確率論基礎　演習 No.2

担当: 渕野 昌　　　2013.07.04(Th)

この演習問題と解答例は http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html にリンク予定です.

以下の演習問題をできるだけ解いてまとめたものを，2013 年 07 月 18 日 (木) の講義時間 (4 限目) の初めにレポート (A4 の用紙を用いてください) として提出してください．レポートは返却しないので，自分用のコピーを手元に残すようにしてください.

1. 確率変数 X, Y の共分散 (covariance) $Cov(X,Y)$ と相関係数 (correlation coefficient) $\rho(X,Y)$ について次に答えよ.

a. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ となることを示せ.
b. 上の a. を用いて，X と Y が独立なときには，$Cov(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$ となることを示せ.
c. ある定数 a, b に対して，$Y = aX + b$ となっているとき，$\rho(X,Y) = -1$ となるのはどんなときか?

2. $0 < p < 1$ に対し，確率変数 X が，ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution) $\mathrm{B}er\,(p)$ に従うとは，X のとる値は 0 と 1 のみで，$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$ となることである.
X が ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}er\,(p)$ に従うとき，$E(X)$ と $V(X)$ を求めよ.

3. $X_1,\ldots,X_n$ が，それぞれはベルヌーイ分布 $\mathrm{B}er\,(p)$ に従う独立な確率変数とするとき，$Y = X_1 + \cdots + X_n$ は n 次の二項分布 (binomial distribution) $Bin(n,p)$ に従うという (したがって $\mathrm{B}er\,(p)$ は $Bin(1,p)$ と一致する).
Y が n 次の二項分布に従うとき，$E(Y)$ と $V(Y)$ を求めよ.

4. 現実の確率現象で，ベルヌーイ分布，または二項分布に従う確率変数に対応すると考えることのできるものを，できるだけ多く挙げよ (なぜそう考えられるかについても説明せよ).

5. Chebyshev の不等式を，確率変数 X が離散的なときについて証明せよ.

6. X が標準正規分布に従うとき，$P(-1.96 \le X \le 1.96) \approx 0.95$ となることが知られている．これを用いて，$N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数 Y に対し，$P(\mu - a \le Y \le \mu + a) \approx 0.95$ となるような，a を求めよ.

問題の解説

(2013 年 08 月 01 日 11:22)

1. (a): 講義録の補題 10.1, (1) を参照.
   (b): 講義録の補題 10.1, (2) を参照.
   (c): 講義録の補題 10.2, (3) を参照.

2.: X をベルヌーイ分布 $\mathrm{B}er\,(p)$ に従う確率変数とする．このとき，$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$ である．
また $E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$ だから，$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$ である．

3.: X を二項分布 $Bin(n,p)$ に従う確率変数として $X_1, ..., X_n$ をベルヌーイ分布 $\mathrm{B}er\,(p)$ に従う互いに独立な確率変数とする．
このとき，講義録の補題 9.2, (1) から，$E(X) = E(X_1 + \cdots + E_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$ で，補題 9.2, (4) から，$V(X) = V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1-p)$ である．

4.: 略
5.: 略
6.: これは講義で説明した．