構造の数理

II. 演算の体系と代数的構造（その 2）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/˜fuchino/

(October 14, 2010 (14:48 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

October 14, 2010

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

復習：群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．
- 集合（しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ．（単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する．（逆元の存在）

復習：群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．
- 集合 （しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

> ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという：
>
> (g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）
>
> (g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． （単位元の存在）
>
> (g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する． （逆元の存在）

復習：群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．
- 集合 （しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという：

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ　　（結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ．　　（単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する．　　（逆元の存在）

復習：群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．
- 集合（しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという：

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． （単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する． （逆元の存在）

復習: 群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．
- 集合 （しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． （単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する． （逆元の存在）

復習: 群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．

- 集合 （しゅうごう， set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき， G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． （単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する． （逆元の存在）

復習: 群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．

- 集合 （しゅうごう， set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと． たとえば， 実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが， これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき， G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって， どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． （単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき， どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する． （逆元の存在）

復習: 群の定義

- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．

- 集合 （しゅうごう， set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと． たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが， これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき， G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ （結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ. （単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる G の要素 y が存在する. （逆元の存在）

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

> $(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．
>
> (g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
> (可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

> $(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．
>
> (g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
> (可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習：群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

$(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．

(g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．(可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある.
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）.
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）.

> $(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という.
>
> (g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ.
>
> (可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している.

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して “G が群である”，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

$(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．

(g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
(可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習：群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

$(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．

(g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
(可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

> $(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．
>
> (g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
> (可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

復習: 群の定義 (2)

- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "G が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような G の要素 E を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で x が G の要素のとき，(g3) を満たすような G の要素 y を x の 逆元 とよぶ．実は，与えられた G の要素 x に対して x の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

$(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．

(g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．(可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

アーベル

アーベル (Niels Henrik Abel 1802(享和 2 年) - 1829(文政 12 年))
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Abel.html
http://ja.wikipedia.org/wiki/ニールス・アーベル

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習: 群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習：群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

復習: 群の例

- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- G を $\mathbb{R}$ から 0 を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を G として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（0 より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- G を 0 だけからなる集合 $\{0\}$ とする．G 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

群論の歴史

- 「群」を研究する数学の研究分野は現在では群論 (group theory) とよばれている.

- 群の概念が最初に用いられたのは，前出の アーベル や ガロアによる（5 次以上の）方程式の解の研究においてだった.

群論の歴史

- 「群」を研究する数学の研究分野は現在では群論 (group theory) とよばれている．
- 群の概念が最初に用いられたのは，前出の アーベル や ガロアによる（5 次以上の）方程式の解の研究においてだった．

群論の歴史

- 「群」を研究する数学の研究分野は現在では
群論 (group theory) とよばれている.

- 群の概念が最初に用いられたのは, 前出の アーベル や
ガロアによる（5 次以上の）方程式の解の研究においてだった.

群論の歴史

- 「群」を研究する数学の研究分野は現在では群論 (group theory) とよばれている.
- 群の概念が最初に用いられたのは, 前出の アーベル や ガロアによる（5 次以上の）方程式の解の研究においてだった.

E. ガロア (Evariste Galois 1811（文化 8 年）– 1832（天保 3 年）フランス)

群の歴史 (2)

- 1920 年代，ドイツのゲッチンゲン (Göttingen) 大学での E. ネーター を中心とする数学者たちによって，群を含む 代数学 の諸概念が，この講義でのようなスタイルで整理された．

群の歴史 (2)

- 1920 年代，ドイツのゲッチンゲン (Göttingen) 大学での E. ネーター を中心とする数学者たちによって，群を含む 代数学 の諸概念が，この講義でのようなスタイルで整理された．

群の歴史 (2)

- 1920 年代，ドイツのゲッチンゲン (Göttingen) 大学での E. ネーター を中心とする数学者たちによって，群を含む 代数学 の諸概念が，この講義でのようなスタイルで整理された．

E. ネーター (Emmy Amalie Noether 1882（明治 15 年）– 1935（昭和 10 年）ドイツ-アメリカ)

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で "a は X の要素（のひとつ）である" をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element（要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理）(g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で "a は X の要素（のひとつ）である" をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element（要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理）(g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で “a は X の要素（のひとつ）である” をあらわす． $\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element （要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理） (g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で "a は X の要素（のひとつ）である" をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element （要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理） (g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で "a は X の要素（のひとつ）である" をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element（要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理）(g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質

- X が集合のとき $a \in X$ で "a は X の要素（のひとつ）である" をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element （要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理） (g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明. (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
E_0, $E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$\underset{\uparrow\ (\mathrm{g2})_1}{E_0 = E_0 \circ E_1} \underset{\uparrow\ (\mathrm{g2})_0}{= E_1}$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明． (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

$(g2)_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

$(g2)_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$\underset{\uparrow\,(g2)_1}{E_0 =} E_0 \circ E_1 \underset{\uparrow\,(g2)_0}{=} E_1$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G,\circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G,\circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x\in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G,\circ)$ の単位元とする．任意の $x\in G$ に対し，$y\in G$ が $x\circ y=E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明． (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1\in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x\in G$ に対し $x\circ E_0=E_0\circ x=x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x\in G$ に対し $x\circ E_1=E_1\circ x=x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$E_0 \underset{\uparrow\,(\mathrm{g2})_1}{=} E_0\circ E_1 \underset{\uparrow\,(\mathrm{g2})_0}{=} E_1$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明． (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$E_0 \underset{\uparrow\,(g2)_1}{=} E_0 \circ E_1 \underset{\uparrow\,(g2)_0}{=} E_1$$

（証明終り）

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明. (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．

E_0, $E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$E_0 = E_0 \circ E_1 = E_1$$
$$\uparrow (g2)_1 \qquad \uparrow (g2)_0$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明． (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$\underset{\uparrow\ (\mathrm{g2})_1}{E_0 = E_0 \circ E_1} \underset{\uparrow\ (\mathrm{g2})_0}{=} E_1$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明．　(1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$　すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$　すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$E_0 \underset{\uparrow\,(g2)_1}{=} E_0 \circ E_1 \underset{\uparrow\,(g2)_0}{=} E_1$$

(証明終り)

群の性質 (2)

定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，x の逆元は一意に決まる．

(3) E を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，y は x の逆元である．

証明． (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら E_0 と E_1 が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$\underset{\uparrow\,(\mathrm{g2})_1}{E_0 = E_0} \circ \underset{\uparrow\,(\mathrm{g2})_0}{E_1 = E_1}$$

(証明終り)

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

に順次リンクします．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

に順次リンクします.