構造の数理

VIII. 「順序の理論」の数学的な基礎（その 2）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(December 8, 2010 (15:08 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

December 2, 2010

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

半順序と順序

- X を集合とするとき X 上の二項関係 R が **半順序** であるとは, R が次の性質を満たすことである.

> ▷ すべての $a \in X$ に対し, $a\,R\,a$ (**反射律**)
>
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し, $a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (**反対称律**)
>
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し, $a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら, $a\,R\,c$ が成り立つ (**推移律**)

- X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき, R は **線形順序** であるという:

> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し, $a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (**比較可能性**)

二項関係の拡張と制限

▶ X, X' を集合として，$X \subseteq X'$ とする 記号の復習 （$X = X'$ の場合も考える）．
R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするとき，

▷R' が R の 拡張 であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，
$x \mathrel{R} y \;\Rightarrow\; x \mathrel{R'} y$ が成り立つこととする．

▷R が R' の X への 制限 であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x \mathrel{R} y \;\Leftrightarrow\; x \mathrel{R'} y$ が成り立つこととする． 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を
$X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する．同様に，
$X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする 例

▶ X 上の二項関係 R は，X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x \mathrel{R} y\}$ と同一視することができる．この同一視により，

▷R' は R の拡張である $\Leftrightarrow$ $R \subseteq R'$.

▷R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow$ R は R' と X^2 の共通部分である （$R = R' \cap X^2$）．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す．
以下の補題を用いる． 用語の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 用語の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leqq$ を考えると $\leqq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする．

¡Gracias por su atención!

部分集合（復習）

▶ X と Y を集合とするとき，$X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす．つまり，$X \subseteq Y$ は，

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは，すべての x に対して，$x \in X \Rightarrow x \in Y$）が成り立つことである．

▷$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である．$\subseteq$ は推移律を満たす．したがって，上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
  $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．

- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n \; R \; m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

デカルト積の例

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． ◂ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた． □

（数学的）帰納法

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

> $\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする． m_0 をある自然数とするとき,「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す
>
> ▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．
>
> ▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k)$ ）が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k+1)$ ）が成り立つ．

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction)，▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる．

▶ 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という．mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

用語の解説

- 定理を証明するときに必要となる技術的な主張で，定理ほどは独立していないもののことを 補題 (lemma) とよぶ.

- X を集合として R を X 上の半順序とするとき，$x \in X$ が X の R に関する極小元である，とは，すべての x と異なる $y \in X$ に対し，$y \not R x$ が成り立つことである.