

# 構造の数理

## V. 「同一視」の数学的な基礎

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(November 24, 2010 (17:34 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

November 11, 2010

This presentation is typeset by p<sup>L</sup>A<sub>T</sub>E<sub>X</sub> with beamer class.

▶ 数学では、(必ずしも同じものでない) 2つの数学的対象を、同一視する、ということを頻繁に行う。

▷ 例: 群の同型

群  $G$  から群  $H$  への同型写像が存在するとき、 $G$  と  $H$  は同型 (*isomorphic*) であるという。

$G$  と  $H$  が同型のときには、 $G$  と  $H$  は互いのコピーになっていると考えることができ、群として同一視できる。

▶ 以下で、「同一視する」ことの数学的な基礎について考察する。

▶ まず、「同一視できること」の1つの究極的な状況としての、「等しいこと」(同値性) について見てみることにする。

- ▶ 対象の間の「同等性」(2つの対象が等しいこと)は基本的な関係として、数学だけでなく、人間のあらゆる知的活動で基本的な関係として用いられる。
- ▶ 数学では、2つの数学的対象  $a$ ,  $b$  が等しいことを、通常  $a = b$  であらわす。
- ▶ たとえば  $a + b$  が  $a$  と  $b$  を足し算した結果、という数学的対象をあらわすのに対し、 $a = b$  は「 $a$  と  $b$  は等しい」という文(主張/命題)の略記になっていることに注意する。
- ▶ 同等性の基本性質として次の3つの性質が考えられる

- ▷ すべての数学的対象  $a$  に対し、 $a = a$  である。つまり  $a$  は自分自身と等しい。
- ▷ すべての数学的対象  $a$ ,  $b$  に対し、 $a = b$  なら  $b = a$  である。
- ▷ すべての数学的対象  $a$ ,  $b$ ,  $c$  に対し、 $a = b$ , かつ  $b = c$  なら  $a = c$  である。

- ▶ すべての数学的対象  $a$ , に対し,  $a = a$  である. つまり  $a$  は自分自身と等しい.
- ▶ すべての数学的対象  $a, b$  に対し,  $a = b$  なら  $b = a$  である.
- ▶ すべての数学的対象  $a, b, c$  に対し,  $a = b$ , かつ  $b = c$  なら  $a = c$  である.

▶ 上の基本性質は, 実は非常に頻繁に用いられている. たとえば, 2 回目の講義で  $E_0 = E_0 \circ E_1 = E_1$  (つまり  $E_0 = E_0 \circ E_1$  かつ  $E_0 \circ E_1 = E_1$ ) から  $E_0 = E_1$  を結論したところでは, 最後の性質が使われている.

▶ 等しいものは区別ができない. このことは数学的には次のように表現できる:

数学的対象  $a, b$  対し,  $a = b$  なら, すべての数学的性質  $\varphi$  について,  $a$  が  $\varphi$  を満たす  $\Leftrightarrow b$  が  $\varphi$  を満たす が成り立つ.

▶ 必ずしも等しくない数学的対象を，ある観点から同じものとみなすことで新しい見方ができることが少なくない．このような同一視が数学的にうまく機能するためには，この「ある観点」が“同値関係”とよばれるものになっている必要がある．

▶  $X$  をある集合として  $\sim$  を  $X$  の2つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり， $a, b \in X$  をとったとき  $a \sim b$  であるか， $a \sim b$  でない（これを  $a \not\sim b$  とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．

▷  $X$  上の二項関係  $\sim$  が  $X$  上の同値関係である，とは以下の3つの性質が成り立つことである：

- ▷ すべての  $a \in X$ , に対し， $a \sim a$  である．
- ▷ すべての  $a, b \in X$  に対し， $a \sim b$  なら  $b \sim a$  である．
- ▷ すべての  $a, b, c \in X$  に対し， $a \sim b$ , かつ  $b \sim c$  なら  $a \sim c$  である．

▶ 集合  $X$  上の二項関係  $\sim$  が同値関係であることを規定する 3 つの性質には, それぞれ次のような名称で呼ばれる:

▶ すべての  $a \in X$ , に対し,  $a \sim a$  である. (反射律)

▶ すべての  $a, b \in X$  に対し,  $a \sim b$  なら  $b \sim a$  である. (対称律)

▶ すべての  $a, b, c \in X$  に対し,  $a \sim b$ , かつ  $b \sim c$  なら  $a \sim c$  である. (推移律)

▶ 上の名称を用いると,

集合  $X$  上の二項関係  $\sim$  が同値関係である, とは,  $\sim$  が, 反射律, 対称律, 推移律 を満たすことである

と言うこともできる.

▶ 任意の集合  $X$  に対して  $X$  上の二項関係  $=$  を考えると、これは同値関係である（演習：“ $=$ ”の基本性質は二項関係を規定する性質と同一である！）。

▶ 自然数 (natural numbers) の全体  $\mathbb{N}$  を考える。

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  である。 $k$  を  $0$  でない自然数として、自然数上の二項関係  $\sim$  を、

$$m \sim n \Leftrightarrow$$

“ $m$  を  $k$  で割った余り”  $=$  “ $n$  を  $k$  で割った余り”

で定義する。この二項関係  $\sim$  は  $\mathbb{N}$  上の同値関係である（演習）。

▷ 上の関係  $m \sim n$  は  $m \equiv n \pmod{k}$  と表わされることが多い。

▷ 奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係は  $m \equiv n \pmod{2}$  である。

▶ （数学の外での例） $X$  を世界中の人の全体として、 $x \sim y$  を「 $x$  は  $y$  と友達だと思っている」という関係とする。この  $\sim$  は同値関係ではない。

▶ (数学の外での例)  $X$  を世界中の人の全体として,  $x \sim y$  を「 $x$  は  $y$  と友達だと思っている」という関係とする. この  $\sim$  は同値関係ではない.

▷  $x \in X$  に対し,  $x \sim x$  とは限らない ( $\sim$  は反射律を (必ずしも) 満たさない)

▷  $x, y \in X$  に対し,  $x \sim y$  だとしても  $y \sim x$  とは限らない ( $\sim$  は対称律を (必ずしも) 満たさない)

▷  $x, y, z \in X$  に対し,  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  としても  $x \sim z$  とは限らない ( $\sim$  は推移律を (必ずしも) 満たさない)

▶  $x \sim y$  を「 $x$  と  $y$  は等しいか, または  $x$  と  $y$  は友達である」とすれば,  $\sim$  は同値関係を規定する性質のうち反射律と対称律は成り立つが, 推移律は (必ずしも) 成り立たない.



▶  $x \sim y$  を「 $x$  と  $y$  は等しいか，または  $x$  と  $y$  は友達である」とすれば， $\sim$  は同値関係を規定する性質のうち反射律と対称律は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．

▶  $x \sim y$  を「 $x$  と  $y$  は等しいか，または  $x$  と  $y$  は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか ... 」とすると， $\sim$  は同値関係となる．世界中のほとんどの人は互いに，この  $\sim$  関係にある，のではないかと考えられている．さらに，間に 6 人以内の友達をはさむと，ほとんどの人が互いにつながる，と主張されることもある（スモールワールド現象）

▶ 数学者の間の同値関係として，**共著者の共著者の ... の共著者** という関係を考えて（共著論文を書かない数学者を除くと）殆どの数学者どうしがこの同値関係でつながる．特に（Paul Erdős (1913 – 1996) と何人の共著者を仲介してつながっているか（そのような人数の最小数）は Erdős 数とよばれている．（ちゃんとした研究をしていて共著論文を書いたことのある）数学者の殆どが有限の Erdős 数数を持っている．

配付した reaction paper に，以下の少なくとも一項目について書いてください．

- ▶ これまでの講義内容，講義形態などに関する感想，批判，等
- ▶ これからの講義内容に関する要望
- ▶ 数学に関連した感想など
- ▶ 自分が興味を持っていることについて