ である．したがって，(3) により，$\vec{t}_i \ll \vec{t}$ となるから，f の単調性から，$f(\vec{t}) = 1$ である．

以上で $f = f_{\varphi_f}$ が示せた． **証明終．**

4.: 略.