確率論基礎　演習 No.1

担当: 渕野 昌　　2013.05.09(Th)

この演習問題と解答例は `http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html` にリンク予定です.

以下の演習問題を 2013 年 05 月 09 日の講義時間 (4 限目) 解いてください. 講義時間に解いたものを補足拡張して, まとめたものをレポート (A4 の用紙を用いてください) として, 2013 年 05 月 16 日の講義の始まる前に提出してください. レポートは返却しないので, 自分用のコピーを手元に残すようにしてください.

1. A, $B \in \mathcal{A}$ を、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ の任意の事象とするとき, 次の等式が成り立つことを示せ:

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) = P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c)$$

2. A, $B \in \mathcal{A}$ を、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ の任意の事象とするとき, A と B の対称差 $A \triangle B$ を $(A - B) \cup (B - A)$ で定義する.

(1) $A \triangle B \in \mathcal{A}$ であることを示せ.

$d(A, B) = P(A \triangle B)$ と定義すると, $d(A, B)$ は A と B 間の距離のようなものと看做せる, つまり, 任意の A, B, $C \in \mathcal{A}$ に対し, 次の (2) ～ (5) が成り立つ. このことを示せ.

(2) $d(A, B) \geq 0$.
(3) $A = B$ なら $d(A, B) = 0$
(4) $d(A, B) = d(B, A)$.
(5) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

3. 次のベイズの定理の一般化を証明せよ:
$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ が, Ω のゼロでない測度を持つ事象への分割になっているとする. つまり, $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \Omega$ で, $1 \leq i, j \leq n$ かつ $i \neq j$ なら, $A_i \cap A_j = \emptyset$ かつ $P(A_i) > 0$ となっているとする. このとき, $1 \leq i \leq n$ と $B \in \mathcal{A}$ で $P(B) \neq 0$ となるものに対し,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

となる (ヒント: $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ は B の分割になることを示し, これを用いる). 特に, 任意の A, $B \in \mathcal{A}$ に対し,

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}$$

である.

4. 症状 S を訴えた患者のうち, 5% が疾患 D に罹っていることが知られている. 症状 S のある患者に精密検査 T を行なうと, 疾患 D を持つ患者の 70% が陽性反応を示し, 疾患 D を持たない患者の 10% が陽性反応を示す. 症状 S を訴えた患者が精密検査 T で陽性反応を示したとき, その患者が疾患 D に罹っている確率を求めよ (ヒント: 全事象を 「症状 S のある患者」として,「疾患 D に罹っている」を事象 A とし「精密検査 T で陽性反応が出る」を事象 B としてこれにベイズの定理を応用する. このとき, 求める確率は $P(A|B)$ とあらわさせることに注意する).

5. B 社製のある航空機の機種は, その故障を, 機体の故障, エンジンの故障, 電子系統の故障, 操縦の失敗, の 4 つのカテゴリーに分類できるという. ある距離を飛ぶときにこれらの故障の起る確率は, それぞれ, 0.002, 0.002, 0.010, 0.001 で, それぞれの故障が起きたとき飛行機が墜落する確率はそれぞれ, 0.25, 0.30, 0.01, 0.90 であると評価されている. 今この機種の飛行機が墜落したが, 原因は分っていないとすると, この墜落がエンジンの故障によるものである確率はいくらか.

6. (a) $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ が, すべての 異なる $i, j \in \mathbb{N}$ に対し, $P(A_i \cap A_j) = 0$ を満たすとき, $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ が成り立つことを示せ.

(b) 3. での条件 $A_i \cap A_j = \emptyset$ も $P(A_i \cap A_j) = 0$ に弱められることを示せ.

問題の解説

(2013 年 08 月 01 日 09:51)

1.: $A \cap B \subseteq B$ で，$A^c \cap B = B - (A \cap B)$ であることに注意すると，$P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) = (1 - P(A))P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) = P(B) - P(A)P(B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$ である．また，この等式より，$P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A) - L(B^c \cap A) = P(B \cap A) - P(B)P(A) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$ となる．

2., (1): $A, B \in \mathcal{A}$ なら $A - B \in \mathcal{A}$ かつ $B - A \in \mathcal{A}$ である (講義録の補題 3.1,(c)) したがって，講義録の補題 3.1, (c) により， $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$ となることがわかる．

(2): P は任意の $\mathcal{A}$ の要素 C に対し，$0 \le P(C) \le 1$ となるのだったから，特に，$d(A, B) = P(A \triangle B) \ge 0$ である．

(3): $A = B$ なら，$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ だから，$d(A, B) = P(\emptyset) = 0$ である．

(4): $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \triangle A$ だから，$d(A, B) = P(A \triangle B) = P(B \triangle A) = d(B, A)$ である．

(5): まず,

$$(*) \quad (A \triangle C) \cup (C \triangle B) \supseteq A \triangle B$$

となることを示す．このためには，任意の $x \in A \triangle B$ に対し，$x \in (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ となることが言えればよい．これは,

$$\begin{aligned} x \in A \triangle B &\Leftrightarrow x \in A - B \text{ or } x \in B - A \\ &\Leftrightarrow ((x \in A - B \text{ and } x \in C) \text{ or } (x \in A - B \text{ and } x \in C^c)) \\ &\qquad \text{or } ((x \in B - A \text{ and } x \in C) \text{ or } (x \in B - A \text{ and } x \in C^c)) \\ &\Rightarrow (x \in C - B \text{ or } x \in A - C) \text{ or } (x \in C - A \text{ or } x \in B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \triangle C \text{ or } x \in C \triangle B \end{aligned}$$

によりよい．したがって,

$$d(A, C) + d(C, B) = P(A \triangle C) + P(C \triangle B) \ge P((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \ge P(A \triangle B)$$

となる．1 番目の “$\ge$” は，講義録の補題 4.2, (e) により，二番目の “$\ge$” は，(*) と講義録の補題 4.2, (c) による．

3.: $1 \le i, j \le n$ で $i \ne j$ のとき，$(A_i \cap B) \cap (Aj \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$ で，$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = \Omega \cap B = B$ だから，$(A_i \cap B)$, $i = 1, 2, ..., n$ は B のぶんかつ である．したがって，講義録の補題 4.2, (b) から,

$$\begin{aligned} (**) \quad P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)} \end{aligned}$$

である．ここで,

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$$

だから，$P(A_i)P(B|A_i) = P(A_i \cap B)$ となる．これを上の (**) に代入すると，求める式,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

が得られる．特に $n = 2$ の場合を考えると，$A_2 = A_1^C$ により

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_1^c)P(B|A_1^c)}$$

となるから A_1 を A と書きなおすと，求める式

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \tag{1}$$

が得られる．

4.: Ω を症状 S を訴えた患者全体として，$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ に対し，頻度 (あるいは割合) $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$ を確率測度とする確率空間を考える．事象 A, B をそれぞれ，D に罹っている患者の全体と，T positive な患者の全体とすると．求める割合は，$P(A|B)$ で表される．$P(B|A) = 0.7$, $P(B|A^c) = 0.1$, $P(A) = 0.05$ だから，

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} = \frac{0.05 \times 0.7}{0.05 \times 0.7 + 0.95 \times 0.1} \approx 0.27$$

となる．

5.: Ω を，過去のすべての，この機種の飛行機が与えられた一定の距離を飛んだ後の状態の全体 (あるいはシミュレーションでの仮想的な，この機種の飛行機の飛行後の状態の全体) として，A_1 を機体の故障が起っている基本事象の全体とし，A_2 をエンジンの故障，A_3 を電子系統の故障，A_4 を操縦の失敗が起っている基本事象の全体とする．確立測度 P を頻度とすると，$P(A_1) = 0.002$, $P(A_2) = 0.002$, $P(A_3) = 0.010$, $P(A_4) = 0.001$ である．また D を飛行機が墜落しているような基本事象の全体とすると，$P(D|A_1) = 0.25$, $P(D|A_2) = 0.30$, $P(D|A_3) = 0.01$, $P(D|A_4) = 0.90$ である．$P(A_i)$, $1 \leq i \leq 4$ はすでに十分に小さい数なので，$P(A_i \cap A_j)$, $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$ はほとんど 0 に近い値をとると仮定してよいだろう．したがって次の問題 6.(b) により，これらに 3. でのベイズの定理の一般化を適用してよいと考えられる．したがって，

$$P(A_2|D) = \frac{P(A_2)P(D|A_2)}{P(A_1)P(D|A_1) + \cdots + P(A_4)P(D|A_4)} = \frac{0.002 \times 0.3}{0.002 \times 0.25 + \cdots 0.001 \times 0.9} \approx 0.29$$

が求める値となる．