構造の数理

IX. 「順序の理論」の数学的な基礎（その 3）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(December 15, 2010 (23:55 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

December 9, 2010

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

半順序と順序 — 前回までの復習

- X を集合とするとき X 上の二項関係 R が **半順序** であるとは, R が次の性質を満たすことである.

> ▷ すべての $a \in X$ に対し, $a \, R \, a$ (反射律)
>
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し, $a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
>
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し, $a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら, $a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)

- X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき, R は **線形順序** であるという:

> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し, $a \, R \, b$ または $b \, R \, a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

二項関係の拡張と制限 — 前回の復習

▶ X, X' を集合として，$X \subseteq X'$ とする ◂ 記号の復習 （$X = X'$ の場合も考える）．
R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするとき，

▷ R' が R の **拡張** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x\,R\,y \;\Rightarrow\; x\,R'\,y$ が成り立つこととする．

▷ R が R' の X への **制限** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x\,R\,y \;\Leftrightarrow\; x\,R'\,y$ が成り立つこととする． ◂ 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する．同様に，$X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◂ 例

▶ X 上の二項関係 R は，X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x\,R\,y\}$ と同一視することができる．この同一視により，

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow$ $R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow$ R は R' と X^2 の共通部分である （$R = R' \cap X^2$）．

二項関係の拡張と制限 — 前回の復習

- X, X' を集合として，$X \subseteq X'$ とする ◂ 記号の復習 （$X = X'$ の場合も考える）．
R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするとき，

▷ R' が R の **拡張** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x \, R \, y \;\Rightarrow\; x \, R' \, y$ が成り立つこととする．

▷ R が R' の X への **制限** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x \, R \, y \;\Leftrightarrow\; x \, R' \, y$ が成り立つこととする． ◂ 例

- 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を
$X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する．同様に，
$X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◂ 例

- X 上の二項関係 R は，X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x \, R \, y\}$ と同一視することができる．この同一視により，

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow$ $R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow$ R は R' と X^2 の共通部分である（$R = R' \cap X^2$）．

▶ X, X' を集合として，$X \subseteq X'$ とする ◂ 記号の復習 （$X = X'$ の場合も考える）．
R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするとき，

▷R' が R の **拡張** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x\,R\,y \Rightarrow x\,R'\,y$ が成り立つこととする．

▷R が R' の X への **制限** であるとは，すべての $x, y \in X$ に対して，$x\,R\,y \Leftrightarrow x\,R'\,y$ が成り立つこととする． ◂ 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を
$X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する．同様に，
$X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◂ 例

▶ X 上の二項関係 R は，X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x\,R\,y\}$ と同一視することができる．この同一視により，

▷R' は R の拡張である $\Leftrightarrow$ $R \subseteq R'$.

▷R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow$ R は R' と X^2 の共通部分である （$R = R' \cap X^2$）．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． 帰納法の解説

以下の補題を用いる． 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． 帰納法の解説
以下の補題を用いる． 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． 帰納法の解説

以下の補題を用いる． 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． ◂ 帰納法の解説
以下の補題を用いる． ◂ 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 ◂ "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． 帰納法の解説
以下の補題を用いる． 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． 帰納法の解説
以下の補題を用いる． 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序の線形順序への拡張

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す． ◂ 帰納法の解説
以下の補題を用いる． ◂ 用語 "補題" の解説

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元 ◂ "極小元" の定義 が存在する．

- 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 上の補題では一般には「X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

半順序を拡張する線形順序の例 (1/2)

- $X = \{a, b, c, d\}$ として $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(c,d),(a,d)\}$ は X 上の半順序である.

この半順序は 3 つの違うやり方で線形順序に拡張できる:

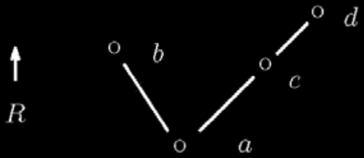
半順序を拡張する線形順序の例 (1/2)

- $X = \{a, b, c, d\}$ として
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, d), (a, d)\}$ は X 上の半順序である.

この半順序は 3 つの違うやり方で線形順序に拡張できる:

半順序を拡張する線形順序の例 (1/2)

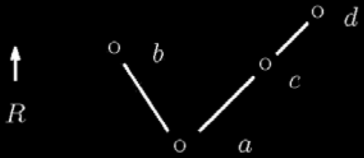
- $X = \{a, b, c, d\}$ として
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, d), (a, d)\}$ は X 上の半順序である.



この半順序は 3 つの違うやり方で線形順序に拡張できる:

半順序を拡張する線形順序の例 (1/2)

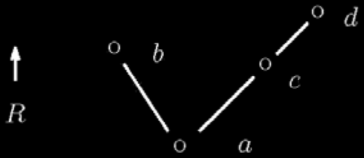
- $X = \{a, b, c, d\}$ として $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(c,d),(a,d)\}$ は X 上の半順序である.



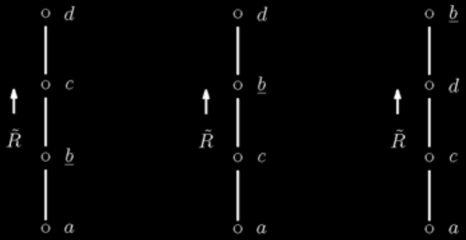
この半順序は 3 つの違うやり方で線形順序に拡張できる:

半順序を拡張する線形順序の例 (1/2)

- $X = \{a, b, c, d\}$ として
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, d), (a, d)\}$ は X 上の半順序である.



この半順序は 3 つの違うやり方で線形順序に拡張できる:



半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする． $\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\,R\,w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，“ことば” R “ことばあそび”，“こと” R “ことば” である．

- ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w\,\tilde{R}\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w\,\tilde{R}'\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか}, w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする． $\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を,

$$w \; R \; w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

- ここで，$\tilde{R}$ を,

$$w \; \tilde{R} \; w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} \\ & w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{aligned}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- 一方，$\tilde{R}'$ を,

$$w \; \tilde{R}' \; w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & w \text{ は } w' \text{ と等しいか}, w \text{ は alphabet で書いた} \\ & \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{aligned}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする． $\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\ R\ w' \quad\Leftrightarrow\quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

- ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w\ \tilde{R}\ w' \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w\ \tilde{R}'\ w' \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか}, w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする．$\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- ▷$\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\,R\,w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「⋯ の最初の部分」は「⋯ の始片である」(is an initial segment of ⋯) と表現されることも多い．たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

- ▷ ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w\,\tilde{R}\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- ▷ 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w\,\tilde{R}'\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか}, w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

▶ $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする．$\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．

▷ $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\ R\ w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

▷ ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w\ \tilde{R}\ w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

▷ 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w\ \tilde{R}'\ w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする．$\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\ R\ w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，“ことば” R “ことばあそび”，“こと” R “ことば” である．

- ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w\ \tilde{R}\ w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w\ \tilde{R}'\ w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

▶ $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする． $\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．

▷ $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w\,R\,w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする． 数学では「⋯ の最初の部分」は「⋯ の始片である」(is an initial segment of ⋯) と表現されることも多い． たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

▷ ここで， $\tilde{R}$ を，

$$w\,\tilde{R}\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると， $\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

▷ 一方， $\tilde{R}'$ を，

$$w\,\tilde{R}'\,w' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} w \text{ は } w' \text{ と等しいか,} w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある} \end{array}$$

と定義すると， $\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の， R を拡張する線形順序となる．

半順序を拡張する線形順序の例 (2/2)

- $\mathcal{V}$ を日本語の単語のひらがなでの表記の全体とする． $\mathcal{V}$ は要素の数が非常に大きいが有限集合である．
- $\mathcal{V}$ の上の半順序 R を，

$$w \, R \, w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ の最初の部分}$$

とする．数学では「$\cdots$ の最初の部分」は「$\cdots$ の始片である」(is an initial segment of $\cdots$) と表現されることも多い．たとえば，"ことば" R "ことばあそび"，"こと" R "ことば" である．

- ここで，$\tilde{R}$ を，

$$w \, \tilde{R} \, w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} \\ w \text{ は国語辞書の順序で } w' \text{ より前にある}$$

と定義すると，$\tilde{R}$ は R を拡張する線形順序である．

- 一方，$\tilde{R}'$ を，

$$w \, \tilde{R}' \, w' \quad \Leftrightarrow \quad w \text{ は } w' \text{ と等しいか，} w \text{ は alphabet で書いた} \\ \text{とき英語辞書での順序で } w' \text{ より前にある}$$

と定義すると，$\tilde{R}'$ は $\tilde{R}$ とは別の，R を拡張する線形順序となる．

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geqq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1 \; R \; x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2 \; R \; x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1} \; R \; x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明. n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1 \ R \ x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2 \ R \ x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1} \ R \ x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする． X は空でないので， $n \geqq 1$ である． X は空でないので， X の要素 x_0 がとれる． もし x_0 が X の極小元なら， x_0 は求めるようなものである． そうでないなら， x_0 は極小元でないことから， x_0 と異る X の要素 x_1 で， $x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる． もし， x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである． そうでなければ， x_1 と異る $x_2 \in X$ で， $x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる． このとき， R の反対称性と推移性から， x_0 と x_2 も異ることに注意する． 同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので， n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる． たとえば， x_k をとったときに， x_k と異る x_{k+1} が， $x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geqq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1\ R\ x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2\ R\ x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1}\ R\ x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明．　n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geqq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである．　□ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする． X は空でないので， $n \geq 1$ である． X は空でないので， X の要素 x_0 がとれる． もし x_0 が X の極小元なら， x_0 は求めるようなものである． そうでないなら， x_0 は極小元でないことから， x_0 と異る X の要素 x_1 で， $x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる． もし， x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである． そうでなければ， x_1 と異る $x_2 \in X$ で， $x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる． このとき， R の反対称性と推移性から， x_0 と x_2 も異ることに注意する． 同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので， n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる． たとえば， x_k をとったときに， x_k と異る x_{k+1} が， $x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geqq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである． □ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明．　n を X の要素の数とする．X は空でないので，$n \geq 1$ である．X は空でないので，X の要素 x_0 がとれる．もし x_0 が X の極小元なら，x_0 は求めるようなものである．そうでないなら，x_0 は極小元でないことから，x_0 と異る X の要素 x_1 で，$x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる．もし，x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである．そうでなければ，x_1 と異る $x_2 \in X$ で，$x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる．このとき，R の反対称性と推移性から，x_0 と x_2 も異ることに注意する．同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので，n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる．たとえば，x_k をとったときに，x_k と異る x_{k+1} が，$x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると，この x_k は X の極小元であるから，このような x_k が求めるようなものである．　□ (補題 2)

補題 2 の証明

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し，R に関する X の極小元が存在する．

証明． n を X の要素の数とする． X は空でないので， $n \geq 1$ である． X は空でないので， X の要素 x_0 がとれる． もし x_0 が X の極小元なら， x_0 は求めるようなものである． そうでないなら， x_0 は極小元でないことから， x_0 と異る X の要素 x_1 で， $x_1 \mathrel{R} x_0$ となるようなものがとれる． もし， x_1 が X の極小元なら x_1 は求めるようなものである． そうでなければ， x_1 と異る $x_2 \in X$ で， $x_2 \mathrel{R} x_1$ となるようなものがとれる． このとき， R の反対称性と推移性から， x_0 と x_2 も異ることに注意する． 同様に $x_3, x_4, \ldots$ ととれるかぎり，とってゆくと，これらは，上と同様にそれぞれ互いに異るので， n 回以内の繰り返しで，この操作が続けられなくなる． たとえば， x_k をとったときに， x_k と異る x_{k+1} が， $x_{k+1} \mathrel{R} x_k$ となるようにとれなかったとすると， この x_k は X の極小元であるから， このような x_k が求めるようなものである． □ **(補題 2)**

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明． X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す． X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする． **補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．
x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である． R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる． ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる． □ (**定理 1**)

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明．　X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる．　$\square$ (**定理 1**)

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明． X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す． X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする． **補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．
x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である． R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる． ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる． $\square$ **(定理 1)**

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明．　X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる．　□ (**定理 1**)

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明．　X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる．　□ (**定理 1**)

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明． X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．
x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる． □（**定理 1**）

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明. X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．
x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる． □ (**定理 1**)

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも *1* つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明．　X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す．X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする．**補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である．R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる．ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる．　□ **(定理 1)**

Theorem 1の証明

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して，R の拡張となっている X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

証明. X の要素の数に関する帰納法で示す．
X の要素の数が 1 のときには，定理の主張が成り立つことは明らかである．
要素の数が n の集合に対しては定理が成り立つことを仮定して，要素が $n+1$ 個の集合に対しても定理が成り立つことを示す． X をちょうど $n+1$ 個の要素を持つ集合として，R を X 上の半順序とする． **補題 2** により，X の R に関する極小元 x^* が存在する．
x^* を X から取り除いてできる集合を X' とすると X' は n 個の要素を持つ集合である． R の X' への制限を R' とすると，R' は X' 上の半順序となるから，帰納法の仮定から，R' は X' 上の線形順序 $\tilde{R}'$ に拡張できる． ここで，$\tilde{R}$ を $\tilde{R}' \cup \{(x^*, y) : y \in X\}$ とすると，$\tilde{R}$ は R の拡張で，X の上の線形順序となる． □ (**定理 1**)

一般の場合での半順序の線形順序への拡張

より一般には次の定理が成り立つ:

定理 3

X を任意の空でない集合として, R を X 上の半順序とするとき, R を拡張する X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する.

▶ 上の定理の証明には, 選択公理 と呼ばれる, 20 世紀以降に正しく認識されるようになった数学の公理が必要となる.

選択公理 空でない集合を要素とする任意の集合 A に対し, A の上の写像 φ ですべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in a$ となるようなものが存在する.

▷ A が有限集合のときにはこのような φ がとれることは明らかだが, 選択公理はこのことが任意の (必ずしも有限でない) 集合に対しても成り立つことを主張している.

▷ 選択公理を認めないで数学理論を構築することも (ある程度) 可能であるが, このときには, 上の Theorem 3は証明ができない (ことが証明されている).

一般の場合での半順序の線形順序への拡張

より一般には次の定理が成り立つ:

定理 3

X を任意の空でない集合として，R を X 上の半順序とするとき，R を拡張する X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

▶ 上の定理の証明には，選択公理 と呼ばれる，20 世紀以降に正しく認識されるようになった数学の公理が必要となる．

選択公理 空でない集合を要素とする任意の集合 A に対し，A の上の写像 φ ですべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in a$ となるようなものが存在する．

▷ A が有限集合のときにはこのような φ がとれることは明らかだが，選択公理はこのことが任意の（必ずしも有限でない）集合に対しても成り立つことを主張している．

▷ 選択公理を認めないで数学理論を構築することも（ある程度）可能であるが，このときには，上の Theorem 3は証明ができない（ことが証明されている）．

一般の場合での半順序の線形順序への拡張

より一般には次の定理が成り立つ:

定理 3

X を任意の空でない集合として，R を X 上の半順序とするとき，R を拡張する X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

▶ 上の定理の証明には，選択公理 と呼ばれる，20 世紀以降に正しく認識されるようになった数学の公理が必要となる．

選択公理 空でない集合を要素とする任意の集合 A に対し，A の上の写像 φ ですべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in a$ となるようなものが存在する．

▷ A が有限集合のときにはこのような φ がとれることは明らかだが，選択公理はこのことが任意の（必ずしも有限でない）集合に対しても成り立つことを主張している．

▷ 選択公理を認めないで数学理論を構築することも（ある程度）可能であるが，このときには，上の Theorem 3は証明ができない（ことが証明されている）．

一般の場合での半順序の線形順序への拡張

より一般には次の定理が成り立つ:

定理 3

X を任意の空でない集合として，R を X 上の半順序とするとき，R を拡張する X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する.

▶ 上の定理の証明には，選択公理 と呼ばれる，20 世紀以降に正しく認識されるようになった数学の公理が必要となる.

選択公理 空でない集合を要素とする任意の集合 A に対し，A の上の写像 φ ですべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in a$ となるようなものが存在する.

▷ A が有限集合のときにはこのような φ がとれることは明らかだが，選択公理はこのことが任意の（必ずしも有限でない）集合に対しても成り立つことを主張している.

▷ 選択公理を認めないで数学理論を構築することも（ある程度）可能であるが，このときには，上の Theorem 3は証明ができない（ことが証明されている）.

一般の場合での半順序の線形順序への拡張

より一般には次の定理が成り立つ:

定理 3

X を任意の空でない集合として，R を X 上の半順序とするとき，R を拡張する X 上の線形順序 $\tilde{R}$ が存在する．

▶ 上の定理の証明には，選択公理 と呼ばれる，20 世紀以降に正しく認識されるようになった数学の公理が必要となる．

選択公理　空でない集合を要素とする任意の集合 A に対し，A の上の写像 φ ですべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in a$ となるようなものが存在する．

▷ A が有限集合のときにはこのような φ がとれることは明らかだが，選択公理はこのことが任意の（必ずしも有限でない）集合に対しても成り立つことを主張している．

▷ 選択公理を認めないで数学理論を構築することも（ある程度）可能であるが，このときには，上の Theorem 3は証明ができない（ことが証明されている）．

¡Gracias por su atención!

Ernst Zermelo (1871(明治 4 年) Berlin–1953(昭和 28 年) Freiburg)
Zermelo は 1904 年に 選択公理 を導入して，これを用いて「すべての集合は整列可能である」という定理 (整列可能性定理) を証明した（整列可能とは，すべての部分集合が極小元を持つような線形順序を入れることができるということ）．整列可能性定理から選択公理が導けることは容易に示せるので，このことから，集合論の他の基本性質を仮定すると，選択公理は，整列可能性定理と同値であることが示せたことになる．

部分集合（復習）

- X と Y を集合とするとき，$X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることをあらわす．つまり，$X \subseteq Y$ は，

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは，すべての x に対して，$x \in X \Rightarrow x \in Y$）が成り立つことである．

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である． $\subseteq$ は推移律を満たす．したがって，上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

部分集合（復習）

- X と Y を集合とするとき，$X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす．つまり，$X \subseteq Y$ は，

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは，すべての x に対して，$x \in X \;\Rightarrow\; x \in Y$）が成り立つことである．

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である． $\subseteq$ は推移律を満たす．したがって，上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

部分集合（復習）

- X と Y を集合とするとき，$X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす．つまり，$X \subseteq Y$ は，

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは，すべての x に対して，$x \in X \Rightarrow x \in Y$）が成り立つことである．

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である． $\subseteq$ は推移律を満たす． したがって，上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

部分集合（復習）

- X と Y を集合とするとき，$X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす．つまり，$X \subseteq Y$ は，

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは，すべての x に対して，$x \in X \Rightarrow x \in Y$）が成り立つことである．

▷$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である． $\subseteq$ は推移律を満たす．したがって，上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
  $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．
- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n \ R \ m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．

- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n\ R\ m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．

- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n\ R\ m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$, も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている．
  $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある．
- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n\ R\ m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．

- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n\ R\ m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

関係の拡張と制限の例

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ は，$\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leqq$ の拡張となっている．
$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ の $\mathbb{N}$ への制限である．

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが，$\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ も上と同じ関係にある．

- $\mathbb{N}$ 上の関係 $n\ R\ m \Leftrightarrow m = n+1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）．$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leqq$，も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leqq$ も R の拡張だが，R は，どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x,y) を座標 (x,y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明．　n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n=0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2=0$ となり，主張は成り立つ．

$n=k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n=k+1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k+1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0,x) : x \in X_0\}$, $\{(x,x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0,x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2+k+k+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$ となり，$n=k+1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x,y) を座標 (x,y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

> - X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． ◀ 帰納法の解説

$n=0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2=0$ となり，主張は成り立つ．

$n=k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n=k+1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k+1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0,x) : x \in X_0\}$, $\{(x,x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0,x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2+k+k+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$ となり，$n=k+1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明． n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x,y) を座標 (x,y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明． n に関する帰納法で証明する． ◂ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$．帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x,y) を座標 (x,y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明． n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n=0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2=0$ となり，主張は成り立つ．

$n=k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n=k+1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k+1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0,x) : x \in X_0\}$, $\{(x,x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0,x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2+k+k+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$ となり，$n=k+1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明．　n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． ◂ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明． n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

デカルト積の例

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが，(x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで，$\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる．同様の同一視により，$\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる．

- X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とするとき，X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる．

証明. n に関する帰納法で証明する． 帰納法の解説

$n = 0$ のとき，つまり X が要素を一つも持たない集合のときには，X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり，主張は成り立つ．

$n = k$ に対し，主張が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す．X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として，$x_0 \in X$ を一つ固定する．X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると，X_0 は k 個の要素を持つ集合となる．X^2 は次の 4 つの集合に分割される．$(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から，$(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ．残りの集合はそれぞれ k, k, 1 個の要素を持つ．したがって，X^2 の要素の数は，これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり，$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた．

（数学的）帰納法 — 前回の復習

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

> $\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする．m_0 をある自然数とするとき，「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す
>
> ▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．
>
> ▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$（つまり $\mathfrak{A}(k)$）が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$（つまり $\mathfrak{A}(k+1)$）が成り立つ．

- 上の ▷1 は **帰納法の始め** (the beginning of the induction)，▷2 は **帰納法のステップ** (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる．▷2 の前提条件は **帰納法の仮定** と呼ばれる．
- 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という．mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

（数学的）帰納法 — 前回の復習

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

> $\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする． m_0 をある自然数とするとき,「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す
>
> ▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．
>
> ▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k)$ ）が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k+1)$ ）が成り立つ．

- 上の ▷1 は **帰納法の始め** (the beginning of the induction)， ▷2 は **帰納法のステップ** (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる． ▷2 の前提条件は **帰納法の仮定** と呼ばれる．
- 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という． mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

（数学的）帰納法 — 前回の復習

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

> $\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする．m_0 をある自然数とするとき，「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す
>
> ▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．
>
> ▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k)$ ）が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k+1)$ ）が成り立つ．

- 上の ▷1 は **帰納法の始め** (the beginning of the induction)，▷2 は **帰納法のステップ** (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる．▷2 の前提条件は **帰納法の仮定** と呼ばれる．
- 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という．mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

（数学的）帰納法 — 前回の復習

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

$\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする．m_0 をある自然数とするとき,「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す

▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．

▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k)$）が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k+1)$）が成り立つ．

▶ 上の ▷1 は **帰納法の始め** (the beginning of the induction)，▷2 は **帰納法のステップ** (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる．▷2 の前提条件は **帰納法の仮定** と呼ばれる．

▶ 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という．mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

（数学的）帰納法 — 前回の復習

帰納法 (induction または mathematical induction) とは，次のような論法のことである:

> $\mathfrak{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする．m_0 をある自然数とするとき，「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathfrak{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために，次のことを示す
>
> ▷1 $\mathfrak{A}(m_0)$ が成り立つ．
>
> ▷2 $n = k$ のときに $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k)$）が成り立つとすると，$n = k + 1$ のときにも $\mathfrak{A}(n)$ （つまり $\mathfrak{A}(k + 1)$）が成り立つ．

- 上の ▷1 は **帰納法の始め** (the beginning of the induction)，▷2 は **帰納法のステップ** (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる．▷2 の前提条件は **帰納法の仮定** と呼ばれる．
- 哲学では，多くの例から，法則を抽出することを 帰納 (induction) という．mathematical induction という用語は，この帰納と帰納法を区別するための用語だが，いささか長い表現なので，数学では通常単に induction と言うことが多い．

用語の解説

- 定理を証明するときに必要となる技術的な主張で，定理ほどは独立していないもの（あるいは，一連の議論で，そこでは補助的な役割しかはたさないもの）のことを 補題 (lemma) とよぶ.

- X を集合として R を X 上の半順序とするとき，$x \in X$ が X の R に関する極小元である，とは，すべての x と異る $y \in X$ に対し，$y \, R \, x$ が成り立たないことである.

用語の解説

- 定理を証明するときに必要となる技術的な主張で，定理ほどは独立していないもの（あるいは，一連の議論で，そこでは補助的な役割しかはたさないもの）のことを **補題** (lemma) とよぶ．

- X を集合として R を X 上の半順序とするとき，$x \in X$ が X の R に関する極小元である，とは，すべての x と異る $y \in X$ に対し，$y \, R \, x$ が成り立たないことである．