数理論理学特論 2016 年 first quarter レポート課題

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

以下の課題のうちの複数を解いて (小問が全部解けていなくてもよい) 回答をレポートにまとめて A4 のレポート用紙に書いたもの (手書きでもよい) を，6 月 20 日 (月) 17:00 までに提出 (私に直接手渡すか私の office のドアのところに設置する提出用の簡易ポストに投函) してください．1 問でもある程度以上妥当な解答があれば，合格点を出しますが，高い評価が欲しい人は 4 問以上の問題に納得のゆく内容の 解答を与えてください．

0. ZFC の公理系を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として書き出し，各公理の意味を説明してください．

1. Z で ω 上に加法，乗法を導入して初等数論が展開できることを示してください (たとえば，可換性 $a+b=b+a$, $ab=ba$ 分配律 $a(b+c)=ab+ac$ などが成り立つことを証明してください).

2. (a) 任意の集合 X に対し ${}^{\emptyset}X$ $(=\{f\ :\ f:\emptyset\rightarrow X\})$ は $\emptyset$ のみを要素として持つ singleton になることを示してください．

(b) 任意の集合 X に対し，${}^{X}\emptyset$ は $\emptyset$ になることを示してください．

3. (a) $\bigcup\emptyset=\emptyset$ となることを示してください．

(b) 任意の 0 でない $\alpha\in\mathsf{On}$ に対し，$\bigcup\alpha=\alpha$ となることと，α が極限順序数 ($\alpha=\beta+1$ となるような順序数 β の存在しないような 0 でない順序数) であることが同値になることを示してください．

(c) $\alpha\in\mathsf{On}$ に対して $\bigcup V(\alpha+1)$ が何になるかを調べてください．

4. 任意の集合 x, y に対し，集合 y' で，(1) y から y' への 1-1 onto 写像が存在する; (2) $x\cap y'=\emptyset$ となる，を満たすものが存在することを示してください．

5. 任意の $\alpha\in\mathsf{On}$ に対し，$\beta\in\mathsf{On}$ で，α から β への onto 写像の存在しないものがあることを $\mathsf{ZF}-\mathsf{AF}$ で示してください．

順序数 α は $\beta<\alpha$ で，β から α への onto 写像が存在するようなものがないとき，基数 (cardinal) であると言う．$\mathsf{Card}=\{\alpha\in\mathsf{On}\ :\ \alpha\text{ は基数 }\}$ とする．

6. (a) すべての自然数は基数であることを示してください．(b) ω は基数であることを示してください．(c) 5. を用いて，すべての基数 κ について，その基数より真に大きな基数のうち最小のものが存在することを示してください (このような基数を κ^+ と表す). (d) Card が真のクラスとなることを示してください (ヒント On と Card の間に順序同型があることを示せばよい). (e) On から $\mathsf{Card}\setminus$ への順序同型 $\aleph:\mathsf{On}\rightarrow\mathsf{Card}$ があること示してください ($\aleph(\alpha)$ は通常 $\aleph_\alpha$ と表される．$\aleph_\alpha$ が順序数であることを強調したいときには，これを ω_α とも表わす).

7. (ZFC で) すべての集合 X 上に整列順序が存在することを示してください．また，そのような整列順序のうち，順序型が Card の要素になるものがあることを示してください．

Card の要素となっている順序型を持つ X 上の整列順序 R に対して $otp(X,R)$ を X の濃度 (cardinality) と呼び，$|\,X\,|$ と表す．

8. V と V' を $\mathbb{R}$ 上の線形代数として B と B' をそれぞれ V と V' の規定とする．$|\,B\,| = |\,B'\,|$ なら V と V' は (線型空間として) 同型になることを示してください．

9. (a) V を体 K 上の線形代数として，(集合としての) V 上に整列順序が存在するとき，V は K 上の基底を持つことを示せ (これは ZF で示せるが，少し頑張ると Z で既に示せる)． (b) (6. と (a) を用いて) ZFC ですべての体 K と K 上の線型空間 V に対し，V の K 上の基底が存在することを示せ．

10. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が加法的であるとは，すべての $a,\, b \in \mathbb{R}$ に対し，$f(a+b) = f(a) + f(b)$ が成り立つことである．(a) (Z) f が加法的で連続なら，ある実数 c に対し，$f(x) = cx$ となることを示せ (ヒント: $c = f(1)$ して，$f(a) = ca$ がすべての有理数について成り立つことを示す)．(b) (ZFC ただし少し複雑になるが，ZC でも証明できる) $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の線型空間とみることができるが，$\mathbb{R}$ の基底 H で $1 \in H$ となるものが存在することを示せ．(c) (ZFC, ただし， (b) が ZC で証明できることを前提とすると ZC で示せる) (b) での H を用いて，$\mathbb{R}$ 上の加法的関数 f で，どの $c \in \mathbb{R}$ に対しても $f(x) = cx$ とならないものが存在することを示せ ((a) によりこのような f は連続ではありえない)．

11. (a) Card は真のクラスとなることを示してください．

(b) $|\mathbb{R}|$ を $\mathfrak{c}$ と書くことにすると $c > \omega$ となること示してください．

集合 A に対し，$\prod A = \{f \,:\, f$ は関数で$, \mathrm{dom}(f) = A,$ すべての $a \in A$ に対し $f(a) \in a\}$ とする．

12. (a) $\emptyset \in A$ なら， $\prod A = \emptyset$ となることを示せ．(b) (ZC) $\emptyset \notin A$ なら， $\prod A \neq \emptyset$ となることを示してください．

(b) A を空でない集合として，A の各要素 a 上に a 上の二項演算 $+_a$ が定まっていて $\langle a, +_a \rangle$ はアーベル群になるとする．このとき，$\prod A$ 上に演算 $+_A$ と $f +_A g = (f+g)$ として定義する．ただし，(f+g) は，$a \in A$ に対し $f(a) +_a g(a)$ を返す関数とする．このとき $\langle A, +_A \rangle$ はアーベル群になることを示してください．

(c) (Z) (b) でのような A に対し，$\prod A \neq \emptyset$ となることを示してください．12.(b) でとは異なり，ここでは選択公理が必要でないのはなぜかを説明してください．

13. $\langle X, \sqsubset_X \rangle$ と $\langle Y, \sqsubset_Y \rangle$ を整列順序とするとき，$X \times Y$ 上の二項関係 $\sqsubset_{X \times Y}$ を，

$\langle x, y \rangle \sqsubset_{X \times Y} \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow x \sqsubset_X x'$ または，$x = x'$ で $y \sqsubset_Y y'$

により定義すると，$\sqsubset_{X \times Y}$ は $X \times Y$ 上の整列順序となることを示してください ($\sqsubset_{X \times Y}$ は $X \times Y$ 上の辞書式順序 (lexicographical ordering) とよばれる)．

14. 集合 x に対し，$T(x) = \{y \,:\, x \in y,\, y$ は推移的$\}$ とすると， $T(x) \neq \emptyset$ となることを示してください．

$trcl(x) = \bigcap T(x)$ を x の推移的閉包 (transitive closure) とよぶ．$trcl(x)$ が有限集合

となるとき，x は遺伝的に有限である (hereditarily finite) という．

15. $V(\omega)$ が 遺伝的に有限な集合の全体と一致することを示してください (ヒント: 16. のヒントを参照).

$trcl(x)$ が可算のとき (つまり ω と 1-1 onto に対応づけることができるとき) x は遺伝的に可算である (hereditarily countable) という．

16. 遺伝的に可算な集合の全体は集合になることを示してください (ヒント: すべての遺伝的に可算な集合は $V(\omega_1)$ に含まれることを示せば十分である．このために $\{rank(z) : z \in trcl(x)\}$ が On の始片であることを示す).