数理論理学　演習 No.2

担当: 渕野 昌　　2013.07.03(Wed)

この演習問題と解答例は `http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html` にリンク予定です．なお，この web page からはこの講義の講義録などもダウンロードできます．

以下の演習問題をできるだけ解いてまとめたものを，2013 年 07 月 17 日 (水) の講義時間 (2 限目) の初めにレポート (A4 の用紙を用いてください) として提出してください．レポートは返却しないので，自分用のコピーを手元に残すようにしてください．

1. $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ とする．ただし，0, 1 は定数記号，$+, \cdot$ は 2 変数の関数記号，$<$ は 2 変数の関係記号とする．次の a. ∼ j. の $\mathcal{L}$-文 φ が恒真かどうかを調べよ．恒真でないものについては，それが恒真でないことを示す反例 (つまり $\mathfrak{A} \models \varphi$ でないような $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$) を与えよ．

a. $\forall x \forall y\, (x \equiv y \lor \neg x \equiv y)$
b. $\exists x \exists y\, (x \equiv y \land \neg x \equiv y)$
c. $(\forall x\, x + x \equiv 1 \rightarrow (\exists x\, x + x \equiv 0 \rightarrow \forall x\, x + x \equiv 1))$
d. $(\forall x \exists y\, x + y \equiv 0 \rightarrow \exists y \forall x\, x + y \equiv 0)$
e. $\forall x \exists y\, x + y \equiv 0$
f. $\exists x \forall y\, y < x$
h. $\forall x \forall y\, (x \equiv y \rightarrow x + 1 \equiv y + 1)$
i. $\forall x \forall y\, (x + 1 \equiv y + 1 \rightarrow x \equiv y)$
j. $(\neg 0 \equiv 1 \rightarrow (\exists x\, \neg x \equiv 0 \land \exists x\, \neg x \equiv 1))$

2. 上の a. ∼ j. の $\mathcal{L}$-文のうち，命題論理のトートロジーの命題記号に $\mathcal{L}$-論理式を代入することで得られているものはどれかを答えよ．

3. $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, f, <\}$ とする．ただし，0, 1 は定数記号，$+, \cdot$ は 2 変数の関数記号，f は 1 変数の関数記号，$<$ は 2 変数の関係記号とする．
$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{R}_{f^*}$ を $\mathfrak{R}_{f^*} = (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, f^*, <^{\mathbb{R}})$ 定義する．ただし，$0^{\mathbb{R}}$, $1^{\mathbb{R}}$ は通常の数 0, 1 で，$+^{\mathbb{R}}$, $\cdot^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の足し算とかけ算，また $<^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の大小関係とする．
このとき，すべての $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し，次の性質が成り立つような $\mathcal{L}$-文 $\varphi_1 \sim \varphi_7$ を求めよ:

a. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_1 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は偶関数,
b. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_2 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は増加関数,
c. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_3 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \rightarrow 0} f^*(x) = 0$,
d. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_4 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は連続関数,
e. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_5 \;\Leftrightarrow$ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f^*(x) = \sqrt{2}\, x$,
f. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_6 \;\Leftrightarrow$ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f^*(x) = 2^x$,
g. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_7 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は 0 で微分可能で，f^* の 0 での微分係数は 2 である．

4. $\mathcal{L}$ を任意の言語として，φ を $\mathcal{L}$ 論理式とするとき，シークエント $\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ の述語論理の LK での証明を与えよ．

5. シークエント $\forall x \exists y \varphi \Rightarrow \exists y \forall x \varphi$ は一般には証明可能でないことを示せ．

6. $\mathcal{L}$ を任意の言語として s_0, s_1, s_2 を $\mathcal{L}$-項とするとき，シークエント $s_0 \equiv s_1, s_1 \equiv s_2 \Rightarrow s_0 \equiv s_2$ の $\mathsf{LK_e}$ での証明を与えよ．

問題の解説

(2013 年 07 月 30 日 20:08)

1., a.: $\mathcal{L}$-文 $(x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$ は，トートロジー $(A \vee \neg A)$ の命題変数 A に論理式 $x \equiv y$ を代入して得られる論理式だから恒真である．このことから，ここでの $\mathcal{L}$-文 $\forall x \forall y\,(x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$ も恒真であることがわかる．

b.: $\mathcal{L}$-文 $\exists x \exists y\,(x \equiv y \wedge \neg x \equiv y)$ は a. の論理式の否定と同値になることが容易に分るので，どの構造 $\mathcal{L}$ 構造でも成り立たない．特に，この $\mathcal{L}$-文は恒真でない．

c.: この $\mathcal{L}$-文は，トートロジー $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ の命題変数 A と B にそれぞれ，$\forall x x + x \equiv 1$ と $\exists x + x \equiv 0$ を代入して得られる論理式なので恒真である．

d.: ここでの $\mathcal{L}$-文を φ とよぶことにすれば，たとえば，$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ では φ は成りたない．つまり，$\mathcal{R} \models \varphi$ ではない (なぜか?)．ただし，$0^{\mathbb{R}}$, $1^{\mathbb{R}}$ はそれぞれ実数としての 0 と 1 をあらわし， $+^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}$ はそれぞれ実数上の通常の可算と乗算，$<^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の大小関係をあらわす．したがって，ここでの $\mathcal{L}$-文は恒真ではない．

e.: たとえば，$0^{\mathbb{N}}$, $1^{\mathbb{N}}$ でそれぞれ自然数しての 0 と 1 をあらわし， $+^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}$ はそれぞれ自然数上の通常の可算と乗算，$<^{\mathbb{N}}$ は自然数上の通常の大小関係をあらわすことにして，$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ は，ここでの $\mathcal{L}$-文を満たさない (なぜか?)．したがって，ここでの $\mathcal{L}$-文は恒真ではない．

f.: 上の $\mathcal{R}$ でも $\mathcal{N}$ でも，ここでの $\mathcal{L}$-文は成り立たない．したがって，ここでの $\mathcal{L}$-文は恒真ではない．

g.:
h.: $\equiv$ は構造で常に項の表す構造の要素が等しいことと解釈されるので，ここでの論理式は恒真である．

i.: ここでの $\mathcal{L}$-文は恒真でない．これを示すには多少工夫がいる．ここでの $\mathcal{L}$-文を φ とよぶことにして，φ が成り立たないような $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{A}$ を人工的に作る必要があるからである
たとえば，a, b, c を互いに異る任意の数学的対象として，$A = \{a, b, c\}$ とし，$0^{\mathfrak{A}} = a$, $1^{\mathfrak{A}} = b$ とし，$+^{\mathfrak{A}} : A^2 \rightarrow A$ を，$a +^{\mathfrak{A}} b = c$, $c +^{\mathfrak{A}} b = c$ となるような任意の関数とし，$\cdot^{\mathfrak{A}} : A^2 \rightarrow A$ を任意の関数，$<^{\mathfrak{A}} \subseteq A^2$ を任意の二項関係とする．このとき， $\mathfrak{A} = \langle A, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ とすれば，$\mathfrak{A}$ では，$a +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} = c = c +^{\mathfrak{A}} +1^{\mathfrak{A}}$, だが，$a \neq c$ だから， $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ となることがわかる．したがって，ここでの $\mathcal{L}$-文 φ は恒真ではない．

j.: ふたたびここでの $\mathcal{L}$-文を φ とあらわすことにする．a と b を互いに異る任意の数学的対象として，$\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ を $A = \{a, b\}$, $0^{\mathfrak{A}} = a$, $1^{\mathfrak{A}} = b$ となるような任意の $\mathcal{L}$-構造とすると，$\mathfrak{A} \not\models \varphi$ である．したがって， ここでの $\mathcal{L}$-文 φ は恒真ではない．

2.: 講義で証明したように，命題論理のトートロジーの命題記号に $\mathcal{L}$-論理式を代入することで得られる論理式は恒真である (講義録の 系 8.2)． したがって，このような論理式の候補は，1. の解答から，1. での論理式のうちでは，a., c., h. でのもに限る．1. の説明でも見たように，c. の論理式は，命題論理のトートロジーの命題記号に $\mathcal{L}$-論理式を代入したものになっているが，他のものは量化子が先頭にあるため，そのような代入は，1 つの命題変数 (たとえば A) にこの論理式自身を代入するものでしかあり得ない．ところが A はトートロジーではない (命題論理の論理式 A を $\varphi(A)$ とあらわすことにすると $f_{\varphi(A)}(0) = 0$ である) から，これらの論理式は，命題論理のトートロジーの命題記号に $\mathcal{L}$-論理式を代入したものになっていないことがわかる．

3., a.: 実関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が偶関数とは，すべての実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し，$g(-r) = g(r)$ となることだった．マイナス記号はここでの言語に含まれていないので，多少工夫が必要になる．たとえば，$\forall x \forall y (x + y \equiv 0 \rightarrow f(x) \equiv f(y))$ という論理式が求める性質を持つものになる．

b.: 実関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が増加関数であるとは，任意の r, $s \in \mathbb{R}$, $r < s$ に対し，$g(r) \leq g(s)$ が成り立つことだった．これを素直に論理式として表現して，$\forall x \forall y (x < y \rightarrow (f(x) \equiv f(y) \vee f(x) < f(y)))$ とすればこれが求めるものになる．

c.: d. を参照．
d.: $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続とは，すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = f(r)$ となることだった．一方，$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = f(r)$ は，

すべての $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ がとれて，すべての $|x - r| < \delta$ となる x に対し，$|f(x) - f(r)| < \varepsilon$ となる．

ということである．たとえば $|x - r| < \delta$ は “$x < r + \delta$ かつ $r < x + \delta$” と同値だから，これを用いて上の性質を素直に論理式として書き下して

$$\forall r \forall y (0 < y \to \exists z (0 < z \land \forall x ((x < r + z \land r < x + z) \to (f(x) < f(r) + y \land f(r) < f(x) + y))))$$

とすると，これが求めるような性質を持つ論理式になる．

e.: 略.

f.: 関数 $g(x) = 2^x$ は，次の性質で特徴づけられる:

(i) g は連続である;

(ii) $g(0) = 1$, $g(1) = 2$;

(iii) すべての $r, s \in \mathbb{R}$ に対し，$g(r + s) = g(r)g(s)$

(i) については，d. での論理式を再利用すればよいから，(ii) と (iii) に対応する論理式をこれに “$\land$” で繋げば，求めるような論理式が得られる．

g.: $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$ に対応する論理式を，d. と同じようなやりかたで構成すればよい．

4.: これは講義録の新しい版に 例 9.1 として含まれている．

5.: 1.,d. で見たように，論理式 $(\forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi)$ が恒真にならないような論理式 φ が存在する．$\mathsf{LK_e}$ の健全性定理 (講義録の定理 10.1) の主張の対偶を考えると，このような φ に対してはシークエント $\forall x \exists y \varphi \Rightarrow \exists y \forall x \varphi$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明できないことがわかる．

6.: 略．講義録の補題 9.2 (1) の証明がこの演習のヒントになる．