構造の数理

III. 演算の体系と代数的構造（その 3）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(October 21, 2010 (08:20 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

October 21, 2010

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

写像 — 写像の定義

- X と Y を集合とするとき, φ が X から Y への 写像 (mapping) であるとは, φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる "規則" を与えていることである.
- $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く.
- φ が X から Y での写像であることを, $\varphi : X \to Y$ であらわす.

写像 — 写像の定義

- X と Y を集合とするとき，φ が X から Y への 写像 (mapping) であるとは，φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる “規則” を与えていることである．
- $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く．
- φ が X から Y での写像であることを，$\varphi : X \to Y$ であらわす．

写像 — 写像の定義

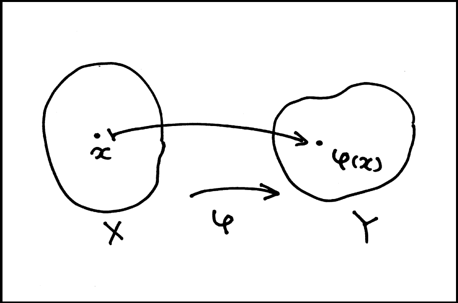
- X と Y を集合とするとき，φ が X から Y への 写像 (mapping) であるとは，φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる “規則” を与えていることである．
- $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く．
- φ が X から Y での写像であることを，$\varphi : X \to Y$ であらわす．

写像 — 写像の定義

- X と Y を集合とするとき，φ が X から Y への 写像 (mapping) であるとは，φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる “規則” を与えていることである．
- $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く．
- φ が X から Y での写像であることを，$\varphi : X \to Y$ であらわす．

写像 — 写像の定義

- X と Y を集合とするとき，φ が X から Y への 写像 (mapping) であるとは，φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる “規則” を与えていることである．
- $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く．
- φ が X から Y での写像であることを，$\varphi : X \to Y$ であらわす．



写像 (2) — 単射，全射，全単射

- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは，$x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (2) — 単射，全射，全単射

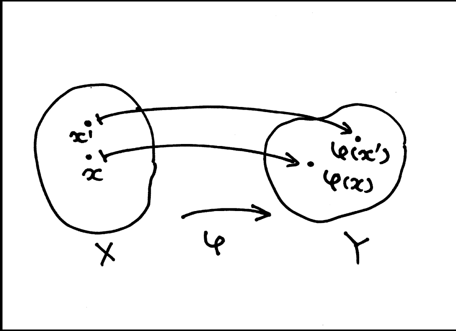
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは，$x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (2) — 単射，全射，全単射

- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは，$x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (2) — 単射，全射，全単射

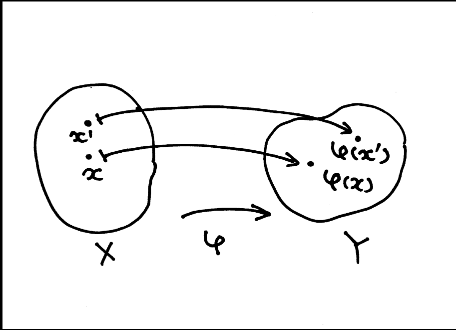
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは，$x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．



- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (2) — 単射，全射，全単射

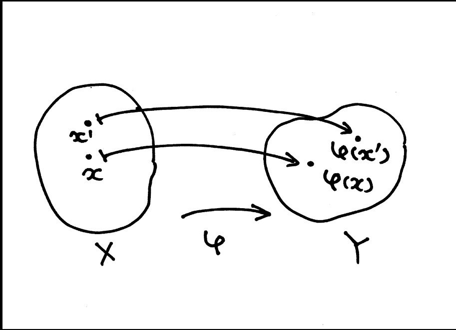
- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは，$x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．



- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (2) — 単射，全射，全単射

- $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は 関数 とよばれることもある．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 単射 であるとは， $x, x' \in X$ で $x \neq x'$ なら必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと．



- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全射 であるとは，すべての $y \in Y$ に対し，$\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること．
- 写像 $\varphi : X \to Y$ が 全単射 であるとは φ が全射かつ単射であること．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

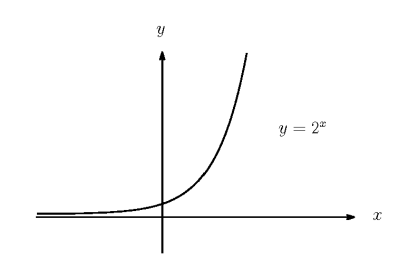
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．

写像 (3) – 写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると，φ は全射でも単射でもない．
- 上と同じ写像を，$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1];\ x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと，φ は全射だが単射ではない．
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x$ とすると，φ は全単射である．
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である．



群の同型

- $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ を群とする．全単射 $\varphi : G \to H$ が，すべての x, $y \in G$ に対し，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき，φ は群 G から群 H への同型写像 (isomorphism) である，という．G から H への同型写像が存在するとき，G と H は同型 (isomorphic) であるという．
- φ が G から H の同型写像なら，φ は G の単位元を H の単位元に移し，G での逆元を H での逆元に移す．
- G から H の同型写像は，上に述べたことから，G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって，G と H が同型のときには，G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

群の同型

- $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ を群とする．全単射 $\varphi : G \to H$ が，すべての x, $y \in G$ に対し，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき，φ は群 G から群 H への 同型写像 (isomorphism) である，という．G から H への同型写像が存在するとき，G と H は 同型 (isomorphic) であるという．

- φ が G から H の同型写像なら，φ は G の単位元を H の単位元に移し，G での逆元を H での逆元に移す．

- G から H の同型写像は，上に述べたことから，G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって，G と H が同型のときには，G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

群の同型

- $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ を群とする．全単射 $\varphi : G \to H$ が，すべての x, $y \in G$ に対し，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき，φ は群 G から群 H への 同型写像 (isomorphism) である，という．G から H への同型写像が存在するとき，G と H は 同型 (isomorphic) であるという．

- φ が G から H の同型写像なら，φ は G の単位元を H の単位元に移し，G での逆元を H での逆元に移す．

- G から H の同型写像は，上に述べたことから，G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって，G と H が同型のときには，G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

群の同型

- $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ を群とする．全単射 $\varphi : G \to H$ が，すべての x, $y \in G$ に対し，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき，φ は群 G から群 H への同型写像 (isomorphism) である，という．G から H への同型写像が存在するとき，G と H は同型 (isomorphic) であるという．
- φ が G から H の同型写像なら，φ は G の単位元を H の単位元に移し，G での逆元を H での逆元に移す．
- G から H の同型写像は，上に述べたことから，G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって，G と H が同型のときには，G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

群の同型

- $(G, \circ)$, $(H, \bullet)$ を群とする．全単射 $\varphi : G \to H$ が，すべての x, $y \in G$ に対し，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき，φ は群 G から群 H への 同型写像 (isomorphism) である，という．G から H への同型写像が存在するとき，G と H は 同型 (isomorphic) であるという．

- φ が G から H の同型写像なら，φ は G の単位元を H の単位元に移し，G での逆元を H での逆元に移す．

- G から H の同型写像は，上に述べたことから，G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって，G と H が同型のときには，G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

同型写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ ; x \mapsto 2^x$ を考える．

φ は全単射だった．任意の実数 x, y に対し，

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

が成り立つ．

したがって，φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^+, \times)$ への同型写像になっていることがわかる．

同型写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ ;\ x \mapsto 2^x$ を考える.

φ は全単射だった．任意の実数 x, y に対し,

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

が成り立つ.

したがって，φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^+, \times)$ への同型写像になっていることがわかる.

同型写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ を考える.

φ は全単射だった. 任意の実数 x, y に対し,

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

が成り立つ.

したがって, φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^+, \times)$ への同型写像になっていることがわかる.

同型写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; x \mapsto 2^x$ を考える．

φ は全単射だった．任意の実数 x, y に対し，

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

が成り立つ．

したがって，φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^+, \times)$ への同型写像になっていることがわかる．

同型写像の例

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+;\ x \mapsto 2^x$ を考える.

φ は全単射だった．任意の実数 x, y に対し,

$$\varphi(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

が成り立つ.

したがって，φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^+, \times)$ への同型写像になっていることがわかる.

回転群はアーベル群でない

- 群 $(G, \circ)$ がアーベル群 $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in G$ に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- 群 $(G, \circ)$ はアーベル群でない $\Leftrightarrow$

回転群はアーベル群でない

- 群 $(G, \circ)$ がアーベル群 $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in G$ に対し, $x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- 群 $(G, \circ)$ はアーベル群でない $\Leftrightarrow$

回転群はアーベル群でない

- 群 $(G, \circ)$ がアーベル群 $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in G$ に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- 群 $(G, \circ)$ はアーベル群でない $\Leftrightarrow$

回転群はアーベル群でない

- 群 $(G, \circ)$ がアーベル群 $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in G$ に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- 群 $(G, \circ)$ はアーベル群でない $\Leftrightarrow$

回転群はアーベル群でない

- 群 $(G, \circ)$ がアーベル群 $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in G$ に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- 群 $(G, \circ)$ はアーベル群でない $\Leftrightarrow$ $x, y \in G$ で $x \circ y \neq y \circ x$ となるものが存在する

回転群はアーベル群でない

- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする． G の要素 x, y に対し， $x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．

このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない．

回転群はアーベル群でない

- G を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする． G の要素 x, y に対し， $x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．
このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない．

回転群はアーベル群でない

- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．

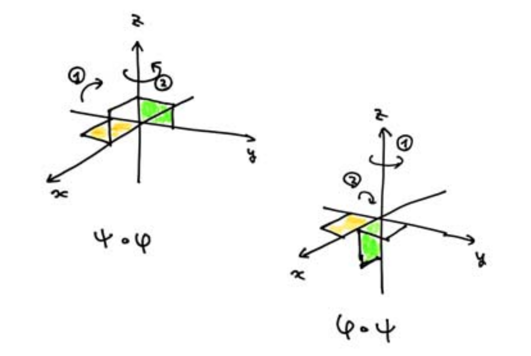
このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない．

回転群はアーベル群でない

- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．G の要素 x, y に対し，$x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．
このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない．

回転群はアーベル群でない

- G を３次元空間の原点を中心とした回転の全体とする． G の要素 x, y に対し， $x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．
このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない．



¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

に順次リンクします．

来週，10月28日（木）の講義は 休講 とします

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

に順次リンクします.

来週，10 月 28 日（木） の講義は 休講 とします