構造の数理

X. 「つながり具合」の数学的な表現 — グラフ

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(January 27, 2011 (05:25 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

December 16, 2010

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

- X を点の集合とするとき，$x, y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる.

グラフ

- “点” の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ “辺” が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.
- X を点の集合とするとき，$x, y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

- X を点の集合とするとき，$x, y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X,\ x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる.

グラフ

- “点” の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ “辺” が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ．

- X を点の集合とするとき，$x,\ y \in X,\ x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X,\ x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる．
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$，$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる．

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

- X を点の集合とするとき，x, $y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ．

- X を点の集合とするとき，$x,\ y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X,\ x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる．
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$,

$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる．

グラフ

- “点” の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ “辺” が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

- X を点の集合とするとき，$x,\ y \in X,\ x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X,\ x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，

という図式であらわせる.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

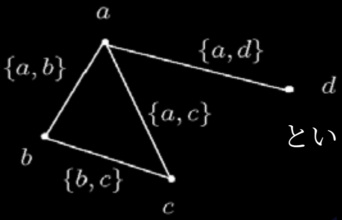
- X を点の集合とするとき，$x, y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は,

という図式であらわせる.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ.

- X を点の集合とするとき，x, $y \in X$, $x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる.
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，



という図式であらわせる.

グラフの応用 — Königsberg の 7 つの橋

- Königsberg（ケーニッヒスベルク — 現在のカリニングラード）を流れるプレーゲル河には中之島と中洲の間に，7 つの橋がかかっていた．これらの橋をそれぞれ一回づつ渡るような街の歩き方はあるか？ という問題が古くから知られていた．

18 世紀ごろの Königsberg の地図

グラフの応用 — Königsberg の 7 つの橋

- Königsberg （ケーニッヒスベルク — 現在のカリニングラード）を流れるプレーゲル河には中之島と中洲の間に，7 つの橋がかかっていた．これらの橋をそれぞれ一回づつ渡るような街の歩き方はあるか? という問題が古くから知られていた．

18 世紀ごろの Königsberg の地図

グラフの応用 — Königsberg の 7 つの橋

- Königsberg （ケーニッヒスベルク — 現在のカリニングラード）を流れるプレーゲル河には中之島と中洲の間に，7 つの橋がかかっていた．これらの橋をそれぞれ一回づつ渡るような街の歩き方はあるか? という問題が古くから知られていた．

18 世紀ごろの Königsberg の地図

Königsberg の 7 つの橋の否定的解決

- オイラー (Leonhard Euler 1707(宝永 4 年) — 1783 (天明 3 年)) は，I735 年（享保（きょうほう）20 年）「これらの 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡る歩き方は存在しない」ことを証明したが，この証明のために，前のスライドで述べたグラフの概念を導入した（ただし，当時は集合を用いる表現はまだ発明されていなかった）．

Königsberg の 7 つの橋の否定的解決

前ページの地図の拡大図

- オイラー (Leonhard Euler 1707(宝永 4 年) — 1783 (天明 3 年)) は，1735 年（享保（きょうほう）20 年）「これらの 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡る歩き方は存在しない」 ことを証明したが，この証明のために，前のスライドで述べたグラフの概念を導入した（ただし，当時は集合を用いる表現はまだ発明されていなかった）．

Königsberg の 7 つの橋の否定的解決

前ページの地図の拡大図

- オイラー (Leonhard Euler 1707(宝永 4 年) — 1783 (天明 3 年)) は，I735 年（享保（きょうほう）20 年）「これらの 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡る歩き方は存在しない」ことを証明したが，この証明のために，前のスライドで述べたグラフの概念を導入した（ただし，当時は集合を用いる表現はまだ発明されていなかった）．

Königsberg の 7 つの橋の否定的解決

前ページの地図の拡大図

オイラー

- オイラー (Leonhard Euler 1707(宝永 4 年) — 1783 (天明 3 年)) は，1735 年（享保（きょうほう）20 年）「これらの 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡る歩き方は存在しない」 ことを証明したが，この証明のために，前のスライドで述べたグラフの概念を導入した（ただし，当時は集合を用いる表現はまだ発明されていなかった）．

問題のグラフへの翻訳

$$\Longrightarrow$$

- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上のグラフが一筆書できることとは同値である．

問題のグラフへの翻訳

$\Rightarrow$

- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上のグラフが一筆書できることとは同値である．

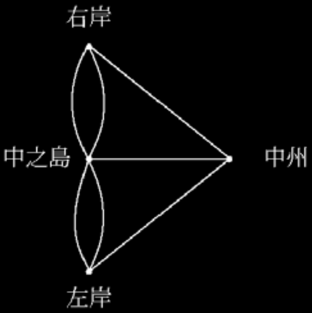
問題のグラフへの翻訳

$\Rightarrow$

- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上のグラフが一筆書できることとは同値である．

問題のグラフへの翻訳

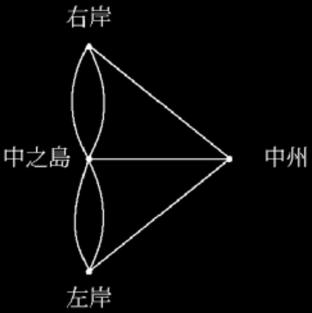
$\Rightarrow$



- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上のグラフが一筆書できることとは同値である．

問題のグラフへの翻訳

$\Rightarrow$



- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上のグラフが一筆書できることとは同値である．

オイラーの定理（の一つ）

定理 1 (Euler, 1735)

G を連結な（つまり，辺をたどってどの点からどの点へも行けるような）有限グラフとするとき，G が一筆書きできるなら，

▷1 G のすべての点の次数（つまり，その点につながっている辺の数）は偶数であるか，または

▷2 G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ

のどちらかが成り立つ．

つまり，

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない

オイラーの定理（の一つ）

定理 1 (Euler, 1735)

G を連結な（つまり，辺をたどってどの点からどの点へも行けるような）有限グラフとするとき，G が一筆書きできるなら，

▷1 G のすべての点の次数（つまり，その点につながっている辺の数）は偶数であるか，または

▷2 G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ

のどちらかが成り立つ.

つまり，

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない

オイラーの定理（の一つ）

定理 1 (Euler, 1735)

G を連結な（つまり，辺をたどってどの点からどの点へも行けるような）有限グラフとするとき，G が一筆書きできるなら，

▷1 G のすべての点の次数（つまり，その点につながっている辺の数）は偶数であるか，または

▷2 G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ

のどちらかが成り立つ．

つまり，

> 「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない

7 つの橋の問題の否定的解決

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない．

- 実はオイラーの定理の逆も成り立つ（証明は連結な有限グラフの点の数に関する帰納法を使う）．

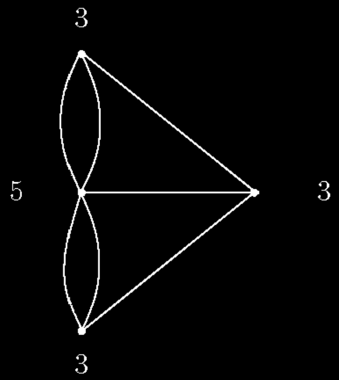
7 つの橋の問題の否定的解決

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない．

- 実はオイラーの定理の逆も成り立つ（証明は連結な有限グラフの点の数に関する帰納法を使う）．

7 つの橋の問題の否定的解決

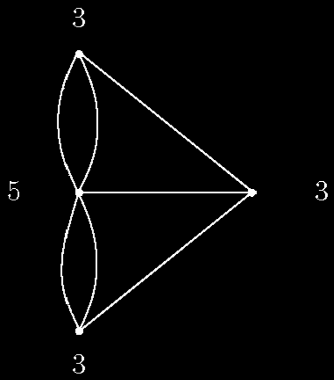
「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない．



- 実はオイラーの定理の逆も成り立つ（証明は連結な有限グラフの点の数に関する帰納法を使う）．

7 つの橋の問題の否定的解決

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない．



- 実はオイラーの定理の逆も成り立つ（証明は連結な有限グラフの点の数に関する帰納法を使う）．

¡Gracias por su atención!

- オイラーの定理とその逆の証明は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/chubu/method-math-WS06.pdf を参照.

- ラムゼイ数については,

Ramsey's Theorem — Wikipedia

ピーター・フランクル, 代数の閃き, 数学セミナー 2011 年 1 月号, 50–53.

などを参照.

- 注意: ２０１１年１月１３日の講義は休講とします.