数理論理学 (2017年 前期)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2019 年 09 月 17 日

以下のテキストは，2013 年前期開講の神戸大学情報知能工学科 3 年のために作成した「数理論理学」の講義の講義録（講義ノート）を 2014 年，2015 年，2016 年前期開講の同名の講義の際に補筆拡張したものです．テキストの補筆拡張は講義の進展に平行してさらに行なう予定です．

このノートの最新版は，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss13.pdf`

としてダウンロードできます．2011 年度および 2012 年度前期に神戸大学で行った，本講義と同じ枠での講義の講義録は，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf`

に upload されています．このファイルの，本講義録との主な違いは，本講義では命題論理について，より詳しく述べていることと，本講義では Gentzen の LK ([5]) のバリエーションを証明の体系として用いているのに対し，2011 年度および 2012 年度前期の講義録では，Hilbert 流の証明の体系を用いていることです．LK についての記述は，Takeuti [6] も参考にしています．

2011 年度および 2012 年度前期の講義録には，大学院の講義の講義録も含まれていて，そこではゲーデルの不完全性定理についても述べられていますが，本講義録では，これについては触れていません．

2011 年度および 2012 年度前期の講義録は，2013 年に出版された [1] の付録 C での解説の下敷として使われています．現在執筆を予定している数理論理学の教科書は，これらの両方の講義録をベースとするものになる予定です．

あなたがダウンロードしたのは，このテキストの

2019年09月17日(14:35JST)版

です．このテキストはまだ暫定版です．学期中に講義の進展に前後して拡張／改良してゆく予定で，学期後に更に書き進める可能性もあります．すでに書いてある部分についても，改良のための変更をする可能性もあるので注意してください．内容に関するコメントや質問，ミスタイプの指摘など何でもあれば遠慮なくしてください．

なお，このテキストを含め，私が神戸大学で行なっている講義に関連する資料は

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/index.html`

にリンクされています．

目次

第 I 部

命題論理

part-I

1　命題論理の論理式

prop-logic

PropVar であらかじめ固定された**命題記号** (propositional symbols, **命題変数** (propositional variables) と呼ばれることもある) の全体をあらわすことにする．PropVar は無限個の記号が含まれているようにとる．PropVar の要素を A, B, C, A_0, A_1, A_2 などで表す．「A を PropVar の一つの要素とする」 と言ったとき[1]，A は PropVar 1 つの記号をあらわしているが，必ずしも，その記号が 'A' であることを意味しているわけではない．

有限の記号列が命題論理の**論理式** (a formula in propositional logic) である，ということを次の再帰的な定義により規定する:

(1.1)　すべての命題記号 $A \in$ PropVar に対し，A (からなる長さ 1 の記号列) は命題論理の論理式である． pl-1

(1.2)　φ と ψ が命題論理の論理式なら，記号列 pl-2

(a)　$(\varphi \vee \psi)$,

(b)　$(\varphi \wedge \psi)$,

(c)　$(\varphi \rightarrow \psi)$,

(d)　$\neg\varphi$

も命題論理の論理式である[2]．

(1.3)　以上のみ． pl-3

上での記号 '$\vee$', '$\wedge$', '$\rightarrow$', '$\neg$' は**論理結合子** (logical connectives) または**論理演算子** (logical operators) とよばれる．

例 1.1 A, B, C を命題記号とするとき，$\neg(\neg((A \wedge \neg B) \wedge C) \vee B)$ は命題論理の論理式であるが，$(A \wedge \wedge B)$ も $\neg(\neg B)$ も $A \wedge B \rightarrow C$ も $((A \wedge B$ も $(A \neg B)$ も命題論

[1] これを $A \in$ PropVar と書くこともある．

[2] たとえば，ここでは $(\varphi \vee \psi)$ は，記号 '(' と記号列 φ と記号 '$\vee$' と記号列 ψ と記号 ')' を繋げて得られる記号列を表わしていると考えている．

理の論理式ではない (演習: なぜか？).

命題論理の論理式の全体が上のように再帰的に定義されているため，命題論理の論理式上の概念やオブジェクトを再帰的な定義により導入することができ，これらに関する性質を命題論理の論理式の構成に関する帰納法により証明することができる．

命題論理の論理式 (の全体) に対する再帰的な定義の例として，命題論理の論理式 φ にあらわれる命題記号の全体 $\mathsf{var}(\varphi)$ を考察してみよう．これは，命題論理の論理式 φ の (1.1) ∼ (1.3) での構成に関する帰納法により，次のようにして導入することができる．

(1.4)　φ が命題記号 A のとき，$\mathsf{var}(\varphi) = \{A\}$ とする． pl-4

(1.5)　命題論理の論理式 φ, ψ について $\mathsf{var}(\varphi), \mathsf{var}(\psi)$ が既に定義されているとき， pl-5

- (a)　$\mathsf{var}((\varphi \vee \psi)) = \mathsf{var}(\varphi) \cup \mathsf{var}(\psi)$,
- (b)　$\mathsf{var}((\varphi \wedge \psi)) = \mathsf{var}(\varphi) \cup \mathsf{var}(\psi)$,
- (c)　$\mathsf{var}((\varphi \rightarrow \psi)) = \mathsf{var}(\varphi) \cup \mathsf{var}(\psi)$,
- (d)　$\mathsf{var}(\neg\varphi) = \mathsf{var}(\varphi)$

とする．

logsym

演習問題 1.2 命題論理の論理式 φ に対し，φ にあらわれる命題演算子の全体の集合を返すような関数 $\mathsf{logsym}(\varphi)$ (たとえば，$\mathsf{logsym}(\neg A) = \{\neg\}$, $\mathsf{logsym}((\neg A \vee A)) = \{\neg, \vee\}$ など) の再帰的な定義を与えよ．

$A_0,\ldots, A_{n-1} \in \mathsf{PropVar}$ のとき，“φ が命題論理の論理式で $\mathsf{var}(\varphi) \subseteq \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ である” という主張を $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{n-1})$ と表すことにする．ただし，この書き方をしたときには，$A_0,\ldots, A_{n-1}$ は互いに異なるものとする．

$\mathbb{2} = \{0, 1\}$ とする[3]．ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f : \mathbb{2}^n \rightarrow \mathbb{2}$ の形をした関数 f をブール関数 (Boolean function) とよぶ[4]．

---

[3] 現代の数学では，通常，数 2 を $\{0, 1\}$ のこととして定義するので，黒板太文字体の $\mathbb{2}$ を使う必要はないとも言えるが，ここでの 0 と 1 は，数の 0 と 1 というより，‘偽’ と ‘真’，‘off’ と ‘on’ などと解釈すべきオブジェクトとして扱われているので，そのことを明示的に示すために字体を変えた $\mathbb{2}$ を用いている．

[4] 集合 X と自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，X^n で X の要素の n-組 (X の要素の，長さが n の列) の全体を表す．$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ で $x_0,\ldots, x_{n-1}$ を成分とする n-組 をあらわすことにすると，$X^n =$

$\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{n-1})$ に対し，関数 (φ の関数解釈) $f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})} : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ を，次のような命題論理の論理式 φ の構成に関する再帰的な定義により導入する:

(1.6) φ が命題記号 A_i $(0 \leq i < n)$ のとき，$\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し， pl-6

$$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 1, & t_i = 1 \text{ のとき} \\ 0, & t_i = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{とする．}$$

(1.7) $\varphi_0 = \varphi_0(A_0, \ldots, A_{n-1})$, $\varphi_1 = \varphi_1(A_0, \ldots, A_{n-1})$ に対し，$f_{\varphi_0(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ と $f_{\varphi_1(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ が既に定義されたとき， pl-7

(a) $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ なら，すべての $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 1, \ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \text{ かつ} \\ \quad f_{\varphi_1(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \text{ のとき} \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

(b) $\varphi = (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ なら，すべての $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 1, \ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \text{ または} \\ \quad f_{\varphi_1(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \text{ のとき} \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

(c) $\varphi = (\varphi_0 \to \varphi_1)$ なら，すべての $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 1, \ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 0 \text{ または} \\ \quad f_{\varphi_1(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \text{ のとき} \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

(d) $\varphi = \neg\varphi_0$ なら，すべての $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 1, \ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 0 \text{ のとき} \\ 0, \text{ それ以外のとき} \end{cases}$$

とする．

上の定義が意味を持つためには，この定義が命題記号 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ の選び方に本質的には依存しないものになっていることが示される必要があるが，これは次によりよい:

L-pl-1

$\{\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle : x_0, \ldots, x_{n-1} \in X\}$ である．特に，$\mathbb{2}^n$ は 0 と 1 からなる長さが n の列の全体である．$\mathbb{2}^n$ は 2^n 個の要素からなる集合となることに注意する．

補題 1.3 $A_0, ..., A_{m-1}, B_0, ..., B_{n-1} \in \mathsf{PropVar}$ として，$\{A_0, ..., A_{m-1}\} \subseteq \{B_0, ..., B_{n-1}\}$ とする．ただし，$A_0, ..., A_{m-1}$ は互いに異なり，$B_0, ..., B_{n-1}$ も互いに異なるとする．このときには，$m \leq n$ だが，$i < m$ に対し，$A_i = B_{j(i)}$ となるように，$j : \{0, ..., m-1\} \to \{0, ..., n-1\}$ を選んでおく．

$\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{m-1})$ なら，$\varphi = \varphi(B_0, ..., B_{n-1})$ でもあるが，任意の $\langle t_0, ..., t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$f_{\varphi(B_0,...,B_{n-1})}(t_0, ..., t_{n-1}) = f_{\varphi(A_0,...,A_{m-1})}(t_{j(0)}, ..., t_{j(m-1)})$$

が成り立つ．

証明． φ の構成に関する帰納法で示せる (演習)． （証明終り）

$f_{\varphi(A_0,...,A_{n-1})}$ を命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ の (ブール関数への) 解釈 (interpretation (as a Boolean function)) とよぶ．$f = f_{\varphi(A_0,...,A_{n-1})}$ のとき，f は $\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ の表現関数 (あるいは，解釈，または，ブール解釈) である，とも言うことにする．

$\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ と $\psi = \psi(A_0, ..., A_{n-1})$ の[5]解釈が (関数として) 等しいとき，φ と ψ は関数的に同値である (functionally equivalent) あるいは意味論的に同値である (semantically equivalent) といい，このことを $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ とあらわすことにする．補題 1.3 により，$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ かどうかは，補題 1.3 と同様の意味で，命題記号 $A_0, ..., A_{n-1}$ の選び方に依存しない．

命題論理の論理式 φ は，$\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ として，$f_{\varphi(A_0,...,A_{n-1})}$ がすべての $\vec{t} \in \mathbb{2}^n$ に対して，値 1 をとるとき，トートロジー (tautology) である，という．補題 1.3 により，φ がトートロジーであるかどうかも，$A_0, ..., A_{n-1}$ の選び方に依存しない．

$f_{\varphi(A_0,...A_{n-1})}$ がすべての $\vec{t} \in \mathbb{2}^n$ に対して，値 0 をとるとき φ は矛盾 (contradiction) であるという．任意の命題記号 $A \in \mathsf{PropVar}$ に対し，$(A \wedge \neg A)$ は矛盾である (演習)．

L-pl-2

補題 1.4 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を任意の命題論理の論理式とするとき，次が成り立つ:

(1) $(\varphi_0 \wedge \varphi_0) \models\!\!\!\dashv \varphi_0$.

(2) $(\varphi_0 \wedge \varphi_1) \models\!\!\!\dashv (\varphi_1 \wedge \varphi_0)$.

[5] 任意の 2 つ命題論理の論理式 φ と ψ に対し，十分に沢山の命題記号 $A_0, ..., A_{n-1}$ をとってくれば，$\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$ かつ $\psi = \psi(A_0, ..., A_{n-1})$ となる状況が常に作れることに注意する．

(3) $(\varphi_0 \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \models\!\!\!\dashv ((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \wedge \varphi_2))$.

(4) $(\varphi_0 \vee \varphi_0) \models\!\!\!\dashv \varphi_0$.

(5) $(\varphi_0 \vee \varphi_1) \models\!\!\!\dashv (\varphi_1 \vee \varphi_0)$.

(6) $(\varphi_0 \vee (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \models\!\!\!\dashv ((\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \varphi_2))$.

証明. (1): $\varphi_0 = \varphi_0(A_0, \ldots, A_{n-1})$ として，(1.7), (a) により，任意の $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}
& f_{(\varphi_0\wedge\varphi_0)(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \ \text{かつ}\ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f_{\varphi_0(A_0,\ldots))}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$f_{(\varphi_0\wedge\varphi_0)(A_0,\ldots)} = f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}$ つまり，$(\varphi_0 \wedge \varphi_0) \models\!\!\!\dashv \varphi_0$ である．

(2): $\varphi_0 = \varphi_0(A_0, \ldots, A_{n-1})$, $\varphi_1 = \varphi_1(A_0, \ldots, A_{n-1})$ とすると，(1.7), (a) により，任意の $\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}
& f_{(\varphi_0\wedge\varphi_1)(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \ \text{かつ}\ f_{\varphi_1(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f_{\varphi_1(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \ \text{かつ}\ f_{\varphi_0(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & f_{(\varphi_1\wedge\varphi_0)(A_0,\ldots)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = 1
\end{aligned}$$

となる．したがって，$f_{(\varphi_0\wedge\varphi_1)(A_0,\ldots)} = f_{(\varphi_1\wedge\varphi_0)(A_0,\ldots)}$ つまり，$(\varphi_0 \wedge \varphi_1) \models\!\!\!\dashv (\varphi_1 \wedge \varphi_0)$ である．

(3) ˜ (6) も同様に証明できる (演習). **（証明終り）**

L-pl-5

演習問題 1.5 すべての論理式 φ, ψ に対し，以下が成り立つ:

(1) $\neg\neg\varphi \models\!\!\!\dashv \varphi$,

(2) $(\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

(3) $(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

(4) $(\varphi \to \psi) \models\!\!\!\dashv (\neg\varphi \vee \psi)$,

(5) $(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\dashv (\neg\varphi \to \psi)$.

上の補題 1.4 でとは異なり，'$\to$' に対しては，交換律や結合律は成り立たない:

L-pl-3

補題 1.6 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を命題論理の論理式とするとき，

(1) $(\varphi_0 \to \varphi_0)$ はトートロジーである．特に $(\varphi_0 \to \varphi_0) \mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \varphi_0$ は一般には成り立たない．

(2) $(\varphi_0 \to \varphi_1) \mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} (\varphi_1 \to \varphi_0)$ は一般には成り立たない．

(3) $(\varphi_0 \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} ((\varphi_0 \to \varphi_1) \to \varphi_2)$ は一般には成り立たない．

証明． (1): $\varphi_0 = \varphi_0(A_0, \dots, A_{n-1})$ とすると，(1.7), (c) により，任意の $\langle t_0, \dots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，$f_{\varphi_0(A_0,\dots)}(t_0, \dots, t_{n-1}) = 0$ の場合にも，$f_{\varphi_0(A_0,\dots)}(t_0, \dots, t_{n-1}) = 1$ の場合にも，$f_{(\varphi_0\to\varphi_0)(A_0,\dots)}(t_0, \dots, t_{n-1}) = 1$ となることが確かめられる．

したがって，$(\varphi_0 \to \varphi_0)$ はトートロジーである．特に φ_0 自身がトートロジーでないときには，$(\varphi_0 \to \varphi_0) \not\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \varphi_0$ である．

(2): 例えば，A, B を異なる命題記号として，$\varphi_0 = A$, $\varphi_1 = B$ とすると，$f_{(\varphi_0\to\varphi_1)(A,B)}(0,1) = 1$, $f_{(\varphi_1\to\varphi_0)(A,B)}(0,1) = 0$ だから，$(\varphi_0 \to \varphi_1) \not\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} (\varphi_1 \to \varphi_1)$ である．

(3): 例えば，A, B, C を異なる命題記号として，$\varphi_0 = A$, $\varphi_1 = B$, $\varphi_2 = C$ とする．このとき，$\psi_0 = (\varphi_0 \to (\varphi_1 \to \varphi_2))$, $\psi_1 = ((\varphi_0 \to \varphi_1) \to \varphi_2)$ とすると，$f_{\psi_0(A,B,C)}(0,1,0) = 1$, $f_{\psi_1(A,B,C)}(0,1,0) = 0$ だから，$\psi_0 \not\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \psi_1$ である．**（証明終り）**

$\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ を命題論理の論理式として，$\Gamma = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\}$ とする．このとき，$\varphi_0 \land \cdots \land \varphi_{n-1}$, $\bigwedge_{i<n}\varphi_i$, $\bigwedge\{\varphi_i : i < n\}$, $\bigwedge\Gamma$ などで，論理式

$$(1.8) \qquad (\varphi_0 \land (\varphi_1 \land (\cdots \land (\varphi_{n-2} \land \varphi_{n-1} \underbrace{)\cdots)))}_{n-1\,\text{個}}$$ pl-8

を表すことにする．この表記，特に $\bigwedge\Gamma$ は Γ の要素の枚挙が明示されていないため，曖昧さの残るものになっているが，Γ のどのような枚挙を考えても，(1.8) の論理式は補題 1.4, (1),(2),(3) により互いに意味論的に同値になるので，ブール関数による論理式の解釈を考えている限りにおいては，この曖昧さは問題とならない．特に，$\psi = \bigwedge_{i<n}\varphi_i$ として，$\psi = \psi(A_0, \dots, A_{k-1})$ のとき，任意の $t_0, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{2}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(1.9) \qquad & f_{\psi(A_0,\dots,A_{k-1})}(t_0, \dots, t_{k-1}) = 1 \\
& \Leftrightarrow\ f_{\varphi_0(A_0,\dots,A_{k-1})}(t_0, \dots, t_{k-1}) = 1 \text{ かつ，} f_{\varphi_0(A_0,\dots,A_{k-1})}(t_0, \dots, t_{k-1}) = 1 \\
& \qquad \text{かつ，} \cdots \text{ かつ，} f_{\varphi_{n-1}(A_0,\dots,A_{k-1})}(t_0, \dots, t_{k-1}) = 1
\end{aligned}
$$ pl-8-0

である．

表記 $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_{n-1}$, $\bigvee_{i<n} \varphi_i$, $\bigvee\{\varphi_i : i < n\}$, $\bigvee\Phi$ についても，上での $\vee$ を $\wedge$ で置き換えて同様に扱うことにする．

この場合には，$\psi = \bigvee_{i<n} \varphi_i$ として，$\psi = \psi(A_0, \ldots, A_{k-1})$ のとき，任意の $t_0, \ldots, t_{k-1} \in \mathbb{2}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(1.10)\quad & f_{\psi(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1 \\
& \Leftrightarrow\ f_{\varphi_0(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1 \text{ または，} f_{\varphi_0(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1 \\
& \quad \text{または，}\cdots\text{ または，} f_{\varphi_{n-1}(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1
\end{aligned}
$$
pl-8-0'

である．

ただし，上の表記で，Γ がただ 1 つの要素 φ からなる場合には，$\bigwedge\{\varphi\} = \bigvee\{\varphi\} = \varphi$ とする．

$\psi = \bigvee_{i<n} \varphi_i$ のときには，$\psi = \psi(A_0, \ldots, A_{k-1})$ として，任意の $t_0, \ldots, t_{k-1} \in \mathbb{2}$ に対し，

$$
(1.11)\quad f_{\psi(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1 \ \Leftrightarrow\ f_{\varphi_0(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1 \text{ または，}\cdots\text{ または，} f_{\varphi_{n-1}(A_0,\ldots,A_{k-1})}(t_0, \ldots, t_{k-1}) = 1
$$
pl-8-1

である．

$\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ のとき，$\bigwedge\Gamma$ の定義 (1.8) と対応する $\bigvee\Gamma$ の定義から，$\Gamma' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ として，$\bigwedge\Gamma = (\varphi_0 \wedge \bigwedge\Gamma')$ かつ，$\bigvee\Gamma = (\varphi_0 \vee \bigvee\Gamma')$ である．

定理 1.7 (命題論理の関数的完全性) [6]

すべてのブール関数 $f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ に対し，命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{n-1})$ で，$f = f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ となるものが存在する． L-pl-4

証明． 各 $\vec{t} = \langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in \mathbb{2}^n$ に対し，

$$
(1.12)\quad \varphi_{\vec{t}} = \bigwedge_{i<n} \varphi_{\vec{t},i}
$$
pl-9

とする．ただし，$i < n$ に対し，

$$
(1.13)\quad \varphi_{\vec{t},i} = \begin{cases} A_i, & t_i = 1 \text{ のとき} \\ \neg A_i, & t_i = 0 \text{ のとき} \end{cases}
$$
pl-10

とする．このとき，

---

[6] Functional Completeness of Propositional Logic.

Claim 1.7.1 $\vec{u} \in \mathbb{2}^n$ に対し，$f_{\varphi_{\vec{t}}(A_0, \ldots, A_{n-1})}(\vec{u}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{t}$ となる．

$\vdash$ 演習. $\dashv$

ここで，$\{\vec{t} \in \mathbb{2}^n : f(\vec{t} = 1)\} = \emptyset$ のときには，φ を $\neg(A_0 \vee \neg A_0)$ とし，そうでないときには，

$$\varphi = \bigvee\{\varphi_{\vec{t}} : \vec{t} \in \mathbb{2}^n,\ f(\vec{t}) = 1\} \tag{1.14}$$ pl-11

とすれば，この φ が求めるようなものになる (演習). （証明終り）

例 1.8 $f : \mathbb{2}^3 \to \mathbb{2}$ を次のような真偽値表 (truth table) で与えられる関数とする:

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(\vec{t}) = 1$ となるのは，$\vec{t} = \langle 0, 1, 0\rangle$ または $\vec{t} = \langle 1, 1, 0\rangle$ となるときで，

$$\varphi_{\langle 0,1,0\rangle} = (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2),$$
$$\varphi_{\langle 1,1,0\rangle} = (A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2)$$

だから，$\varphi_f = (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2)$ とすると，$f_{\varphi_f(A_0,A_1,A_2)} = f$ となる．

定理 1.7 の証明を見ると，すべてのブール関数が，命題記号から出発して，$\neg$, $\wedge$, $\vee$ 適用の繰り返しで得られる論理式[7] の解釈として表現できることが示されていることがわかる．このことを $\{\neg, \wedge, \vee\}$ は**関数的に完全**である，と表現する[8]．

[7] 演習問題 1.2 での記号を使うと，これは，$\mathsf{logsym}(\varphi) \subseteq \{\neg, \vee, \wedge\}$ となる論理式ということである．

[8] 論理演算のセットが関数的に完全ということは，それに対応する論理素子を (たくさん) 用意しておけば，すべてのブール回路が組める，ということを意味する．ただし，ここではもちろん回路を組むときの効率などについては一切考えられてはいないことに注意．

定理 1.7 の証明から，次もわかる．命題変数 A ，あるいは命題変数の否定 $\neg A$ の形をした論理式のことを**リテラル** (literal) とよぶ．

系 1.9 (選言標準型定理) [9)]
すべての命題論理の論理式 φ に対し，φ と意味論的に同値な命題論理の論理式で， disj-normal-form

(1.15) $\bigvee_{i<k}\left(\bigwedge_{j<\ell_i}\varphi_{i,j}\right)$

の形をしたものが存在する．ただし，各 $\varphi_{i,j}$ はリテラルとする．

演習問題 1.10 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ が関数的に完全であることと，演習問題 1.5, (1) ∼ (4) を用いて，$\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\wedge\}$, $\{\neg,\rightarrow\}$ はそれぞれすべて関数的に完全であることを示せ．

補題 1.11 $\{\rightarrow,\vee,\wedge\}$ は関数的に完全でない．

証明. 命題記号から出発して $\rightarrow,\vee,\wedge$ のみを適用して作られる論理式 φ のすべてに対し，$\varphi=\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})$ として，$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(1,1,\ldots,1)=1$ が成り立つことが，φ の構成に関する帰納法で示せる (演習)． このことから $f(1,1,\ldots,1)=0$ となるようなブール関数は，このような論理式の解釈としては表現できないことがわかる． （証明終り）

次の命題は，系 1.9 から式変形により導くこともできるし，定理 1.7 の証明のアイデアを用いて直接示すこともできる:

演習問題 1.12 (連言標準型定理) [10)]
すべての命題論理の論理式 φ に対し，φ と意味論的に同値な命題論理の論理式で， conj-normal-form

(1.16) $\bigwedge_{i<k}\left(\bigvee_{j<\ell_i}\varphi_{i,j}\right)$

の形をしたものが存在する．ただし，各 $\varphi_{i,j}$ はリテラルであるとする．

演習問題 1.13 ブール関数 $f:\mathbb{2}^n\rightarrow\mathbb{2}$ は，すべての $t_0,\ldots,t_{n-1},t'_0,\ldots,t'_{n-1}\in\mathbb{2}$ で，$t_0\le t'_0,\ldots,t_{n-1}\le t'_{n-1}$ となるものに対し，$f(t_0,\ldots,t_{n-1})\le f(t'_0,\ldots,t'_{n-1})$ が常に成り立つとき，単調増加である，と言うことにする．

(1) $\wedge$ と $\vee$ の組合せのみから作られた論理式の表現関数は単調増加になる．

(2) すべての単調増加なブール関数は，ある $\wedge$ と $\vee$ の組合せのみから作られた論理式の表現関数として表わせる．

[9)] Disjunctive Normal Form Theorem.

[10)] Conjunctive Normal Form Theorem.

2　論理式の解釈と意味論的帰結

sem-imp

PropVar から $\mathbb{2}$ への関数を，(命題記号の) 付値 (valuation) とよぶ．

命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{n-1})$ と 付値 $v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ に対し，$f_{\varphi(A_0,\ldots,A_{n-1})}(v(A_0), \ldots, v(A_{n-1})) = 1$ となることを， $v \models \varphi$ と書くことにして，これを 「v は φ を満たす」，「v は φ を充足する」，「v は φ のモデルである」などと読むことにする．補題 1.3 により，この定義は $A_0, \ldots, A_{n-1}$ の選び方に依存しない．$v \models \varphi$ でないことを $v \not\models \varphi$ と表すことにする．

model-rel

演習問題 2.1 すべての付値 $v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ と命題論理の論理式 φ, ψ に対し，次が成り立つ:

(1) $v \models (\varphi \vee \psi) \ \Leftrightarrow\ v \models \varphi$ または $v \models \psi$

(2) $v \models \neg\varphi \ \Leftrightarrow\ v \not\models \varphi$

Γ を命題論理の論理式の空でない集合とするとき (無限集合でもよい)， $v \models \Gamma$ を，すべての $\varphi \in \Gamma$ に対し $v \models \varphi$ となること，として定義する．$v \models \Gamma$ でないとき，これを $v \not\models \Gamma$ とあらわす．$v \not\models \Gamma$ は，$\varphi \in \Gamma$ で $v \not\models \varphi$ となるようなものが存在することである．

再び Γ を命題論理の論理式の空でない集合として φ を命題論理の論理式とするとき，すべての付値 $v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ に対し，$v \models \Gamma$ なら $v \models \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ と表し,「φ は Γ から意味論的に導かれる」,「Γ は φ を意味論的に帰結する」(Γ deduces φ semantically), 「φ は Γ の意味論的帰結である」 などと言う．

L-pl-6

補題 2.2 Γ を命題論理の論理式の空でない有限集合として，φ, ψ を命題論理の論理式とする．このとき，

(1) すべての $v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ に対し，$v \models \Gamma \ \Leftrightarrow\ v \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma$ が成り立つ．

(2) $\Gamma \models \varphi \ \Leftrightarrow\ (\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma \rightarrow \varphi)$ はトートロジーである．

(3) $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi \ \Leftrightarrow\ \varphi \models \psi$ かつ $\psi \models \varphi$ が成り立つ[11]
$\Leftrightarrow\ (\varphi \leftrightarrow \psi)$ はトートロジーである[12]．

証明． (1): $\#(\Gamma)$ に関する[13]帰納法で示す．$\#(\Gamma) = 1$ のときには， 主張は自明

[11] $\varphi \models \psi$ は厳密には $\{\varphi\} \models \psi$ のことである．

[12] ここでは，$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ は $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \psi))$ の略記と考えている．

[13] 有限集合 X に対し $\#(X)$ で X の要素の個数を表す．

である[14)]．したがって，あとは $n > 1$ としてサイズが n 未満の空でない論理式の集合に対しては (1) が成り立つと仮定したとき，サイズが n の論理式の集合 Γ に対しても主張が成り立つことを示せばよい，$\#(\Gamma) = n$ で，$\Gamma = \{\varphi_0\} \dot\cup \Gamma'$ とする[15)]．$\#(\Gamma') = n-1$ だから，帰納法の仮定を Γ' に適用できて，

$$
\begin{aligned}
v \models \Gamma \ &\Leftrightarrow\ \text{すべての } \varphi \in \Gamma \text{ に対し，}\ v \models \varphi \\
&\Leftrightarrow\ v \models \varphi_0 \text{ かつ } v \models \Gamma' \\
&\Leftrightarrow\ v \models \varphi_0 \text{ かつ } v \models \bigwedge\Gamma' \\
&\Leftrightarrow\ v \models (\varphi_0 \wedge \bigwedge\Gamma') \\
&\Leftrightarrow\ v \models \bigwedge\Gamma.
\end{aligned}
$$

(2): $A_0, ..., A_{n-1}$ を Γ と φ に現れる命題記号のすべてとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\Gamma \models \varphi \ &\Leftrightarrow\ \text{すべての付値 } v \text{ に対し，}\ v \models \Gamma \text{ なら } v \models \varphi \\
&\Leftrightarrow\ \text{すべての付値 } v \text{ に対し，} v \models \bigwedge\Gamma \text{ なら } v \models \varphi \qquad \text{((1) による)} \\
&\Leftrightarrow\ \text{すべての付値 } v \text{ に対し，} \\
&\qquad f_{\bigwedge\Gamma(A_0,...)}(v(A_0), ...) = 1 \text{ なら } f_{\varphi(A_0,...)}(v(A_0), ..., v(A_{n-1})) = 1 \\
&\Leftrightarrow\ \text{すべての付値 } v \text{ に対し，} f_{(\bigwedge\Gamma\to\varphi)(A_0,...)}(v(A_0), ..., v(A_{n-1})) = 1 \\
&\Leftrightarrow\ (\bigwedge\Gamma \to \varphi) \text{ はトートロジー．}
\end{aligned}
$$

(3): $\varphi = \varphi(A_0, ..., A_{n-1})$, $\psi = \psi(A_0, ..., A_{n-1})$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\varphi \models\!\!\dashv \psi \ &\Leftrightarrow\ \text{すべての付値 } v \text{ に対し，} \\
&\qquad (f_{\varphi(A_0,...)}(v(A_0), ...) = 1 \text{ なら } f_{\psi(A_0,...)}(v(A_0), ...) = 1) \text{ かつ} \\
&\qquad (f_{\varphi(A_0,...)}(v(A_0), ...) = 1 \text{ なら } f_{\psi(A_0,...)}(v(A_0), ...) = 1) \\
&\Leftrightarrow\ \varphi \models \psi \text{ かつ } \psi \models \varphi \\
&\Leftrightarrow\ (\varphi \to \psi) \text{ と } (\psi \to \varphi) \text{ はトートロジー} \qquad \text{((2) による)} \\
&\Leftrightarrow\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ はトートロジー．}
\end{aligned}
$$

（証明終り）

命題論理の論理式の集合 Γ が充足可能 (satisfiable) であるとは，$v \models \Gamma$ となる付値 $v : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ が存在することである．

L-pl-7

補題 2.3 すべての命題論理の論理式の集合 Γ に関し，Γ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある/任意の命題記号 $A \in \mathsf{PropVar}$ に対し，$\Gamma \not\models (A \wedge \neg A)$.

14) $\Gamma = \{\gamma\}$ なら，$\bigwedge\{\gamma\} = \gamma$ と定義していたので，$\bigwedge\Gamma = \gamma$ となることに注意する．

15) $X \dot\cup Y$ で「X と Y は互いに素である」という主張と，そのときの X と Y の和集合を表す．

証明.　演習.　　　　（証明終り）

3　形式的証明の体系 LK

LK

以下では，簡単のため，命題論理の論理式は，命題記号から出発して $\neg$ と $\vee$ の繰り返し適用から得られていて，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ の形の表現はそれぞれ，論理式 $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $(\neg\varphi \vee \psi)$ の略記のことと考えることにする．

Γ, Δ を論理式の有限集合とする (空集合でもよい)． このとき， $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形の表現をシークエント (sequent) とよぶ[16)]．以下では，$\Gamma = \{\varphi_0, ..., \varphi_{m-1}\}$, $\Delta = \{\psi_0, ..., \psi_{n-1}\}$ のとき，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を集合カッコを落として，$\varphi_0, ..., \varphi_{m-1} \Rightarrow \psi_0, ..., \psi_{n-1}$ とも書くことにする．また，たとえば，$\Gamma = \Gamma' \cup \{\varphi\}$ のとき，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を $\Gamma', \varphi \Rightarrow \Delta$ または $\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ とも書くことにする．また，$\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi$, $\Gamma \Rightarrow \psi, \Delta'$ などの書き方についても同様に扱かう．これに似た略記として，$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ で $\Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow \Delta \cup \Delta'$ を表すことにする．

また，Γ が空集合のときには，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を $\Rightarrow \Delta$ とも表し，Δ が空集合のときには， $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を $\Gamma \Rightarrow$ とも表す．また，Γ も Δ も空集合のときには，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ を $\Rightarrow$ とも表すことにする．

以下で「シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が体系 LK で証明可能 (provable) である[17)]」という概念を定義して，

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ が証明可能} \iff ((\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta)) \text{ がトートロジー}$$

という同値性が成り立つようにしたい[18)]．

---

16) シークエント (sequent) は Gentzen の用いた Sequenz というドイツ語に対応させるために作られた造語である (形容詞としては sequent という単語はあるが，名詞形は，手元にある新版の Webster や，OED にも載っていない．)．

17) LK は，日本ではドイツ語読みしてエルカーと読まれることが多い (通の自動車ファンが BMW をベーエムヴェーと読むのと同じようなものである)．

この体系 LK は Gerhard Gentzen (1909(明治 42)– 1945(昭和 20) ドイツ人) [5] によって導入された証明の体系である．なお，シークエント (sequent) はドイツ語読みではゼクヴェンツ (Sequenz) だがここでは英語読みのカタカナ語の方を採用することにする．

18) ただし，ここでは $((\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta))$ は，論理式 $(\neg(\bigwedge\Gamma) \vee (\bigvee\Delta))$ のことと考えている．特に，$\Gamma = \emptyset$ のときは，これは $(\bigvee\Delta)$ のことで，$\Delta = \emptyset$ のときには，これは $\neg(\bigwedge\Gamma)$ のことと思う．Δ も Γ も空集合のときには，特別措置として，ある命題記号 A^* を固定しておき，$((\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta))$ は $(A^* \wedge \neg A^*)$ のことと思うことにする．

任意の論理式 φ に対し，$\{\varphi\} \Rightarrow \{\varphi\}$ の形をしたシークエントを初式 (initial sequent) とよぶ．$\{\varphi\} \Rightarrow \{\varphi\}$ は前と同様に集合括弧を落として，$\varphi \Rightarrow \varphi$ とも略記することにする．初式 $\{\varphi\} \Rightarrow \{\varphi\}$ に対応する論理式 $(\varphi \rightarrow \varphi)$ はトートロジーであることに注意しておく．

LK の推論規則 (deduction rules) を次のような図式 (diagrams) の全体とする．以下で，

$$\frac{\text{シークエント}\,1 \quad (,\ \text{シークエント}\,2)}{\text{シークエント}\,3}$$

と書いたときには，これの意図された解釈は,「シークエント 1 (とシークエント 2) が成り立つなら，そのことからシークエント 3 も成り立つことが推論できる」 である．

(3.1) (弱化，weakening) 任意の有限な $\Gamma' \supseteq \Gamma$, $\Delta' \supseteq \Gamma$ に対し，$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ LK-1

(3.2) (カット，cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Theta}$ LK-2

(3.3) (論理規則，logical rules) LK-3

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(\varphi \vee \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{-左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \vee \psi)}\ (\vee\text{-右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{-左}) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

ただし，上で Δ, Γ は任意の命題論理の論理式の集合とし，φ, ψ は任意の命題論理の論理式とする．

T がシークエント $\Delta \Rightarrow \Gamma$ の証明 (または証明木 (proof tree)) であるとは，T はシークエントでラベルづけられた有限の二分木 (a finite binary tree labeled by sequents) で，

(3.4) T の根 (root) のラベルは $\Delta \Rightarrow \Gamma$ である; LK-4

(3.5) T の葉 (極大元) のラベルはすべて初式である; LK-5

(3.6) (α) t_3 が T のノードで，t_1 と t_2 が t_3 の T での 1 つ上のノードのとき，これらのノードにラベルづけされたシークエントがそれぞれ S_1, S_2, S_3 として，$\dfrac{S_1 \quad S_2}{S_3}$ (または $\dfrac{S_2 \quad S_1}{S_3}$) は LK の推論規則の 1 つである． LK-6

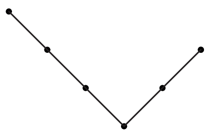
(β) t_3 が T のノードで，t_2 が t_3 の T での唯一の 1 つ上のノードのとき，これらのノードにラベルづけされたシークエントがそれぞれ S_2, S_3 として，$\dfrac{S_2}{S_3}$ は LK の推論規則である．

シークエント $\Delta \Rightarrow \Gamma$ の (LK での) 証明が存在するとき S は (LK で) 証明可能であるという．

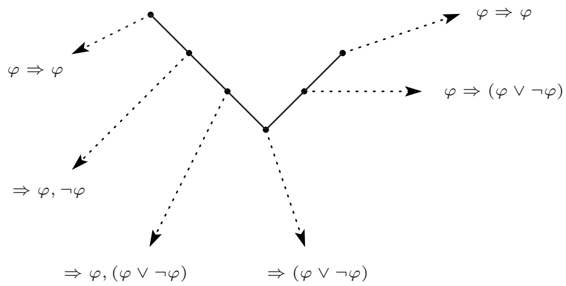
例 3.1 LK での証明での木の構造とラベルづけられたシークエントは，書きあらわすときには，以下のような証明図として表現することが多い:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,(\neg\text{-右})}{\Rightarrow \varphi, (\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee\text{-右}) \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee\text{-右})}{\Rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\text{cut})$$

上の証明図は，シークエント $\Rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$ の証明を表しているが，対応する証明の木としての構造は，



で，この木にラベル付け



がされているものと考えている．

T が上の意味の証明のとき，T の極大元 (とそれにラベルづけされたシークエントとしての初式) のことを T の初式 (の 1 つ) (an initial sequent) とよび．T の根 (とそれにラベルづけられた，T が証明しているシークエント) のことを T の終式 (end sequent) とよぶ．

T がシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明のとき，これを上のような図式では，

$$\frac{T}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

とあらわすことにする．厳密には，$\overline{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ の上に乗っているのは T の終式より上の部分であるのだが，以降これについていちいち断らないことにする．同様に $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が，ある (具体的に指定されいない) 証明の終式になっているときには，これを

$$\frac{\ddots \; \vdots \; \iddots}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

と表すことにする．

以下の補題では，Γ を命題論理の論理式の有限集合とするとき，Γ の要素を適当に $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ と枚挙しておき，この枚挙に対する $(\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_{n-1})$ を $(\bigvee\Gamma)$ のことと思うことにする[19]．また Γ がシングルトン $\{\varphi\}$ のときには，$\bigvee\Gamma$ は φ のことと思うことにする．$\bigwedge\Gamma$ についても同様に考える．ただし，ここでは，$(\varphi \wedge \psi)$ は $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ の略記と考え，$(\varphi \to \psi)$ は $(\neg\varphi \vee \psi)$ の略と考えて扱っていることに注意する．

L-LK-0

補題 3.2 (1) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと，$(\bigwedge\Gamma) \Rightarrow (\bigvee\Delta)$ が証明可能であることは同値である[20]．

(2) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと，$\Gamma, \neg(\bigvee\Delta) \Rightarrow$ が証明可能であることは同値である．

(3) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと，$\Rightarrow ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ が証明可能，であることは同値である．

ただし，ここでは，Γ が空集合のときには，$\bigwedge\Gamma$ も空集合とし，Δ が空集合のときには $(\bigvee\Delta)$ も空集合とする．また (3) では 脚注 18) での記法の約束も用いているものとする．

証明． (1): Γ と Δ がそれぞれ 2 つの要素を持っているときについて証明する．他の場合は同様である．

$\Gamma = \{\varphi, \psi\}$, $\Delta = \{\zeta, \eta\}$ とする．前と同じように，集合括弧や和集合の記号を省略して，たとえば，$\varphi, \psi \Rightarrow \zeta, \eta$ で $\{\varphi, \psi\} \Rightarrow \{\zeta, \eta\}$ を表すことにする．

[19] $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ や $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_{n-1}$ という書き方については，(1.8) を参照されたい．

[20] 特に，(1) で Γ がシングルトンの場合を用いると，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと，$\bigwedge\Gamma \Rightarrow \bigvee\Delta$ が証明可能であることは同値になり，これは $\Gamma \Rightarrow \bigvee\Delta$ が証明可能であることと同値である．

まず，$\varphi,\psi\Rightarrow\zeta,\eta$ が証明可能だとして，その証明を P とすると，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{\varphi,\psi\Rightarrow\zeta,\eta}}{\varphi,\psi\Rightarrow\zeta,(\zeta\vee\eta)}\,(\vee\text{-右})}{\varphi,\psi\Rightarrow(\zeta\vee\eta)}\,(\vee\text{-右})}{\Rightarrow(\zeta\vee\eta),\neg\varphi,\neg\psi}\,(\neg\text{-右},\neg\text{-右})}{\Rightarrow(\zeta\vee\eta),(\neg\varphi\vee\neg\psi)}\,(\vee\text{-右},\vee\text{-右})}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow(\zeta\vee\eta)}\,(\neg-\text{左})$$

により，$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow(\zeta\vee\eta)$ も証明可能である．

逆に $\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow(\zeta\vee\eta)$ が証明可能として，この証明を Q とすると，

$$\dfrac{\dfrac{Q}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow(\zeta\vee\eta)} \quad \dfrac{\dfrac{\zeta\Rightarrow\zeta}{\zeta\Rightarrow\zeta,\eta}\,(\text{弱化}) \quad \dfrac{\eta\Rightarrow\eta}{\eta\Rightarrow\zeta,\eta}\,(\text{弱化})}{(\zeta\vee\eta)\Rightarrow\zeta,\eta}\,(\vee\text{-右})}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow\zeta,\eta}\,(\text{cut})$$

により，$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow\zeta,\eta$ が証明可能だから，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\Rightarrow\varphi}{\neg\varphi,\varphi\Rightarrow}\,(\neg\text{-左}) \quad \dfrac{\psi\Rightarrow\psi}{\neg\psi,\psi\Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{(\neg\varphi\vee\neg\psi),\varphi,\psi\Rightarrow}\,(\vee\text{-右})}{\varphi,\psi\Rightarrow\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}\,(\neg\text{-右}) \quad \dfrac{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\Rightarrow\zeta,\eta}}{\varphi,\psi\Rightarrow\zeta,\eta}\,(\text{cut})$$

により，$\varphi,\psi\Rightarrow\zeta,\eta$ も証明可能になる．

(2): $\Gamma\Rightarrow\Delta$ が証明可能なら，(1) (の証明) により $\Gamma\Rightarrow\bigvee\Delta$ が証明可能だから，

$$\dfrac{\dfrac{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\Gamma\Rightarrow\bigvee\Delta}}{\Gamma,\neg(\bigvee\Delta)\Rightarrow}\,(\neg\text{-左})$$

により，$\Gamma,\neg(\bigvee\Delta)\Rightarrow$ は証明可能である．

逆に $\Gamma,\neg(\bigvee\Delta)\Rightarrow$ が証明可能なら，その証明を P として，

$$\dfrac{\dfrac{\bigvee\Delta\Rightarrow\bigvee\Delta}{\Rightarrow\bigvee\Delta,\neg(\bigvee\Delta)}\,(\neg\text{-右}) \quad \dfrac{P}{\Gamma,\neg(\bigvee\Delta)\Rightarrow}}{\Gamma\Rightarrow\bigvee\Delta}\,(\text{cut})$$

が証明可能だが，weakening と V-左を複数回用いると，$\bigvee\Delta\Rightarrow\Delta$ が証明できるから，上の証明とこれを合せて cut で推論することで $\Gamma\Rightarrow\Delta$ の証明が得られる．

(3): まず，Γ も Δ も空集合でない場合について考える．このときには，(1) により，$\varphi \Rightarrow \psi$ が証明可能であることと，$\Rightarrow (\varphi \to \pi)$ が証明可能であることの同値性を示せばよい．

まず $\varphi \Rightarrow \psi$ が証明可能として，その証明を P とすると，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{\varphi \Rightarrow \psi}}{\Rightarrow \neg\varphi, \psi}\,(\neg\text{-左})}{\Rightarrow \neg\varphi, (\neg\varphi \lor \psi)}\,(\lor\text{-右})}{\Rightarrow (\neg\varphi \lor \psi)}\,(\lor\text{-右})$$

により，$\Rightarrow (\varphi \to \psi)$ は証明可能である．

逆に，$\Rightarrow (\varphi \to \psi)$ が証明可能として，その証明を Q とすると，

$$\dfrac{\dfrac{Q}{\Rightarrow (\neg\varphi \lor \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左}) \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, (\neg\varphi \lor \psi) \Rightarrow \psi}\,(\lor\text{-左})}{\varphi \Rightarrow \psi}\,(\text{cut})$$

により，$\psi \Rightarrow \psi$ も証明可能である．

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ で Γ か Δ の片方だけが空集合のときにも，証明は同様にできる．

Γ も Δ も空集合のときには，$((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ は，ある固定された命題記号 A^* に対する $(A^* \land \neg A^*)$ のこととするのだった．

もしシークエント "$\Rightarrow$" が証明可能なら，weakening により $\Rightarrow (A^* \land \neg A^*)$ も証明可能である．

逆に $\Rightarrow (A^* \land \neg A^*)$ が証明可能だとすると，$(A^* \land \neg A^*)$ は $\neg(\neg A^* \lor \neg\neg A^*)$ のことだったから，(2) から，$\neg\neg(\neg A^* \lor \neg\neg A^*) \Rightarrow$ が証明可能であることがわかる．したがって，

(3.7) LK-7-1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^* \Rightarrow \neg A^*}{\Rightarrow \neg A^*, \neg\neg A^*}\,(\neg\text{-右})}{\Rightarrow \neg A^*, (\neg A^* \lor \neg\neg A^*)}\,\lor\text{-右}}{\Rightarrow (\neg A^* \lor \neg\neg A^*)}\,(\lor\text{-右})}{\neg(\neg A^* \lor \neg\neg A^*) \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\Rightarrow \neg\neg(\neg A^* \lor \neg\neg A^*)}\,(\neg\text{-右}) \qquad \dfrac{\vdots}{\neg\neg(\neg A^* \lor \neg\neg A^*) \Rightarrow}}{\Rightarrow}\,(\text{cut})$$

により，シークエント "$\Rightarrow$" も証明可能になる．（証明終り）

LK-7-2

演習問題 3.3 Γ, Δ を命題論理の論理式の有限集合とし，φ, ψ を命題論理の論理式とするとき，シークエント $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi$ が証明可能なのは，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \rightarrow \psi)$ が証明可能であるちょうどそのときである．

L-LK-1

補題 3.4 Γ を命題論理の論理式の有限集合とするとき，次は同値である:

(a) シークエント $\Gamma \Rightarrow$ は証明可能である．

(b) すべての命題論理の論理式 φ に対し，シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は証明可能である．

(c) ある命題記号 A^* に対し，シークエント $\Gamma \Rightarrow (A^* \wedge \neg A^*)$ は証明可能である．

証明． “(a) なら (b)”: weakening (3.1) を用いる． “(b) なら (c)” は自明である．“(c) なら (a)” は 補題 3.2, (3) の証明での (3.7) と同様にして証明できる．**(証明終り)**

補題 3.4 の条件 (a) ∼ (c) (のうちのどれか，つまり全部) が成り立つとき，Γ は (論理的に) 矛盾する，ということにする．

4 LK の健全性と完全性

LKcomp

次の定理は，命題論理に関する LK の健全性定理 (Soundness Theorem) とよばれる．この定理は証明の体系 LK が意図されたような解釈に関して “正しい” ものになっていることを示していることを主張している．

soundness-prop-L

定理 4.1 (命題論理に関する LK の健全性定理) すべてのシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対し， $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能なら，$((\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta))$ はトートロジーである．

証明． $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に関する帰納法で，

$(4.1)_n$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が高さが高々 n の証明 P を持つなら[21]，$((\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta))$ はトートロジーである． LK-8

を示す．

---

[21] 証明は，論理式でラベル付けされた有限の木だった．ここでの証明の高さとはこの木の高さ (height) のことである．

$n = 1$ のときには，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は，P の初式でもあるから，このシークエントは $\varphi \Rightarrow \varphi$ の形をしている．したがって，$((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ はこのとき $(\varphi \to \varphi)$ となるが，これは明らかにトートロジーであるからよい．

後は，任意の n に対して $(4.1)_n$ が成り立つとき $(4.1)_{n+1}$ も成り立つことを示せばよい．

P を高さが高々 $n+1$ の $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明とする．P の高さが $\leq n$ のときには，$(4.1)_k, k \leq n$ から $((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ はトートロジーになるから，P の高さは ちょうど $n+1$ だとしてよい．

このとき，P の最後の推論[22] が何であるかによる場合分けにより，$(\varphi \to \varphi)$ がそれぞれの成り立つことを示す．ここでは最初の 2 つの場合での証明を示して，他の場合は読者の演習とする．

最後の推論が weakening である場合: まず，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が， $\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ となっていて，P は，

$$\cfrac{\cfrac{P'}{\Gamma' \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening})$$

となっているときを考える．このときには $\cfrac{P'}{\Gamma' \Rightarrow \Delta}$ は高さが n の $\Gamma' \Rightarrow \Delta$ の証明だから，仮定 $(4.1)_n$ から，

(4.2) $((\bigwedge\Gamma') \to (\bigvee\Delta))$ はトートロジーである． LK-9

任意の付値 $v : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ に対し，$v \not\models \Gamma$ なら，$v \not\models \bigwedge\Gamma$ だから，$v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ である．$v \models \Gamma$ なら，特に $v \models \Gamma'$ だから，(4.2) から，$v \models (\bigvee\Delta)$ となるから，この場合にも $v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ が言える．したがって，$((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ はトートロジーであることがわかる．

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が， $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ となっていて，P は，

$$\cfrac{\cfrac{P'}{\Gamma \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening})$$

となっているときときも同様に示せる．

最後の推論が cut である場合: この場合には，P は

$$\cfrac{\cfrac{P_1}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi} \qquad \cfrac{P_1}{\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{cut})$$

[22] つまり P の終式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ とその 1 つ上のノードのラベルになっている 1 つあるいは 2 つのシークエントの従う推論規則．

という形をしていて，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$ である．ここで $\dfrac{P_1}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi}$ と $\dfrac{P_1}{\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}$ はそれぞれ，長さが n 以下の証明だから，$(4.1)_n$ から，

(4.3) $(\bigwedge\Gamma_1) \to (\varphi \vee (\bigvee\Delta_1))$ と LK-10

(4.4) $(\varphi \wedge (\bigwedge\Gamma_2)) \to (\bigvee\Delta_2)$ LK-11

は両方ともトートロジーである．ここで，任意の付値 v : PropVar $\to \mathbb{2}$ に対し，$v \not\models \bigwedge\Gamma$ なら，$v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ であるからよい．$v \models \bigwedge\Gamma$ で，$v \models \varphi$ なら，(4.4) がトートロジーであることから，$v \models \bigvee\Delta_2$ となり，$\Delta_2 \subseteq \Delta$ だから，$v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ である．$v \not\models \varphi$ なら，(4.3) がトートロジーであることから，$v \models (\bigvee\Delta_1)$ となり，$\Delta_1 \subseteq \Delta$ だから，再び $v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ がわかる．以上で，任意の付値 v に対し $v \models ((\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta))$ が成り立つことがわかったが，これが示すべきことであった．

他の場合についても同様に証明ができる (演習)． （証明終り）

論理式の集合 Γ が論理的に矛盾する，とは，シークエンス $\Gamma \Rightarrow$ が証明可能である，ということだった (補題 3.4 とその後を参照)．

Th-completeness-0

補題 4.2 (完全性の補題) 任意の命題論理の論理式の有限集合 Γ に対し，Γ が充足可能でないなら，Γ は論理的に矛盾する (つまりシークエント “$\Gamma \Rightarrow$” が証明可能である)．

証明． 補題の対偶:

“$\Gamma \Rightarrow$” が証明可能でないなら，Γ は充足可能である．

を証明する．Γ に現われる論理式の部分論理式の全体を $\mathcal{S}$ と表すことにして，これを $\mathcal{S} = \{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ と枚挙する．$\Gamma_0 = \Gamma$ として，$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_k$ を次が成り立つように構成する．

(4.5) すべての $\ell \leq k$ に対し，$\Gamma_\ell \Rightarrow$ は LK で証明可能でない． LK-12

(4.6) すべての $0 < \ell \leq k$ に対し，$\Gamma_\ell = \Gamma_{\ell-1} \cup \{\varphi_\ell\}$ であるか，$\Gamma_\ell = \Gamma_{\ell-1} \cup \{\neg\varphi_\ell\}$ LK-13
であるかのどちらかである．

$0 < \ell \leq k$ に対して，$\Gamma_{\ell-1}$ が (4.5), (4.6) を満たすように構成できたとき ($\ell = 1$ のときには $\Gamma_0 = \Gamma$ は仮定から (4.5) を満たすことに注意する)， Γ_ℓ が (4.5), (4.6)

を満たすようにとれることを示す．このためには，$\Gamma_{\ell-1}, \varphi_\ell \Rightarrow$ と $\Gamma_{\ell-1}, \neg\varphi_\ell \Rightarrow$ のうちの少なくとも 1 つは証明可能でないことが示せればい．背理法で示す．この 2 つとも証明可能として，それらの証明をそれぞれ P_1, P_2 とすると，

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P_1}{\Gamma_{\ell-1}, \varphi_\ell \Rightarrow}}{\Gamma_{\ell-1} \Rightarrow \neg\varphi_\ell}\,(\neg\text{-右}) \qquad \cfrac{P_2}{\Gamma_{\ell-1}, \neg\varphi_\ell \Rightarrow}}{\Gamma_{\ell-1} \Rightarrow}\,(\text{cut})$$

により，$\Gamma_{\ell-1} \Rightarrow$ が証明可能になってしまい，$\Gamma_{\ell-1}$ に対する仮定 (4.5) に矛盾である．

Cl-LK-0

Claim 4.2.1 (1) 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し，$\varphi \in \Gamma_k$ か $\neg\varphi \in \Gamma_k$ のうちのちょうど 1 つが成り立つ．

(2) $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{S}$ のとき，$(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_k$ となるのは，$\varphi \in \Gamma_k$ または $\psi \in \Gamma_k$ の (少なくとも) 片方が成り立つ，ちょうどそのときである．

$\vdash$ (1): ある $0 < \ell \leq k$ に対し $\varphi = \varphi_\ell$ となるから，$\varphi \in \Gamma_k$ または $\neg\varphi \in \Gamma_k$ の少なくとも片方が成り立つことは，(4.6) によりよい．もし，$\varphi \in \Gamma_k$ かつ $\neg\varphi \in \Gamma_k$ の両方が成り立つとすると，

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\,(\text{weakening})}{\Gamma_k \Rightarrow}\,(\text{weakening})$$

となって，$\Gamma_k \Rightarrow$ が証明可能になってしまうが，これは，(4.5) に矛盾である．

(2): $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_k$ だが，$\varphi \notin \Gamma_k$ かつ $\psi \notin \Gamma_k$ だとすると，$\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ だから，(1) から，$\neg\varphi, \neg\psi \in \Gamma_k$ である．したがって，

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}\,(\text{weakening}) \qquad \cfrac{\cfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}\,(\text{weakening})}{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}\,(\vee\text{-左})}{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\,(\text{weakening})}{\Gamma_k \Rightarrow}\,(\text{weakening})$$

となり，$\Gamma_k \Rightarrow$ が証明可能となってしまうが，これは (4.5) に矛盾である．

逆に，$\varphi \in \Gamma_k$ または $\psi \in \Gamma_k$ が成り立っているとする．例えば，$\varphi \in \Gamma_k$ として，$(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma_k$ とすると，(1) により，$\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma_k$ である．したがって，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)}\,(\vee\text{-右})}{\neg(\varphi \vee \psi), \varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\ddots \vdots \iddots}\,(\text{weakening})}{\Gamma_k \Rightarrow}\,(\text{weakening})$$

となり，$\Gamma_k \Rightarrow$ が証明可能となってしまい (4.5) に矛盾である． $\dashv$

A を Γ の論理式に現れる命題記号の一つとすると，$A \in \mathcal{S}$ だから，Claim 4.2.1, (1) により，$A \in \Gamma_k$ か $\neg A \in \Gamma_k$ のどちらかちょうど 1 つが成り立つことに注意する．

ここで，$f : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ を，

(4.7)
$$f(A) = \begin{cases} 1, & A \in \Gamma_k \text{ のとき}, \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$
LK-13-0

とする．

次の Claim により，Γ_k が，したがって，特に $\Gamma \subseteq \Gamma_k$ も充足可能であることが示せて，証明が完了する．

Cl-LK-1

Claim 4.2.2 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し，

(4.8) $\varphi \in \Gamma_k$ となることと，$v \models \varphi$ となることは同値である． LK-14

特に $v \models \Gamma$ が成り立つ．

$\vdash$ φ の構成に関する帰納法で (4.8) が成り立つことを示す[23]．φ が命題記号 A のときには，(4.7) により明らかである．

$\varphi = (\varphi' \vee \varphi'')$ で φ' と φ'' に対しては (4.8) が成り立っているときには，Claim 4.2.1, (2) と 演習問題 2.1, (1) により，

$$\begin{aligned} (\varphi' \vee \varphi'') \in \Gamma_k \quad & \Leftrightarrow \quad \varphi' \in \Gamma_k \text{ または，} \varphi'' \in \Gamma_k \\ & \Leftrightarrow \quad v \models \varphi' \text{ または } v \models \varphi'' \\ & \Leftrightarrow \quad v \models (\varphi' \vee \varphi'') \end{aligned}$$

により，φ に対しても (4.8) が成り立つ．

$\varphi = \neg\varphi'$ で φ' に対しては (4.8) が成り立っているときには，Claim 4.2.1, (1) と 演習問題 2.1, (2) により，

[23] $\mathcal{S}$ の定義で，Γ に現れる論理式の部分論理式をすべて $\mathcal{S}$ の要素としたのは，ここでの帰納法による証明がうまく通るためだったことに注意する．

$$
\begin{aligned}
(\neg\varphi') \in \Gamma_k \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi' \notin \Gamma_k \\
&\Leftrightarrow \quad v \not\models \varphi' \\
&\Leftrightarrow \quad v \models \neg\varphi'
\end{aligned}
$$

により，φ に対しても (4.8) が成り立つ． $\dashv$

（証明終り）

命題論理に関する LK の完全性定理 (Completeness Theorem) とよばれる次の定理は，補題 4.2 のほとんど直接的な系となっている．このため，補題 4.2 も (命題論理に関する LK の) 完全性定理とよばれることがある[24]：

Th-completeness-1

定理 4.3 (命題論理に関する LK の完全性定理) すべてのシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対し，$(\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta)$ がトートロジーなら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は証明可能である．

証明． 対偶命題を示す[25]．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能でないなら，補題 3.2, (2) により，$\Gamma, \neg(\bigvee\Delta) \Rightarrow$ は証明可能でない．したがって，完全性の補題 (補題 4.2) により，$\Gamma, \neg(\bigvee\Delta)$ (つまり $\Gamma \cup \{\neg(\bigvee\Delta)\}$) は充足可能だから，付値 v : PropVar $\rightarrow \mathbb{2}$ で，$v \models \Gamma, \neg(\bigvee\Delta)$ となるものが存在する．特に $v \models \Gamma$ で $v \not\models (\bigvee\Delta)$ だから，$v \not\models (\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta)$ である．したがって，$(\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta)$ はトートロジーではない． （証明終り）

5 完全性定理の拡張とその応用

extcomp

前節の完全性の補題 (補題 4.2) は次のように拡張することができる．これまで命題記号の全体 PropVar は可算個の記号からなるとしていたが，次の補題は，PropVar を任意の (非可算でもありえる) 無限集合としても成り立つ．したがって，以下の補題での Γ は非可算集合でもありえる．

Th-completeness-0x

補題 5.1 (完全性の補題の一般化) 任意の (必ずしも有限でない) 論理式の集合 Γ に対し，Γ が充足可能でないなら，Γ のある有限部分集合 Γ' で $\Gamma' \Rightarrow$ が証明可能な (つまり矛盾する) ものが存在する．

[24] 筆者がここで書いた証明を習ったのは Diplom 論文の指導教官だった Janos Makowski 先生からで，これはもう 40 年近く前のエスサレムからハイファへ向う列車の中のことだった．このときのことは `http://fuchino.ddo.jp/obanoyama2012-2016.html#16.06.09(Th10:53(JST))` にも書いた．

[25] 定理の命題の対偶は，「$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は証明可能でないなら，$(\bigwedge\Gamma) \rightarrow (\bigvee\Delta)$ はトートロジーではない」 である．

証明.　超限帰納法を用いて補題 4.2 と全く同様に証明できる．証明のスケッチを与えておく．

対偶命題の:

> すべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し，$\Gamma' \Rightarrow$ が証明できないとき，Γ は充足可能である．

を証明する．Γ を上のような性質を持つ論理式の集合として，$\mathcal{S}$ を Γ の論理式の部分論理式の全体とする．ある基数 κ に対し $\Gamma = \{\varphi_\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$ とする[26]．論理式の集合の上昇列 $\Gamma_\alpha, \alpha < \kappa$ を See Jech [AC].

(5.1)　$\Gamma_0 = \Gamma$;

(5.2)　$\alpha < \kappa$ とすべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma_\alpha$ に対し $\Gamma' \Rightarrow$ は証明できない;

(5.3)　$1 < \alpha < \kappa$ に対し，$\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta \cup \{\varphi_\alpha\}$ または $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$.

となるものとする．この構成が可能なことは，補題 4.2 でと同様に示せ．$\Gamma_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \Gamma_\alpha$ として，これに対し，Claim 4.2.1 と同様の主張が成り立つことを示す．V を $\mathcal{S}$ に現れる命題変数の全体として，(4.7) でのようにして $f : V \to \mathbb{2}$ を定義して，これを拡張する $v : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ をとれば，$v \models \Gamma$ となることが，Claim 4.2.2 と同様にして示せる．　**(証明終り)**

compactness-th

定理 5.2 (命題論理のコンパクト性定理) すべての命題論理の論理式の集合 Γ に対し，Γ が充足可能であるのは，Γ のすべての有限部分集合が充足可能である丁度そのときである．

証明.　Γ が充足可能で $v : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ を $v \models \Gamma$ となるようようにとると，Γ のすべての有限部分集合 Γ' に対し，$v \models \Gamma'$ だから，Γ' は充足可能である．

逆に Γ のすべての有限部分集合 Γ' に対し，Γ' 充足可能なら，$(\bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma' \to \bigvee\!\!\!\bigvee \emptyset)$ はトートロジーでないから，健全性定理から $\Gamma \Rightarrow$ は証明可能でない．したがって，補題 5.1 により，Γ は充足可能である．　**(証明終り)**

---

[26] [上級者のための注意]: ここでは一般には選択公理が必要になることに注意する．ただし，命題記号の全体が整列されているなら，選択公理は必要とならない．実は，別証明により，命題論理のコンパクト性定理は後に述べる述語論理のコンパクト性定理と同様，Prime Ideal Theorem と呼ばれる選択公理より真に弱いことの証明されている原理から証明でき，通常の集合論では，この原理と同値になることが知られている．

G を空でない集合として，$A \subseteq G^2 = \{\langle a,b\rangle : a,b \in G\}$ とする[27)]．$\langle G,A\rangle$ がグラフとは，すべての $a, b \in G$ に対し，

$$(5.4) \quad \langle a,a\rangle \notin A,\ \langle a,b\rangle \in A \text{ なら } \langle b,a\rangle \in A$$

が成り立つもののことする．$\langle a,b\rangle \in A$ を $a\,A\,b$ とも書くことにして，これを「a と b は隣接する」(“a and b are adjacent”) と読むことにする[28)]．

f がグラフ $\langle G,A\rangle$ の n-色の塗り分けであるとは，$f : G \to \{0, 1, ..., n-1\}$ で，すべての $a, b \in G$ に対し，$a\,A\,b$ なら $f(a) \neq f(b)$ となることである．つまり，f は隣接する 2 つの G の元を常に異る色で塗り分ける G の n-色での彩色である．

グラフ $\langle G,A\rangle$ に n-色の塗り分けが存在するとき，$\langle G,A\rangle$ は n-色塗り分け可能である (n-colorable) であるという．$\langle G',A'\rangle$ が $\langle G,A\rangle$ の (full な) 部分グラフ (full subgraph) であるとは，$G' \subseteq G$ で $A' = A \cap (G')^2$ となることである．またグラフ $\langle G,A\rangle$ が有限であるとは，G が有限集合であることとする．

次の定理の証明は命題論理のコンパクト性定理の典型的な応用例の 1 つとなっている[29)]:

de-bruijn-erdos

定理 5.3 (De Bruijn and Erdős, 1951) n を自然数とするとき，任意のグラフ $\langle G,A\rangle$ に対し，$\langle G,A\rangle$ が n-色塗り分け可能であるのは，$\langle G,A\rangle$ のすべての有限部分グラフ $\langle G',A'\rangle$ が n-色塗り分け可能である丁度そのときである．

証明． $f : G \to \langle 0, ..., n-1\rangle$ が G の n-色塗り分けのときには，任意の $\langle G,A\rangle$ の部分グラフ $\langle G',A'\rangle$ に対して，$f \restriction G'$ はグラフ $\langle G',A'\rangle$ の n-色塗り分けになるから，$\langle G,A\rangle$ が n-色塗り分け可能なら，$\langle G,A\rangle$ の任意の有限部分グラフ $\langle G',A'\rangle$ も n-色塗り分け可能である．

したがって，$\langle G,A\rangle$ のすべての有限部分グラフ $\langle G',A'\rangle$ が n-色塗り分け可能であるとき，$\langle G,A\rangle$ も n-色塗り分け可能であることを示せばよい．

[27)] 一般に集合 X に対し，$X^2 = \{\langle x,y\rangle : x,y \in X\}$ の部分集合 R を X 上の二項関係とよぶ (したがって ここでの A は G 上の二項関係である)．R が X 上の二項関係のとき，$\langle x,y\rangle \in X^2$ に対し $\langle x,y\rangle \in R$ を $x\,R\,y$ とも書き，これを x と y は関係 R にある，と読み下す．

この記法を用いると $\langle G,R\rangle$ がグラフである，とは，すべての $a \in G$ に対し $a\,A\,a$ でなく，すべての $a, b \in G$ に対し，$a\,A\,b$ なら $b\,R\,a$ となることである．

[28)] ここでの $G = \langle G,A\rangle$ は，第 7 節で導入することになる “構造” の 1 つの特別な場合となっている．

[29)] ただし De Bruijn と Erdős によるオリジナルな証明はコンパクト性定理を用いずに別の方法で行なわれている．

グラフ $\langle G, A\rangle$ に対し，$A_{a,i}$, $a \in G$, $i < n$ を互いに異る命題変数とする．Γ を次のような論理式からなる集合とする:

(5.5)　すべての $a \in G$ に対する，$\bigvee\{A_{a,i} : i < n\}$;

(5.6)　すべての $a \in G$ と $i < n$ に対する，$(A_{a,i} \rightarrow \bigwedge\{\neg A_{a,j} : j < n, j \neq i\})$;

(5.7)　すべての $a, b \in G$ で $a\,A\,b$ となるものと $i < n$ に対する，$A_{a,i} \rightarrow \neg A_{b,i}$.

$\langle G, A\rangle$ の任意の部分グラフ $\langle G', A'\rangle$ に対し，

$$\Gamma_{G'} = \{\varphi \in \Gamma : \varphi \text{ は } A_{a,i}, a \in G' \text{ の形の命題変数のみを含む}\}$$

とする．$\Gamma = \Gamma_G$ である．

このとき，次が成り立つ

C-coloring-0

Claim 5.3.1 (1) $\langle G, A\rangle$ の部分グラフ $\langle G', A'\rangle$ と，任意の付値 $v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ に対し，

$$\begin{aligned}(5.8)\quad v \models \Gamma_{G'} \;\Leftrightarrow\; & f : G' \rightarrow \{0, ..., n-1\};\, a \mapsto i,\\ & \text{ただし } i \text{ は} v(G_{a,i}) = 1 \text{ となるような，最小の } i < n\\ & \text{(そのようなものがなければ 0)}\\ & \text{は } \langle G', A'\rangle \text{ の } n\text{-色塗り分けである．}\end{aligned}$$

coloring-0

(2) $\langle G, A\rangle$ の部分グラフ $\langle G', A'\rangle$ に対し，$f : G' \rightarrow \{0, ..., n-1\}$ が $\langle G', A'\rangle$ の n-色塗り分けのとき，$v : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ を，すべての $a \in G'$ と $i < n$ に対し，$v(G_{a,i}) = 1 \Leftrightarrow f(a) = i$ となるような付値とするとき，$v \models G'$ である．

$\vdash$　演習.　$\dashv$

任意の $\langle G, A\rangle$ の有限部分グラフ $\langle G', A'\rangle$ が n-色塗り分け可能なら，Claim 5.3.1 (2) により，$\langle G', A'\rangle$ に対応する Γ の有限部分集合 $\Gamma_{G'}$ は充足可能である．Γ 任意の有限部分集合は，このような形の Γ の有限部分集合に含まれるから，任意の $\langle G, A\rangle$ の有限部分グラフ $\langle G', A'\rangle$ が n-色塗り分け可能なら，Γ のすべての有限部分集合は充足可能であることがわかる．したがって，コンパクト性定理 (定理 5.2) により，Γ は充足可能だが，$v \models \Gamma$ となる付値 v から (5.8), (1) でのようにして作った $f : G \rightarrow \{0, ..., n-1\}$ はグラフ $\langle G, A\rangle$ の n-色塗り分けになる．　**（証明終り）**

集合 X 上の二項関係 $R \subseteq X^2$ が X 上の半順序 (partial ordering) である，とは，次の反射律，反対称律，推移律が成り立つことである:

(5.9) すべての $x \in X$ に対し，$x\,R\,x$ がなりたつ (反射律)

(5.10) すべての $x, y \in X$ に対し $x\,R\,y$ かつ $y\,R\,x$ なら， $x = y$ である (反対称律)

(5.11) すべての $x, y, z \in X$ に対して $x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ なら，$x\,R\,z$ が成り立つ (推移律)

X 上の半順序 R は，

(5.12) すべての $x, y \in X$ に対し，$x\ R\ y$ か $y\ R\ x$ の少なくとも片方は成り立つ[30)]

とき全順序 (total ordering) である，あるいは線形順序 (linear ordering) であるという.

演習問題 5.4 集合 X が有限のときには，X 上の半順序 R は X 上の全順序 R', $R \subseteq R' \subseteq X^2$ に拡張できることを X の要素の数に関する帰納法で示せ．この事実と命題論理のコンパクト性定理を用いて，任意の集合上の半順序は全順序に拡張できることを示せ.

$\langle G, A\rangle$ をグラフとするとき，$\langle G, A\rangle$ が n-色塗り分け可能で，すべての $m < n$ に対しては m-色彩色可能でないとき (つまり n が $\langle G, A\rangle$ が n-色塗り分け可能な最小の数のとき)，n を $\langle G, A\rangle$ の chromatic number とよび $chr(\langle G, A\rangle)$ と表す.

演習問題 5.5 $chr(\langle G, A\rangle)$ が定義されているとき，

$$chr(\langle G, A\rangle) = \max\{chr(\langle G', A'\rangle) : \langle G', A'\rangle \text{ は } \langle G, A\rangle \text{ の有限部分グラフ}\}$$

となることを示せ[31)] (ヒント: 定理 5.3 から導ける).

第 II 部
述語論理

part-II

6　述語論理の論理式

pred-logic

命題論理では，個々の原子的な命題を命題記号で表して，それらの論理的な結合の仕方を論理式として表したが，述語論理では，これらの命題の内容も論理式として書きあらわすための枠組を与える．また，述語論理では，命題の文章の主語や述語に対応する変数に対する量化 (quantification, ,「⋯ を満たす ⋯ が存在する」,「すべての ⋯ について ⋯ が成り立つ」) の表現が可能である．

このために，まず，不特定の対象をあらわすための無限個の変数記号，x, y, z, x_0, x_1, x_2,..., を用意しておく．変数記号の全体を Var で表すことにする．“$x \in \mathsf{Var}$” と書いて,「x を用意された変数記号の 1 つとする」 という主張の略記として用いる．この場合 ‘x’ は，ある変数記号を表す記号として用いられており，この変数記号が実際に x という文字からなる記号である，ということが主張されているわけではない．

述語論理で展開される理論の一つ一つに付随して，言語 (language, または signature) とよばれる，いくつかの定数記号 (constant symbols) c_i, $i \in I$ ，関数記号 (function symbols) f_j, $j \in J$，関係記号 (relation symbols) r_k, $k \in K$ からなる記号の集まり $\mathcal{L} = \{c_i, f_j, r_k\}_{i\in I, j\in J, k\in K}$ を指定する．ここで I, J, K のうちのいくつかは空集合であってもよく[32)]，すべてが空集合であってもいい．最後の場合には $\mathcal{L}$ 自身が空集合となる．空な言語 $\emptyset$ を，それが言語であることを強調するために，$\mathcal{L}_\emptyset$ と表すことにする．

言語 $\mathcal{L}$ が与えられたときには，$\mathcal{L}$ の各々の関数記号や関係記号には，それらの変数の数 (arity) が指定されているものとする．

例えば，後で考察することになる自然数の理論 (ペアノ算術 (Peano arithmetics)) を展開するときに用いられる言語 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ は，$\mathcal{L}_{\mathsf{PA}} = \{0, S, +, \cdot, \leq\}$ というような形を

[30)] このときには，反対称律により $x\,R\,y$ と $y\,R\,x$ の両方が成り立つときには $x = y$ となるから，2 つの異る x, y に対しては，$x\,R\,y$ と $y\,R\,x$ のうちの片方だけが成り立つことがわかる．

[31)] この形の主張が本来の De Bruijn-Erdős の定理である．

[32)] 例えば I が空集合なら，$\mathcal{L}$ は定数記号を持たない言語となる．

しており，0 は定数記号，S は 1 変数の関数記号，$+$ と $\cdot$ はそれぞれ 2 変数の関数記号，$\leq$ は 2 変数の関係記号である[33)]．

言語 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}$-項 ($\mathcal{L}$-terms) を，次のようにして再帰的に定義される記号列のこととする:

(6.1)　各々の変数記号 $x \in \mathsf{Var}$ (からなる長さが 1 の記号列) は $\mathcal{L}$-項である． pred-1

(6.2)　各々の $\mathcal{L}$ の定数記号 (からなる長さが 1 の記号列) は $\mathcal{L}$-項である． pred-2

(6.3)　f が $\mathcal{L}$ の n-変数の関数記号で，$t_0,\ldots,t_{n-1}$ が $\mathcal{L}$-項のとき，記号列 $f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ も $\mathcal{L}$-項である． pred-3

(6.4)　$\mathcal{L}$-項は以上の (6.1), (6.2), (6.3) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る． pred-4

例えば，$\mathcal{L}$ が 2 変数の関数記号 f, 3 変数の関数記号 g, 定数記号 a_1, a_2 を含んでいるときには，x, y, $z \in \mathsf{Var}$ として

$$g(f(x, f(a_1, y)), g(x, y, z), a_2), \qquad f(f(f(x, y), f(x, y)), f(y, z))$$

などは $\mathcal{L}$-項だが，$g(x, y)$ や $c_1(g, f)$ は $\mathcal{L}$-項ではない．

通常に使われる 2 変数の関数記号，たとえば，上での $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ での関数記号 $+$ では，この定義に従えば，$+(x, y)$ というような表現を $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$-項として採用することになるが，この $\mathcal{L}$-項を，通常の書き方によって，$x + y$ と書き表すこともある．ただし，これはあくまで可読性のための略記と考えることにする．

$\mathcal{L}$ が関数記号を 1 つも含まないときには，$\mathcal{L}$-項は，変数記号であるか，$\mathcal{L}$-の定数記号であるかのいずれか (つまり，そのような記号からなる長さが 1 の記号列) である．

$\mathcal{L}$-項はの概念は，数学での多項式の概念の一般化と考えられる．

$\mathcal{L}$ を言語とするとき，$\mathcal{L}$-論理式 ($\mathcal{L}$-formulas) を次のようにして再帰的に定義される記号列のこととする．

(6.5)　t_0 と t_1 が $\mathcal{L}$-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は $\mathcal{L}$-論理式である[34)]． pred-5

(6.6)　r が $\mathcal{L}$ の n-変数関係記号で，$t_0, \ldots, t_{n-1}$ が $\mathcal{L}$-項のとき，$r(t_0, \ldots, t_{n-1})$ は pred-6

33) 述語論理で公理化される自然数の理論は，そのような理論を最初に研究した人の 1 人である G. Peano (1858(安政 5) – 1932(昭和 7)) にちなんで，ペアノ算術とよばれる．$\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ の “PA” はこの「ペ

$\mathcal{L}$-項である[35]．

(6.7)　φ と ψ が $\mathcal{L}$-論理式のとき，$(\varphi \vee \psi)$ と $\neg\varphi$ も $\mathcal{L}$-論理式である． pred-7

(6.8)　φ が $\mathcal{L}$-論理式で，$x \in \mathsf{Var}$ のとき， $\exists x\varphi$ も $\mathcal{L}$-論理式である． pred-8

(6.9)　$\mathcal{L}$-論理式は，以上の (6.5) ∼ (6.8), の繰り返し適用によって得られる記号列に限る． pred-9

言語が $\mathcal{L}'$ が $\mathcal{L}$ の拡張になっているときには，すべての $\mathcal{L}$-論理式は $\mathcal{L}'$-論理式でもある．特にすべての $\mathcal{L}_\emptyset$-論理式は，どの言語 $\mathcal{L}$ に対しても $\mathcal{L}$-論理式である．

(6.7) での $(\varphi \vee \psi)$ や $\neg\varphi$ の想定された解釈は，命題論理でと同様である．

上の (6.8) での $\exists x\varphi$ の想定された解釈は,「φ を満たすような x が存在する」である．これと双対的な,「すべての x に対し， φ が成り立つ」を想定された解釈とする $\forall x\varphi$ も論理式として導入されることが多いが，述語論理では，これは，$\neg\exists x\neg\varphi$ で表現できるので，ここでは，公式に導入された論理記号の数を少なくするために省いている．後で $\forall x\varphi$ の形の表現も自由に使うが，これは， $\neg\exists x\neg\varphi$ の略記のことと考える．また命題論理では公式に導入されていた $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ などの表現は，命題論理での LK を導入したところでの扱いと同じように，ここでも，それぞれ $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $(\neg\varphi \vee \psi)$ などの略記として扱かう．

(6.6) で関係記号が数学で通常使う記号，例えば，大小関係を表す 2 変数関係記号 $\leq$ などの場合，ここでも可読性を優先して，公式の論理式の定義による $\leq(x, y)$ ではなく，$x \leq y$ と書くことも多いが，これも正式な書き方の略記のようなものと思うことにする．また，$\neg x \equiv y$ や $\neg x \leq y$ (つまり $\neg \leq (x, y)$) を数学での通常の書き方に合せて $x \not\equiv y$, $x \not\leq y$ などとも書くことにする．これも可読性のための略記にすぎない．

(6.8) の $(\varphi \vee \psi)$ での括弧は，同じ論理式に複数の異なる組成の可能性が出てしまう，という種類の曖昧さが生じないために必要であるが，以下の議論では可読性を優先して適当に省略していることもある．

アノ算術」(Peano Arithmetic) の略記である．

[34] ここでは，2 つのオブジェクト (たとえば記号列) t, u が等しいこを表現するために '$t = u$' と書き，記号としての等号を $\equiv$ と書いて区別することにする．ここでの $t_0 \equiv t_1$ の意図されている解釈は,「t_0 で表現されるオブジェクトと t_1 で表現されるオブジェクトは等しい」 である．ただし，ここでは記号列 $t_0 \equiv t_1$ が $\mathcal{L}$-論理式の 1 つになるということが宣言されただけで，この記号列の解釈については，ここではまだ何も述べられていないことに注意する．

[35] (6.5) と (6.6) で導入される $\mathcal{L}$-論理式を，$\mathcal{L}$-原子論理式 ($\mathcal{L}$-atomic formulas) とよぶ．

論理記号 $\exists, \forall$ は量化子 (quantifier) と呼ばれる，$\exists x\varphi$ での変数記号 x は,「量化子 $\exists$ によって，束縛されている」という．

変数は，項や論理式を解釈するときに，考察している対象領域のオブジェクトを代入すべきスロットとなっているが，束縛された変数は，論理式の表現の中で，論理式の "主張" の一部として使われていて，オブジェクトを代入できるスロットとしては残されていない[36]．論理式で，オブジェクトを代入できるスロットとして残っている変数のことを φ の自由変数 (free variable) とよび，そうでないものを束縛変数 (bounded variable) とよぶ．同じ変数が 1 つの論理式の中の異なる場所で，自由変数としても，束縛変数としても現れている，という場合もある．たとえば，$(\exists x\neg x \equiv y \vee x \equiv y)$ では，$\vee$ の前の x は束縛されているが，$\vee$ の後の x はこの論理式の自由変数である．

与えられた言語 $\mathcal{L}$ での $\mathcal{L}$-項 t や $\mathcal{L}$-論理式 φ の自由変数の全体 $\mathsf{free}(t)$, $\mathsf{free}(\varphi)$ を $\mathcal{L}$-項や $\mathcal{L}$-論理式の再帰的な定義に沿った再帰的な定義で次のようにして導入することができる．

まず，$\mathcal{L}$-項 t に対する変数記号の集合 $\mathsf{free}(t)$ を次のように再帰的に定義する:

(6.10) t が変数記号 $x \in \mathsf{Var}$ のとき，$\mathsf{free}(t) = \{x\}$ とする． pred-10

(6.11) t が $\mathcal{L}$ の定数記号 c のとき $\mathsf{free}(t) = \emptyset$ とする． pred-11

(6.12) ある $\mathcal{L}$ の n-変数記号 f と $\mathcal{L}$-項 $t_0, ..., t_{n-1}$ に対し，$t = f(t_0, ..., t_{n-1})$ となっていて，$\mathsf{free}(t_0), ..., \mathsf{free}(t_{n-1})$ が既に定まっているとき，$\mathsf{free}(t) = \mathsf{free}(t_0) \cup \cdots \cup \mathsf{free}(t_{n-1})$ とする． pred-12

次に $\mathcal{L}$-論理式 φ に対する変数記号の集合 $\mathsf{free}(\varphi)$ を次のように導入する:

(6.13) φ が，ある $\mathcal{L}$-項 t_0, t_1 に対して $t_0 \equiv t_1$ の形をしているときには，$\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(t_0) \cup \mathsf{free}(t_1)$ とする． pred-13

(6.14) φ が，ある $\mathcal{L}$ の n-変数関係記号 r と $\mathcal{L}$-項$t_0, ..., t_{n-1}$ に対して $r(t_0, ..., t_{n-1})$ の形をしているときには，$\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(t_0) \cup \cdots \cup \mathsf{free}(t_{n-1})$ とする． pred-14

(6.15) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0, φ_1 により，$\varphi = (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ と表わせ，$\mathsf{free}(\varphi_0)$ と $\mathsf{free}(\varphi_1)$ は既に定まっているとき，$\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi_0) \cup \mathsf{free}(\varphi_1)$ とする． pred-15

(6.16) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0 により，$\varphi = \neg\varphi_0$ と表わせ，$\mathsf{free}(\varphi_0)$ は既に定 pred-16

[36] 似たような状況として，例えば，微分積分学での $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$ という表現を考えると，ここでの y は値を入れるスロットとしての変数として残っているが，x は積分変数として使われているので，もはや値を代入するこはできない．

まっているとき， $\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi_0)$ とする．

(6.17) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0 により，$\varphi = \exists x \varphi_0$ と表わせ，$\mathsf{free}(\varphi_0)$ は既に定まっているとき，$\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\varphi_0) \setminus \{x\}$ とする． pred-17

$\mathcal{L}$-論理式 φ に対し，$\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$ となるとき，つまり，φ に現れる変数記号はすべて量化子で束縛されているとき，φ は $\mathcal{L}$-文 ($\mathcal{L}$-sentence) である，という．

φ を $\mathcal{L}$ 論理式として，$x_0, ..., x_{n-1}$ を互いに異る変数記号とするとき，

(6.18) $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ pred-18

となっている，という状況を $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ で表現することにする．

(6.18) で “$=$” でなく “$\subseteq$” としたことは本質的である．この結果，変数のリスト $x_0, ..., x_{n-1}$ の中には，実際には φ の中に自由変数として現れない “ダミーの” 変数も現れることがありえる．後で $\mathcal{L}$-構造での $\mathcal{L}$-項や $\mathcal{L}$-論理式の解釈を定義するとき，ここで “$\subseteq$” を使っていることが，定義の簡略化に貢献することになる．

$\mathcal{L}$-項 t に対しても $t = t(x_0, ..., x_{n-1})$ を，

(6.19) $x_0, ..., x_{n-1}$ は互いに異なり $\mathsf{free}(t) \subseteq \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ となること， pred-18-0

を表す表現として用いる．

例 6.1 以下の例は次節で述べることにより，正確に理解できる．ここでは，直観的な議論で，論理式によって何が表現できるかを見ている:

$\exists x \varphi$ の想定された解釈は,「(考察の対象としているものの中に) φ を満たす x が存在する.」である．この解釈や，命題論理での論理演算子 $\neg$, $\vee$ etc. を命題論理でと同様に 「…でない」,「…または…」etc. と解釈することにすると，述語論理の論理式により，次のような表現ができることがわかる:

(1) $\forall x \varphi$ を $\neg \forall x \neg \varphi$ の略記として導入すると， これは,「φ が成り立たない x が (考察の対象としているものの中に) 存在しない」と解釈されるから,「すべての (考察の対象としている) x に対し φ が成り立つ」を表現する論理式になっていることがわかる．

(2) $\mathcal{L}_\emptyset$-文 $\forall x \forall y\ x \equiv y$ は「(考察の対象としているものの中には) 高々1 つの対象しか存在しない」を表現する．

(3) $\mathcal{L}_\emptyset$-文 $\exists x \exists y\ \neg x \equiv y$ は「(考察の対象としているものの中には) 2 つより多くの異るものが存在する」を表現する．

(4) 言語 $\mathcal{L}$ が 2 変数関数記号 '$\cdot$' を含んでいるとして，'$\cdot$' による演算を通常のかけ算のように略記することにすると，$\mathcal{L}$-文 $\exists x \exists y\ \neg x \cdot y \equiv y \cdot x$ は,「演算 '$\cdot$' は可換でない」 を表す．通常の数のかけ算ではこの文は成り立たないが，たとえば 2 次以上の正方行列に対してはこの文は成り立つ．

(5) 言語 $\mathcal{L}$ が 1 変数関数記号 'R' を含んでいるとすると，$\mathcal{L}$-文

$$(\exists x\ R(x)\ \wedge\ \forall x \forall y((R(x) \wedge R(y)) \to x \equiv y))$$

は 「R を満たすような x が (考察の対象としているものの中に) ちょうど一つだけ存在する」を表現する論理式になる．

7 $\mathcal{L}$-構造と $\mathcal{L}$-論理式の $\mathcal{L}$-構造での解釈

L-str

言語 $\mathcal{L}$ が与えられたとき，$\mathcal{L}$-項や $\mathcal{L}$-論理式は，$\mathcal{L}$ の定数記号，関数記号，関係記号に対応する定数，関数，関係を持つ (数学的) 構造 ($\mathcal{L}$-構造 ($\mathcal{L}$-structure)) で自然に解釈できる．

例 7.1 厳密性は後回しにして，まず簡単な例で直観的な説明を与えて，どのようなことを考えなければいけないのかを見てみることにする．

$<$ を 2 変数関係記号として，$\mathcal{L} = \{<\}$ とする.

(1) $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \exists z(x < z \wedge z < y)$ を考える．$\varphi = \varphi(x, y)$ である．φ の想定されている解釈は 「x と y の間に $x < z < y$ となる z が存在する」である．

$<^{\mathbb{N}}$ を $\mathbb{N}$ での通常の大小関係として，構造 $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ で，x と y をそれぞれ 0 と 1 で解釈するとき， $\mathbb{N}$ では 0 と 1 の真の間にある数は存在しないから，φ はここでは成り立たない (これを後の記号の使い方では $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle \not\models \varphi(0, 1)$ と表す)． 一方，同じ構造で x と y をそれぞれ 0 と 2 に解釈すると，φ はここで成り立つ (これを後の記号の使い方では $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle \models \varphi(0, 2)$ と表す).

(2) 次に $\mathcal{L}$-文 $\psi = \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$ を考える．この文の想定されている解釈は,「すべての x, y に対し，$x < y$ なら，$x < z < y$ となる z が存在する」である．

$\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ を (1) のようにとり，$<^{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の通常の大小関係とすると，構造 $\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ では ψ は成り立つ (これを後の記号の使い方では $\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle \models \psi$ と表す) が，構造 $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ では ψ は成り立たない (これを後の記号の使い方では $\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle \not\models \psi$ と表

す): (1) で見たように，たとえば x と y をそれぞれ 0 と 1 と解釈する場合がこの反例になっている．

(3) (おまけ) (2) で見たように，$\langle \mathbb{N}, <^{\mathbb{N}} \rangle$ と $\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ は，上の ψ が成り立つかどうか，という性質により区別ができるが，一方，$<^{\mathbb{Q}}$ で有理数の全体 $\mathbb{Q}$ 上の通常の大小関係を表すことにすると，$\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ と $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ はこのようなやり方では区別できない (ことが証明できる[37])．

上の例で述べたようなことを厳密に議論するために，まず，$\mathcal{L}$-構造の概念を導入する．

$\mathcal{L}$ を，定数記号 c_i, $i \in I$, 関数記号 f_j, $j \in J$, 関係記号 $r_k \in K$ からなる言語として，f_j $(j \in J)$, r_k $(k \in K)$ はそれぞれ ℓ_j, ℓ_k-変数であるとする．このとき $\mathfrak{A} = \langle A, {c_i}^{\mathfrak{A}}, {f_j}^{\mathfrak{A}}, {r_k}^{\mathfrak{A}} \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$ が $\mathcal{L}$-構造であるとは，$\mathfrak{A}$ が，

(7.1) A は空でない集合である; pred-19

(7.2) 各 $i \in I$ に対し，${c_i}^{\mathfrak{A}} \in A$ である; pred-20

(7.3) 各 $j \in J$ に対し，${f_j}^{\mathfrak{A}}$ は A から A への ℓ_j-変数関数である．つまり，${f_j}^{\mathfrak{A}} : A^{\ell_j} \to A$ である; pred-21

(7.4) 各 $k \in K$ に対し，${r_k}^{\mathfrak{A}}$ は A 上の ℓ_k-変数の関係である．つまり，${r_k}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{\ell_k}$ である[38] pred-22

を満たすこととする．上での A を $\mathfrak{A}$ の台集合 (underlyning set) とよぶことにする．構造 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,... を考えるときには，特に指定しないときには，A, B,... がそれぞれの台集合となっていると仮定する．

$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$-構造として，t を $\mathcal{L}$-項で $t = t(x_0, ..., x_{n-1})$ となっているものとするとき，$t^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ を t の構成に関する帰納法で，次のようにして定義する．

(7.5) t が変数記号のときは，$i^* < n$ で，$t = x_{i^*}$ となるものがあるが，$a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，$t^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = a_{i^*}$ とする; pred-23

(7.6) t が $\mathcal{L}$ の定数記号 c のときには，$a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，$t^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) =$ pred-24

[37] このことの証明はそれほど簡単ではない．よく知られている証明では Ehrenfeucht-Fräïssé game による論法が用いられる．$\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ と $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ が対応する言語での文の成立／非成立に関して区別できないのに対し，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}$ 上の加法や乗法を構造に加えた $\langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ と $\langle \mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ は対応する言語の文の成立／非成立で区別することができる (演習)．

[38] $R \subseteq A^\ell$ は，$a_0, ..., a_{\ell-1} \in A$ に対し，$R(a_0, ..., a_{\ell-1}) \Leftrightarrow \langle a_0, ..., a_{\ell-1} \rangle \in R$ と解釈することで A 上の ℓ-変数関係とみなすことができる．以下では，A 上の ℓ-変数関係と言ったときには，この意味での A^ℓ の部分集合のこととする．

$c^{\mathfrak{A}}$ とする．

(7.7) $\mathcal{L}$ の ℓ-変数関数記号 f と $\mathcal{L}$-項 $t_0, ..., t_{\ell-1}$ に対し $t = f(t_0, ..., t_{\ell-1})$ となっており[39]，${t_0}^{\mathfrak{A}}(x_0, ..., x_{n-1})$,...,${t_{\ell-1}}^{\mathfrak{A}}(x_0, ..., x_{n-1})$ は既に定義されているとき，$a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し， pred-25

$$t^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = f^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}), ..., {t_{\ell-1}}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}))$$

とする．

厳密には，$\{x_0, ..., x_{n-1}\} \subseteq \{y_0, ..., y_{m-1}\}$ のときには，$t = t(x_0, ..., x_{n-1})$ なら，$t = t(y_0, ..., y_{m-1})$ でもあるので，命題論理の論理式のブール関数への解釈でと同様に，$t^{\mathfrak{A}}_{(x_0,...,x_{n-1})}$ というように，変数のどの枚挙に関して $t^{\mathfrak{A}}$ を定義しているのかを明記して，補題 1.3 でのように，

L-pred-1

補題 7.2 t を $\mathcal{L}$-項として，$t = t(x_0, ..., x_{n-1})$ とする．$\{x_0, ..., x_{n-1}\} \subseteq \{y_0, ..., y_{m-1}\}$ で，$y_j, j < m$ は互いに異なるとすると，$t = t(y_0, ..., y_{m-1})$ でもあるが，各 $i < n$ に対し，$x_i = y_{j_i}$ となるように $j_i < m$ を選ぶと，任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ と $a_0, ..., a_{m-1} \in A$ に対し，

$$t^{\mathfrak{A}}_{(y_0,...,y_{m-1})}(a_0, ..., a_{m-1}) = t^{\mathfrak{A}}_{(x_0,...,x_{n-1})}(a_{j_0}, ..., a_{j_{n-1}})$$

が成り立つ．

を証明する必要がある．これは，$\mathcal{L}$-項 t の構成に関する帰納法で容易に示せる (演習)．

$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$-構造として，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，$a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，「変数 $x_0, ..., x_{n-1}$ を $a_0, ..., a_{n-1}$ で解釈したとき，φ が $\mathfrak{A}$ で成り立つ」(記号ではこれを $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ と表す) を論理式 φ の構成に関する帰納法で次のように定義する:

(7.8) φ が $t_0 \equiv t_1$ という形をしているときには，$t_0 = t_0(x_0, ..., x_{n-1})$, $t_1 = t_1(x_0, ..., x_{n-1})$ だが，このときには， pred-26

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \iff {t_0}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = {t_1}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1})$$

とする;

(7.9) φ が，$\mathcal{L}$ の ℓ-変数の関係記号 r と $\mathcal{L}$-項 $t_0, ..., t_{\ell-1}$ により，$\varphi = r(t_0, ..., t_{\ell-1})$ pred-27

[39] このときには (6.19) により，$t_0 = t_0(x_0, ..., x_{n-1})$,...,$t_{\ell-1} = t_{\ell-1}(x_0, ..., x_{n-1})$ となることに注意する．

となっているときには，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow\ ({t_0}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1}), ..., {t_{\ell-1}}^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1})) \in r^{\mathfrak{A}}$$

とする;

(7.10) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0, φ_1 によって，$\varphi = (\varphi_0 \lor \varphi_1)$ と表されていて[40)]，$\mathfrak{A} \models \varphi_0(a_0, ..., a_{n-1})$ と $\mathfrak{A} \models \varphi_1(a_0, ..., a_{n-1})$ の意味が既に確定しているとき， pred-28

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \models \varphi_0(a_0, ..., a_{n-1}) \text{ または } \mathfrak{A} \models \varphi_1(a_0, ..., a_{n-1})$$

とする;

(7.11) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0 によって，$\varphi = \neg\varphi_0$ と表されていて， pred-29
$\mathfrak{A} \models \varphi_0(a_0, ..., a_{n-1})$ の意味が既に確定しているとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \models \varphi_0(a_0, ..., a_{n-1}) \text{ でない}$$

とする;

(7.12) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0 = \varphi_0(x, x_0, ..., x_{n-1})$ と変数記号 x によって， pred-30
$\varphi = \exists x\varphi_0$ と表されていて，$\mathfrak{A} \models \varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1})$ の意味が既に確定しているとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \models \varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1}) \text{ となる } a \in A \text{ が存在する}$$

とする．

ここでも，項の解釈と同じように，実際には，自由変数の枚挙 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ ごとに $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が定義されているので，厳密には，それらの間の整合性を，補題 7.2 でのようにして確かめておく必要がある．

$(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\varphi$ という表現は，ここではそれぞれ $\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)$, $(\neg\varphi \lor \psi)$, $\neg\exists\neg\varphi$ の略と考えていたのだった．これらの表現が，実際に論理的な記号の本来意図されている意味 「…かつ…」,「…ならば…」,「すべての x に対して…」 という意味に解釈されることは，次のようにして確かめることができる

L-pred-8

40) このときには，(6.18) により，$\varphi_0 = \varphi_0(x_0, ..., x_{n-1})$, $\varphi_1 = \varphi_1(x_0, ..., x_{n-1})$ となっていることに注意．

補題 7.3 $\mathcal{L}$ を任意の言語として，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $\psi = \psi(x_0, ..., x_{n-1})$ を任意の $\mathcal{L}$-論理式とする．このとき，任意の $\mathcal{L}$ 構-造 $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ かつ $\mathfrak{A} \models \psi(a_0, ..., a_{n-1})$.

(2) $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ ならば，$\mathfrak{A} \models \psi(a_0, ..., a_{n-1})$.

(3) φ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0 = \varphi_0(x, x_0, ..., x_{n-1})$ に対する $\forall x \varphi_0$ のとき，

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow$ すべての $a \in A$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となる．

証明． (1) と (2) は次の (3) と同様に証明できる (演習).

(3): (7.11) と (7.12) から，

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x \varphi_0(a_0, ..., a_{n-1})$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\exists x \neg\varphi_0(a_0, ..., a_{n-1})$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x \neg\varphi_0(a_0, ..., a_{n-1})$ でない

$\Leftrightarrow$ (ある $a \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となる) でない

$\Leftrightarrow$ すべての $a \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1})$ でない

$\Leftrightarrow$ すべての $a \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \varphi_0(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となる．

（証明終り）

$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，φ が恒真 (universally valid) である，とは，すべての $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つこと，とする．

$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し，$\mathcal{L}$-文 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \varphi$ を φ の $\forall$-閉包 (全称閉包，$\forall$-closure (universal closure)) とよぶ．

L-pred-9

補題 7.4 $\mathcal{L}$ を任意の言語として，任意の $\mathcal{L}$-論理式 φ に対し，φ が恒真であることと，φ の $\forall$-閉包 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \varphi$ が恒真であることは同値である．

証明.　補題 7.3, (3) によりよい.　　（証明終り）

Ue-pl-0

演習問題 7.5 $\mathcal{L}$ を任意の言語とする．$s_0, s_1, \ldots, t_0, t_1, \ldots$ は f 任意の $\mathcal{L}$ 項とし，f は $\mathcal{L}$ の任意の関数記号，r は $\mathcal{L}$ の任意の関係記号あるいは等号 $\equiv$ とし，m, n はこれらの関数記号と関係記号 (または等号) の変数の数を表しているものとする．このとき，

(1) 任意の $\mathcal{L}$-論理式 φ に対し，$\mathcal{L}$-論理式 $(\varphi \to \varphi)$ は恒真である．

(2) t を $\mathcal{L}$-項とするとき $t \equiv t$ は恒真である．

(3) $((s_0 \equiv t_0 \wedge \cdots \wedge s_{m-1} \equiv t_{m-1}) \to f(s_0, \ldots, s_{m-1}) \equiv f(t_0, \ldots, t_{m-1}))$ は恒真である．

(4) $((s_0 \equiv t_0 \wedge \cdots \wedge s_{n-1} \equiv t_{n-1} \wedge r(s_0, \ldots, s_{n-1})) \to r(t_0, \ldots, t_{n-1}))$ は恒真である．

8　述語論理での理論の例

examples-of-theories

9　命題論理と述語論理の関係

prop-pred

命題論理の論理式のブール関数としての解釈と，述語論理の論理式の構造での解釈を比較すると，述語論理は次のような意味で命題論理の拡張になっていることがわかる．

ある言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$ を命題論理の論理式として，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，$\varphi(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$ で，φ に現れる $A_0, \ldots, A_{n-1}$ を，それぞれ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ で置き換えて得られる表現とする．

$\varphi(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$ が $\mathcal{L}$-論理式になり，$\psi = \varphi(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$ として，$\varphi_0 = \varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ とすると，$\psi = \psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ となることは，φ の構成に関する帰納法で容易に示せる (演習)．

L-pred-10

補題 9.1 ある言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$ を命題論理の論理式として，$\varphi_0 = \varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ とする．このとき任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $\vec{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in A^n$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})(a_0, \ldots, a_{n-1}) \;\Leftrightarrow\; f_{\varphi(A_0, \ldots,)}(\tau_{\varphi_0(\vec{a})}, \ldots, \tau_{\varphi_{m-1}(\vec{a})}) = 1$$

である．ただし，$i < m$ に対し，

(9.1)
$$\tau_{\varphi_i(\vec{a})} = \begin{cases} 0, & \mathfrak{A} \models \varphi_i(a_0, \ldots, a_{n-1}) \text{ のとき}, \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．

証明． φ の構成に関する帰納法による．（証明終り）

このことから，直ちに次がわかる:

L-pred-11

系 9.2 命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$ がトートロジーのとき，任意の言語 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0,\ldots,\varphi_{m-1}$ に対し，$\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1})$ は恒真である．

演習問題 9.3 演習問題 7.5, (1) を系 9.2 との関連において再論せよ．

ある言語 $\mathcal{L}$ に対する述語論理の $\mathcal{L}$-論理式 ψ が，ある命題論理のトートロジ $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$ の各命題変数 $A_0, \ldots, A_{m-1}$ に，ある $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ を代入することで得られているとき，ψ を命題論理によるトートロジーとよぶことにする．上の系 9.2 によりすべての命題論理によるトートロジーは恒真である．

10 述語論理での形式的証明の体系 LK と $\mathsf{LK_e}$

pred-LK

命題論理の証明の体系 LK を拡張することにより述語論理に対しても形式的な証明の体系をうまく導入することができる．述語論理に対して拡張された体系も LK とよぶことにすると，ここでの目標は，この体系に更に等号の公理を付加して得られる体系 $\mathsf{LK_e}$ に対し，すべてのシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して[41]，

(10.1) シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能 $\Leftrightarrow$ $(\bigwedge\!\!\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\!\!\bigvee\Delta)$ は恒真 LK-15

となることである．

本節で証明の体系 LK を導入し，次節で，この体系に対して，(10.1) が成り立つことを示す．

まず，言語 $\mathcal{L}$ を固定しておく．言語 $\mathcal{L}$ でのシークエント (sequent) とは，Γ, Δ を $\mathcal{L}$-論理式の有限集合として，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形をしたもののことする．命題論理での LK のシークエントに関して導入した記号法や用語はすべてここでも同じ意味で用いることにする．

[41] 後で述べるように，ここでは，Γ と Δ はある言語 $\mathcal{L}$ での $\mathcal{L}$-論理式の有限集合である．

$\mathcal{L}$-論理式のシークエントに関する推論規則のリストは，命題論理の推論規則を以下のように拡張したものである．

Δ, Γ は任意の述語論理の論理式の有限集合とし，φ, ψ は任意の命題論理の論理式とする．以下の (10.2) ˜ (10.4) で $\exists$ に関する規則を除いたものは命題論理での推論規則と全く同じ形をしている．

(10.2) (弱化，weakening) 任意の有限な $\Gamma' \supseteq \Gamma, \Delta' \supseteq \Gamma$ に対し，$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ LK-15-0

(10.3) (カット，cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Theta}$ LK-16

(10.4) (論理規則，logical rules) LK-17

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(\varphi \vee \psi), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{-左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \vee \psi)}\ (\vee\text{-右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{-左}) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

$$\frac{\varphi(y, ...), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \varphi(x, ...), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists\text{-左})$$

ただし，y は φ の自由変数で，下段の論理式たちには自由変数としては現れないものとする．また，変数記号 x は変数記号 y と同じでも異なっていてもよいが，異なっている場合には， φ にあらわれるすべての他の自由変数のどれとも異なるものとする．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}\ (\exists\text{-右})$$

ただし，t は任意の $\mathcal{L}$-項で，t は 自由変数 x 自身であるか，または，x は $\varphi(t)$ のすべての自由変数と異なる変数記号であるかのどちらかであるとする．

以上の推論規則を用いて，述語論理での LK の証明の概念が，命題論理での証明の概念と全く同様に定義される:

T がシークエント $\Delta \Rightarrow \Gamma$ の証明 (または証明木) であるとは，T はシークエントでラベルづけられた有限の二分木 (a finite binary tree labeled by sequents) で，

(10.5) T の根 (root) のラベルは $\Delta \Rightarrow \Gamma$ である; LK-18

(10.6) T の葉 (極大元) のラベルはすべて初式である; LK-19

(10.7) (α) t_3 が T のノードで，t_1 と t_2 が t_3 の T での 1 つ上のノードのとき，これらのノードにラベルづけされたシークエントがそれぞれ S_1, S_2, S_3 として，$\dfrac{S_1 \quad S_2}{S_3}$ (または $\dfrac{S_2 \quad S_1}{S_3}$) は LK の推論規則の 1 つである. LK-20

(β) t_3 が T のノードで，t_2 が t_3 の T での唯一の 1 つ上のノードのとき，これらのノードにラベルづけされたシークエントがそれぞれ S_2, S_3 として，$\dfrac{S_2}{S_3}$ は LK の推論規則の 1 つである.

シークエント $\Delta \Rightarrow \Gamma$ の (LK での) 証明が存在するとき S は (LK で) 証明可能であるという.

証明を書きあらわすときには，命題論理でと同様な証明図を用いて表現する.

ex-all-all-ex

例 10.1 述語論理での LK での証明の例として，任意の論理式 φ に対する，シークエント $\exists x\forall y\varphi \Rightarrow \forall y\exists x\varphi$ の証明を見てみることにする. ここに，$\exists x\forall y\varphi \Rightarrow \forall y\exists x\varphi$ は，$\{\exists x\forall y\varphi\} \Rightarrow \{\forall y\exists x\varphi\}$ の略記である. また，$\forall y$ は $\neg\exists y\neg$ の略記だった:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\neg\text{-右})}{\Rightarrow \varphi, \exists y\neg\varphi}\ (\exists\text{-右})}{\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\neg\text{-左})}{\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\ (\exists\text{-右})}{\exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\ (\exists\text{-左})}{\neg\exists x\varphi, \exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow}\ (\neg\text{-左})}{\exists y\neg\exists x\varphi, \exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow}\ (\exists\text{-左})}{\exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \neg\exists y\neg\exists x\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

演習問題 10.2 上の例 10.1 での ($\exists$-右) の適用が，(10.4) での制限を満たすものとなっていることを確かめよ.

上の体系 LK では，同等性を表す $\equiv$ の，他の関係記号とは異る特別なステータスが全く考慮されていなかったことに注意する. このことを補正するために，次のような形のシークエントのすべてからなる $\mathcal{L}$ での等号の公理 (axioms of equality) を導入する: 以下では，s_0, s_1,..., t_0, t_1,... は任意の $\mathcal{L}$-項とし，f は $\mathcal{L}$ の任意の関数記号，r は $\mathcal{L}$ の任意の関係記号あるいは等号 $\equiv$ とし，m, n はこれらの関数記

号と関係記号 (または等号) の変数の数を表しているものとする (特に r が $\equiv$ ときには，$n=2$ である)．

(10.8) $\Rightarrow s_0 \equiv s_0$ LK-21

(10.9) $s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{m-1} \equiv t_{m-1} \Rightarrow f(s_0, \ldots, s_{m-1}) \equiv f(t_0, \ldots, t_{m-1})$ LK-22

(10.10) $s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, r(s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow r(t_0, \ldots, t_{n-1})$ LK-23

LK の証明の定義で (10.6) を

(10.6)' T の葉 (極大元) のラベルはすべて初式であるか，または，等号の公理 (10.8), (10.9), (10.10) のうちのどれかとする．

と変更して得られる証明の概念を持つ体系を，等号を持つ述語論理 (predicate logic with equality) とよび，この体系を $\mathsf{LK_e}$ と表すことにする．

補題 10.3 $\mathcal{L}$ を言語として，$s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{n-1}$ を任意の $\mathcal{L}$-項とし，$\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，次が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能である:

(1) $s_0 \equiv s_1 \Rightarrow s_1 \equiv s_0$,

(2) $s_0 \equiv s_1, s_1 \equiv s_2 \Rightarrow s_0 \equiv s_2$,

(3) $s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \varphi(s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow \varphi(t_0, \ldots, t_{n-1})$.

証明． (1): (10.10) で $r(x_0, x_1)$ として $x_0 \equiv x_1$ をとると，

$$s_0 \equiv s_1, s_0 \equiv s_0, s_0 \equiv s_0 \Rightarrow s_1 \equiv s_0$$

(つまり，$\{s_0 \equiv s_1, s_0 \equiv s_0\} \Rightarrow \{s_1 \equiv s_0\}$) は等号の公理の 1 つであることがわかる．これと (10.8) のタイプの等号の公理 $\Rightarrow s_0 \equiv s_0$ を用いると，

$$\frac{\Rightarrow s_0 \equiv s_0 \quad s_0 \equiv s_1, s_0 \equiv s_0, s_0 \equiv s_0 \Rightarrow s_1 \equiv s_0}{s_0 \equiv s_1 \Rightarrow s_1 \equiv s_0}\ (\mathrm{cut})$$

が $s_0 \equiv s_1 \Rightarrow s_1 \equiv s_0$ の証明となる．

(2): (1) と同様に証明できる (演習)．

(3): φ の構成に関する帰納法で示す．φ が原子論理式のときには，主張は，(10.10) からよい (初式や等号の公理は高さが 1 の証明木で証明されていることに注意)．

φ が $\exists x \varphi_0$ という形をしていて，φ_0 に対しては主張が成り立つとすると，

$$\dfrac{\Rightarrow x \equiv x \quad \dfrac{\vdots}{x \equiv x,\, s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \varphi_0(x, s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow \varphi_0(x, t_0, \ldots, t_{n-1})}}{\dfrac{s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \varphi_0(x, s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow \varphi_0(x, t_0, \ldots, t_{n-1})}{\dfrac{s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \varphi_0(x, s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow \exists x \varphi_0(x, t_0, \ldots, t_{n-1})}{s_0 \equiv t_0, \ldots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \exists x \varphi_0(x, s_0, \ldots, s_{n-1}) \Rightarrow \exists x \varphi_0(x, t_0, \ldots, t_{n-1})}\ (\exists\text{-左})}\ (\exists\text{-右})}\ (\text{cut})$$

により φ に対しても主張が成り立つことが示せる．他の場合は演習とする．（証明終り）

LK や $\mathrm{LK_e}$ の $\neg, \vee$ に関する推論規則は，命題論理での推論規則と同じだから，補題 3.2 や演習問題 3.3 などでの主張は，ここでの LK や $\mathrm{LK_e}$ に対しても成り立つ．更に，次が言える:

L-pred-12

補題 10.4 $\mathcal{L}$ を任意の言語とする．このとき，述語論理での LK または $\mathrm{LK_e}$ で次が成り立つ:

(1) φ を $\mathcal{L}$-論理式として，Γ と Δ を $\mathcal{L}$-文の有限集合とする．変数記号 x が Γ と Δ に含まれる論理式に自由変数として現れないとき，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ が証明可能であることと，$\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi$ が証明可能であることは同値である．

(2) Γ と Δ を $\mathcal{L}$-論理式の有限集合として，$x_0, \ldots, x_{n-1}$ を変数記号とするとき，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと，シークエント

$$\Rightarrow \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)$$

が証明可能であることは同値である．

証明． $\forall x \varphi$ は $\neg \exists x \neg \varphi$ の略記だったことを思い出しておく．

(1): シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ が証明可能とすると，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{-左})}{\exists x \neg \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists\text{-左})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \exists x \neg \varphi}\ (\neg\text{-右})$$

により，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi$ も証明可能である．

逆にシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi$ が証明可能だったとすると，

$$\dfrac{\dfrac{\ddots\vdots\iddots}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\exists x\neg\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,(\neg\text{-右})}{\Rightarrow \varphi, \exists x\neg\varphi}\,(\exists\text{-右})}{\neg\exists x\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\neg\text{-左})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(\text{cut})$$

により，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ も証明可能である．

(2): (1) と補題 3.2, (3) (に対応する述語論理での命題) によりよい．（証明終り）

ex-0

例 10.5 R を2変数関係記号とするとき，シークエント $\Rightarrow \forall x\exists y\,(R(x,y) \to R(y,x))$ は証明可能である．

証明. 以下のような証明を与えることができる:

$$\begin{array}{c} R(x,x) \Rightarrow R(x,x) \\ \hline\hline \Rightarrow (R(x,x) \to R(x,x)) \\ \hline \Rightarrow \exists y\,(R(x,y) \to R(y,x)) \quad (\exists\text{-右}) \\ \hline\hline \Rightarrow \forall x\exists y\,(R(x,y) \to R(y,x)) \end{array}$$

ここで，(∃-右) の適用は，項 t を変数記号 x からるものとして，$R(x,x) \to R(x,x)$ を $R(x,t) \to R(t,x)$ と見て行なっていることに注意する．（証明終り）

演習問題 10.6 上の証明で省略した部分を埋め，この証明での (∃-右) の用法が推論規則 (10.4) に従ったものになっていることを確かめよ．

次の補題は，次節で述べる LK の完全性の特別な場合となっている:

補題 10.7 任意の言語 $\mathcal{L}$ に対する $\mathcal{L}$-論理式 ψ が命題論理によるトートロジーのとき，シークエント $\Rightarrow \psi$ は証明可能である．

証明. ψ が命題論理のトートロジー $\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$ と $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ により， $\varphi(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$ と表されるとする．このとき，命題論理での LK の完全性 (定理 4.3) により，$\Rightarrow \varphi$ は (命題論理に対する LK で) 証明可能である．P をその証明として，P に現れる命題変数 $A_0, \ldots, A_{m-1}$ をそれぞれ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ で置き換えることで得られる P' を考えると，P' は述語論理での $\Rightarrow \psi$ の証明になっている．（証明終り）

11　$\mathsf{LK_e}$ の健全性と完全性

pred-LK-comp

本節では，(10.1) を示す．補題 10.4 により，このことは，任意の言語 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-文 φ に対し，

(11.1)　シークエント $\Rightarrow\varphi$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能 $\Leftrightarrow$ φ は恒真　LK-24

と同値である．

命題論理のときと同様に，同値のうちの “$\Rightarrow$” 方向 (LK (または $\mathsf{LK_e}$) の健全性 (soundness)) は比較的簡単に証明できる．この方向の主張は，証明を帰納法に載せやすくするために，(10.1) の形で記述することにする:

soundness-pred-L

定理 11.1 ($\mathsf{LK_e}$ の健全性定理) 任意の言語 $\mathcal{L}$ に対し，任意の $\mathcal{L}$-論理式からなるシークエント $\Gamma\Rightarrow\Delta$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能なら，$(\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma\rightarrow\bigvee\!\!\!\bigvee\Delta)$ は恒真である．

特に，シークエント $\Rightarrow\varphi$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能なら，φ は恒真である．

証明．　$\Gamma\Rightarrow\Delta$ の証明木の高さに関する帰納法で示す．証明木の高さが 1 のときは $\Gamma\Rightarrow\Delta$ は初式であるか，等号の公理のどれかであるが，この場合には，演習問題 7.5 により，$(\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma\rightarrow\bigvee\!\!\!\bigvee\Delta)$ は恒真である．

高さが n 以下の証明木で証明できるシークエントについては，主張が成り立つと仮定して，$\Gamma\Rightarrow\Delta$ が高さ $n+1$ の証明木 T を持つとする．このとき，T の最後の推論が何であるかに関する場合分けで，$(\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma\rightarrow\bigvee\!\!\!\bigvee\Delta)$ が恒真であることを証明する．ここでは，最後の推論が ($\exists$-右) の場合を見て，他の場合は読者の演習とすることにする．

最後の推論が ($\exists$-右) の場合: このときには，$\Gamma\Rightarrow\Delta$ は，$\exists x\varphi(x),\Gamma'\Rightarrow\Delta$ という形をしていて，これの高さが n の証明 T は，

$$\dfrac{\dfrac{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\varphi(y),\Gamma'\Rightarrow\Delta}}{\exists x\varphi(x),\Gamma'\Rightarrow\Delta}\ (\exists\text{-右})$$

という形をしていて，

(11.2)　変数記号 y は，$\exists x\varphi(x),\Gamma'\Rightarrow\Delta$ には自由変数としては現れない．　LK-25

$$\dfrac{\ddots\vdots\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{\varphi(y),\Gamma'\Rightarrow\Delta}$$

は高さが $n-1$ の $\varphi(y), \Gamma' \Rightarrow \Delta$ の証明だから，

(11.3)　帰納法の仮定から，$((\varphi(y) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)$ は恒真である． LK-25-0

$x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathsf{Var}$ を，$x_0, \ldots, x_{n-1}$ は y と異なり，互いにも異なり，$y, x_0, \ldots, x_{n-1}$ が $((\varphi(y) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)$ にあらわれる自由変数を並べつくしているようなものとする，このとき，(11.2) から，$x_0, \ldots, x_{n-1}$ は $\Gamma' \Rightarrow \Delta$ に現れる自由変数を並べつくしている．$\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ を $\mathcal{L}$-構造として，$a, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ とする．

$\mathfrak{A} \models ((\exists\varphi(x) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)(a_0, \ldots, a_{n-1})$ となることが示せればよい．

(11.3) から，

(11.4)　$\mathfrak{A} \models ((\varphi(y) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)(a, a_0, \ldots, a_{n-1})$ LK-26

である．

$\mathfrak{A} \models \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，補題 7.3, (2) により，$\mathfrak{A} \models ((\exists\varphi(x) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

$\mathfrak{A} \not\models \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，(11.4) と補題 7.3, (2) により，

$$\mathfrak{A} \not\models (\varphi(y) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma')(a, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

である．もし，$\mathfrak{A} \not\models \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma'(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，補題 7.3, (1) により，$\mathfrak{A} \not\models (\exists x\varphi(x) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma')(a_0, \ldots, a_{n-1})$ だから，補題 7.3, (2) により，$\mathfrak{A} \models ((\exists\varphi(x) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．一方，$\mathfrak{A} \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma'(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，(11.3) から，すべての $b \in A$ に対して $\mathfrak{A} \not\models \varphi(b, a_0, \ldots, a_{n-1})$ とならなくてはならないから，$\mathfrak{A} \not\models \exists x\varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$ がわかる．したがって，このときにも $\mathfrak{A} \models ((\exists\varphi(x) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee \Delta)(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．　**（証明終り）**

ex-1

例 11.2 上の健全性定理により，例 11.2 の論理式 $\forall x \exists y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ は恒真でなくてはならないが，そのことの，自然な意味論的な証明は，例 11.2 での形式的証明とはかなり異るものとなる:

$\mathcal{L}$ を，二変数関係記号 R を含む任意の言語として，$\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ を任意の $\mathcal{L}$-構造とする．$\mathfrak{A} \models \forall x \exists y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ が示すべきことである．このためには，

(11.5)　すべての $a \in A$ に対し，$b \in A$ で，$\mathfrak{A} \models (R(x, y) \rightarrow R(y, x))(a, b)$ が成り立つものが存在する LK-27

ことを示せばよい，$a \in A$ を任意にとる，このとき，$\mathfrak{A} \models (R(x, y) \rightarrow R(y, x))(a, a)$ である．したがって，$b = a$ が (11.5) でのようなものになっている．

上の例のように，ある論理式 φ の恒真性の意味論的に自然な証明が与えられたとき，それに対応するシークエント $\Rightarrow \varphi$ の $\mathsf{LK_e}$ での形式的証明は，存在するとしても，もとの意味論的な証明の直観を反映していないように見えるものとなっている可能性がある．更に一般には，そのような形式的な証明の存在に対する直接的な保証は，与えられていないように思える．しかし，次の定理により，恒真な論理式 φ に対し，必ずシークエント $\Rightarrow \varphi$ の $\mathsf{LK_e}$ での形式的証明が存在することが言える．

compl-thm-1

定理 11.3 (完全性定理, K. Gödel 1929 (昭和 4)[42]) 任意の言語 $\mathcal{L}$ と，任意の $\mathcal{L}$-論理式からなるシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ について，$(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ が恒真なら，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明可能である．

特に $\mathcal{L}$-論理式 φ が恒真なら，$\Rightarrow \varphi$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明可能である．

命題論理の証明の体系 LK の完全性定理の証明と同じように，上の定理の証明のためには，次の補題が示せればよい:

compl-thm-2

補題 11.4 任意の言語 $\mathcal{L}$ と任意の $\mathcal{L}$-文 φ に対し，シークエント $\Rightarrow \varphi$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でないなら，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{A} \not\models \varphi$ となるものが構成できる．

定理 11.3 の補題 11.4 からの証明: 補題 11.4 を仮定して，定理 11.3 の対偶:

> 任意の言語 $\mathcal{L}$ と，任意の $\mathcal{L}$-論理式からなるシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ について，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でなければ，$(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ は恒真でない

を示す．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でなければ，補題 10.4, (2) により，$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でない．ただし，$x_0, \ldots, x_{n-1}$ は，

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

の論理式に現れる自由変数を網羅しているものとする[43]．したがって，補題 11.4 により，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{A} \not\models \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ となるものが存在する．

---

[42] この定理の証明としては，ゲーデル (Kurt Gödel, 1906 – 1978) のオリジナルの証明の他に，ヘンキン (Leon Henkin, 1921 – 2006) による，1949(昭和 24) 年のオリジナルの証明の改良や，ここで導入した証明の体系 $\mathsf{LK_e}$ の特徴を生かしたシュッテ (Kurt Schütte, 1909 – 1998) による証明などがある．ここでスケッチを与えているのは，ヘンキンによる証明を $\mathsf{LK_e}$ での証明に翻訳したものである．

[43] したがって，特に $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ は $(\bigwedge\Gamma \rightarrow \bigvee\Delta)$ の全称閉包となっていて，$\mathcal{L}$-文である．

つまり，$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma \to \bigvee\!\!\!\bigvee\Delta)$ は (したがって $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge\Gamma \to \bigvee\!\!\!\bigvee\Delta)$ も) 恒真ではない．　（証明終り）

補題 11.4 の証明のスケッチ: $\mathcal{L}$ を言語として，φ を $\mathcal{L}$-文で，$\Rightarrow \varphi$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でないようなものとする．このとき，(補題 3.2, (2) と同様に) $\neg\varphi \Rightarrow$ は $\mathsf{LK_e}$ で証明可能でない．[この部分はまだ書きかけです．[4] で与えた対応する補題の証明を，焼き直すことでここでの証明も得られます．]

12 Cut elimination

cut-elim

[この部分はまだ書きかけです．]

13 参考文献について

the-refs

ここで考察したした体系 LK, $\mathsf{LK_e}$ は，Gerhard Gentzen による [5] で導入されたものである．以下の参考文献のうち，Ebbinghaus et al. [2] と Takeuti [6] では，ここで導入した LK や $\mathsf{LK_e}$ とほぼ同じ形式的証明の体系に基いた議論がされている．

形式的証明について本格的な議論は，LK や $\mathsf{LK_e}$ やそれに類似した体系で行なわれることが多い．Takeuti [6] は本格的な教科書で，これを全部精読して，この本以降に得られた結果の知識を多少補えば，形式的証明に関する研究での最前線での仕事が始められる，といえるほどのものである[44]．

[6] のリプリントで原本として使われているのは，異る著者による，本書の執筆以降の証明論や関連分野での研究の進展に関する言及も含まれた，いくかのサーベイが付録として付け加えられた版である．

Ebbinghaus et al. [2] はもう少し初歩的な入門書であるが，ロジックプログラミングの基礎や，リントストロームの定理など，他の教科書には載っていないいくつかの話題についてのエレガントな記述も含まれている．

ドイツ語ができるのなら，Gentzen [5] は今読んでみても価値のある論文と言えるだろう (神戸大のアカウントからはこの論文の pdf ファイルを無料でダウンロードすることができるはずである)．

---

[44] この本に限らず一般にドーバー版のリプリントは比較的廉価であるが，歴史的な文献になってしまっている (つまり，現在から見るとその後の研究の発展から無意味になってしまった内容を多く含む) 教科書も含まれているので，注意が必要である．

アメリカで標準的に使われている教科書には，Enderton [3] がある．この本でベースとしている形式的証明の体系は，Gentzen の体系とは異る (しかし，何が証明できて何ができないか，ということに関しては同値な) ヒルベルト流と形容されることもあるスタイルのものである．[4] で採用した証明の体系も [3] に準じるものになっている．

参考文献

[1] R. デデキント著，渕野 昌 訳・解説，数とは何かそして何であるべきか， ちくま学芸文庫 (2013).

[2] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas, Mathematical Logic, Springer (1994).

[3] Herbert B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press (2001).

[4] S. Fuchino, 数理論理学，2012 年春学期の講義 “数理論理学”, “数理論理学特論” のレクチャーノート．
`http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf`

[5] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Mathematische Zeitschrift. 39 (1934), 176–210, 405–431.

[6] G. Takeuti, Proof Theory (1975/1987), Dover edition (2013).