

以下の演習問題は、前回の演習問題 (2017 年 06 月 30 日 の日付のもの) がカバーしていなかった述語論理の証明の体系 LK と LK_e に関するものと健全性定理完全性定理に関するものです。期末試験では、前回の演習問題と以下の演習問題の類題が (主に) 出題される予定です。

1. (LK_e の健全性定理の証明の一部 — 帰納法による証明での帰納法の初め — 講義では省略した) $\mathcal{L}$ を言語として, $s_0, s_1, \dots, t_0, t_1, \dots$ は任意の $\mathcal{L}$ -項とし, f は $\mathcal{L}$ の任意の関数記号, r は $\mathcal{L}$ の任意の関係記号あるいは等号 $\equiv$ とし, m, n はこれらの関数記号と関係記号 (または等号) の変数の数を表しているものとする (特に r が $\equiv$ ときには, $n = 2$ である). 以下の形の論理式がすべて恒真である (i.e. すべての $\mathcal{L}$ -構造で成り立つ) ことを示せ.

- (a) $s_0 \equiv s_0$, (b) $((s_0 \equiv t_0 \wedge \dots \wedge s_{m-1} \equiv t_{m-1}) \rightarrow f(s_0, \dots, s_{m-1}) \equiv f(t_0, \dots, t_{m-1}))$
 (c) $((s_0 \equiv t_0 \wedge \dots \wedge s_{n-1} \equiv t_{n-1} \wedge r(s_0, \dots, s_{n-1})) \rightarrow r(t_0, \dots, t_{n-1}))$

2. R をある言語 $\mathcal{L}$ に含まれる二変数の関係記号とすると, $\mathcal{L}$ -論理式のシークエント $\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$ が LK_e で証明可能であることを示せ (i.e. LK_e での証明を与えよ).

3. $\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$ は LK_e で証明できないことを示せ. (ヒント: LK_e の健全性定理から, 論理式 $(\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y))$ を満たさない構造が存在することが示せばよい)

4. $\mathcal{L}$ を言語として, 任意の $\mathcal{L}$ -論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ と $\mathcal{L}$ -項 $s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1}$ に対し, シークエント

$$s_0 \equiv t_0, \dots, s_{n-1} \equiv t_{n-1}, \varphi(s_0, \dots, s_{n-1}) \Rightarrow \varphi(t_0, \dots, t_{n-1})$$

が証明可能であることを φ の構成に関する帰納法で示せ.

5. (a) 任意の $\mathcal{L}$ -論理式 $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ に対し, シークエント $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1} \Rightarrow$ が証明可能であることと, シークエント $\Rightarrow \neg \varphi_0 \vee \dots \vee \neg \varphi_{m-1}$ が証明可能であることは同値であることを示せ.

(b) $\mathcal{L}$ -論理式の有限集合 Δ が無矛盾であるとは, シークエント $\Delta \Rightarrow$ が LK_e で証明できないこととする. Δ が無矛盾なら, $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Delta$ となる $\mathcal{L}$ -構造が存在することを, LK_e の完全性定理から導け.

以上.