数理論理学　演習問題

担当:　渕野 昌　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2017 年 06 月 30 日**

以下の問題の回答を整理して A4 のレポート用紙にまとめたものを 7 月 19 日の class の始まる前に提出してください．解答は返却しないので必要ならコピーをとっておいてください．

$\boxed{\textbf{1.}}$ 次を ($\models\!\!\dashv$ の定義に則して) 示せ:

(a) $(A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2)) \models\!\!\dashv ((A_0 \wedge A_1) \rightarrow A_2)$,

(b) $((A_0 \rightarrow A_1) \rightarrow A_2) \not\models\!\!\dashv (A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ (a) 命題論理の論理式 φ, ψ に対し，$(\varphi \downarrow \psi)$ を $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ のこととして導入する．すべての命題論理の論理式 η に対し，命題記号と $\downarrow$ のみを用いて組み立てられた論理式 η' で $\eta \models\!\!\dashv \eta'$ となるものが存在することを示せ．

(b) ブール関数 $f_\downarrow : \mathbb{2}^2 \rightarrow \mathbb{2}$ を $f_\downarrow(0,0) = 1$, $f_\downarrow(0,1) = 1$, $f_\downarrow(1,0) = 1$, $f_\downarrow(1,1) = 0$ により定義する．すべてのブール関数は，$f_\downarrow$ の (繰り返しの) 合成によって得られる関数として表わせることを示せ．

$\boxed{\textbf{3.}}$ 次の $\vdots$ を補って，上のシークエントから下のシークエントを導く LK での証明を作成せよ (証明は，初式から始まる他の枝を持つものになってもよい):

(a)
$$\dfrac{\Rightarrow (\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\neg\xi \vee \eta))}{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\xi, \eta}}$$

(b)
$$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow}{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow \varphi}}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ 述語論理の論理式 $\varphi = \varphi(x, x_1, ..., x_n)$ と変数記号 x に対し，$\forall x\varphi$ を $\neg\exists x\neg\varphi$ の略記と思うことにするのだった．任意の (φ に現れる非論理記号をすべて含む言語 $\mathcal{L}$ に対する) $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi(a_1, ..., a_1) \;\Leftrightarrow\; \text{すべての } a \in A \text{ に対し，} \mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, ..., a_1)$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\textbf{5.}}$ $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ とする．ここに 0, 1 は定数記号，$+$, $\cdot$ は二変数の関数記号で，$<$ は二変数の関係記号とする．数学の慣習に倣って，$+(t_0, t_1)$, $\cdot(t_0, t_1)$, $<(t_0, t_1)$ をそれぞれ $t_0 + t_1$, $t_0 \cdot t_1$, $t_0 < t_1$ と略記することにする．

$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$, $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, , +, \cdot, < \rangle$, $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ を考える．ただし，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ はそれぞれ自然数の全体 (0 を含む)，有理数の全体，実数の全体として，0, 1, $+$, $\cdot$, $<$ はこれらの数の領域での通常の 0, 1, 加法，乗法，大小関係として，これらが，それぞれ言語 $\mathcal{L}$ の記号としての 0, 1, $+$, $\cdot$, $<$ の解釈となっているものとする．

$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0, ..., \varphi_5$ をそれぞれ，$\forall x \exists u \exists v(\neg u \equiv 1 \wedge \neg v \equiv 1 \wedge x \equiv u \cdot v)$, $\forall x \exists y(x \cdot y < 0)$, $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$, $\exists x\; x \cdot x \equiv 1 + 1$, $\forall x \forall y\,(x < y \leftrightarrow \exists z\; y \equiv x + z)$, $(\exists x\; (0 < x \wedge x < 1) \rightarrow \forall x \exists y\; y \cdot y \equiv x)$ とする (最後のものはパズル的な「ひっかけ」を含んでいることを注意しておく)．

(a) $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ を $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ のうちの 1 つとして，$i < 6$ に対し，主張 $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ の (数学的な) 意味が何になるかを説明せよ．(たとえば，φ を $\forall x \forall y\; x < y$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ は「すべての $a, b \in A$ に対し $a < b$ となる」という主張を表している (もちろんこの主張は $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ のどれでも成り立たない (たとえば，$a = 2$, $b = 1$ としてみよ))．

(b) 各 $i < 6$ に対し，φ_i が $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ のどれで成り立ち，どれで成り立たないかを確かめ，それがなぜかを説明せよ．

以上．