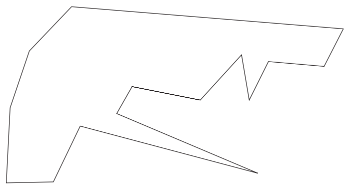
　　Typeset by pLaTeX

科目名	数理の世界	担当者名	渕野　昌	所要時間	90 分	2014 年 2 月 3 日 8:50 – 10:20 施行
持込	すべて可					
添付する 解答用紙	1　枚配付（問題用紙の回収　要・否）		計算用紙　0　枚配付			

I. (a) $p_1,\ldots,p_n$ を n 個の素数とするとき，$p_1\cdot\cdots\cdot p_n+1$ は $p_1,\ldots,p_n$ のどれでも割切れないことを示してください．

(b) このことを使って素数が無限にあることを証明したギリシャ時代の数学者の名前を答えなさい．

II. 次の形の建物のフロアが全部いっぺんに見渡せるには，最低で何人の警備員がいればよく，それらの警備員をどこに配置すればよいかを答えなさい．



III. “カップ中のコーヒーをかきまぜたときに，必ず一つは渦の中心ができる” という主張をブラウアー (Brouwer) の不動点定理との関係で説明してください．

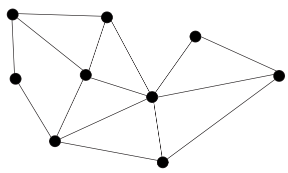
IV. (a) n 個の要素からなる集合の部分となっている集合の総数は 2^n となることを説明してください．

(b) n 個の要素からなる集合の真の部分となっている集合で空でないものは全部でいくつかるか答えてください．それがなぜそうなのかを説明してください．

(c) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ の値を求めてください．$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ は 5 つの要素を持つ集合の部分で ___ となるようなものの全体の数です．“___” にあてはまる語句を答なさい．

V. ベルトラン (Bertrand) の仮説 (ラマヌジャンの定理) は，“ すべての自然数 $n\geq 1$ に対して，$n<p\leq 2n$ となる素数 p が少なくとも一つ存在する” という命題でした．これを使って，2000000000000 と 16000000000000 の間には少なくとも 3 つは素数が存在することを示してください．

VI. (a) 次のグラフの頂点を，互いに辺で結ばれている頂点は違う色が割り当てられるように塗り分けるために必要となる色の最小数と最大数を答なさい．最小数の色を使った塗り分けの一つを示してください (たとえばそれが 5 色なら 1, 2, 3, 4, 5 を色の名前として塗り分けを図示してください)．



(b) 講義では上のグラフの塗り分けをふくむ一般的な定理を証明しました．この定理の命題を述べ，これをどのように上のグラフに適用できるのかを説明してください．

試験の実施後，この試験問題の解答例を

　　http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

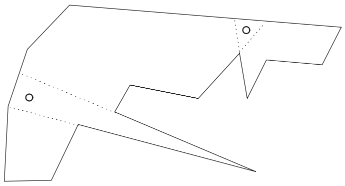
にリンクします

解答例

I. ： (a): p_i を $p_1,\ldots,p_n$ のどれかとすると，$p_1\cdot\cdots p_n$ は，p_i で割切れるから， $p_1\cdot\cdots p_n+1$ は p_i で割ると 1 が余る．特に，$p_1\cdot\cdots p_n+1$ は p_i で割切れない．

(b): ユークリッド

II. ： 以下の図のように警備員を配置することで二人の警備員でフロア全体を見渡すことができる:



III. ： カップには入ったコーヒーの各点に微少時間後のこの点が移る点を対応させる写像を考えるとこの写像は連続写像であると考えられるので，Brouwer の不動点定理により，この写像で自分自身に移る点が存在するが，この点は渦の中心となっている，と考えられる．

IV. ： (a): n 個の要素からなる集合 X の部分を選ぶ選び方は， X の 1 番目の要素をこの部分の要素として選ぶか選ばないかの 2 通り，X の 2 番目の要素をこの部分の要素として選ぶか選ばないかの 2 通り,...,X の n 番目の要素をこの部分の要素として選ぶか選ばないかの 2 通りがあるから，全部の選び方の個数はこれらの積である $\underbrace{2\cdot\cdots\cdot 2}_{n\text{ 回}}=2^n$ 通りある．

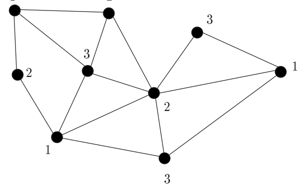
このことは，n に関する帰納法の形で書くことでより厳密に証明できる: $n=0$ のときには，空集合の部分は空集合しかないので，部分集合の総数は $1=2^0$ となるからよい．もし $n=k$ に対して，要素が k 個の集合の部分集合の全体の数が 2^k 個だとして，$n=k+1$ 個の要素を持つ集合 X をとり，x をこの集合の一つの要素として，X' を X の残りの要素の全体とすると，X' は k 個の要素を持つ集合となる (つまり $\#(X')=k$) から X' 仮定から P' を X' の部分の全体とすると $\#(P')=2^k$ である．一方 x だけからなる集合 $\{x\}$ を考えると，この要素の全体を P'' として，$P''=\{\emptyset,\{x\}\}$ だから $\#(P'')=2$ である．一方 P を X の部分集合の全体とすると， $P=\{Y'\cup Y'' : Y'\in P', Y''\in P'\}$ で，$P'\times P''\ni(Y',Y'')\mapsto Y'\cup Y''\in P$ は 1-1 onto なので，$2^{k+1}=2^k\cdot 2\#(P'\times P'')=\#(P)$ となり，示したい主張は $n=k+1$ のときにも成り立つことが示せる．

(b) n 個の要素からなる集合の部分集合の全体の総数は (1) から 2^n となるのだった．$n=0$ のときには，n 個の要素からなる酒豪は空集合 $\emptyset$ しかないが，この集合の空集合でない真の部分集合は存在しないから，その総数は 0 である．要素が 1 の集合も空集合と異る真の部分集合は存在しないから，その総数は 0 である．要素が 2 以上の集合 X に関しては，その部分集合の全体の数は， 2^n とるが，これから空集合と X 自身を除いた残りは，2^n-2 個で，これが X の空集合と異る真の部分集合の全体の総数となる．

(c) $\left(\begin{array}{c}5\\2\end{array}\right)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$. 下線のところに入れられる語句は 「要素の数が 2」

V. ： $2000000000000<2\times2000000000000<2\times2\times2000000000000<2\times2\times2\times2000000000000=16000000000000$ だから，ベルトランの定理によりそれぞれの数の間に少なくとも一つは素数があることがわかるしたがって， 2000000000000 と 16000000000000 の間には少なくとも 3 つは素数が存在する．

VI. ： (a) たとえば，



によりグラフの頂点は 3 色で塗り分けられる．一方このグラフは三角形を部分として含むから，塗り分けには少なくとも 3 色は必要なことは明らかである．

(b) 講義では,「多角形の頂点をお互いに交差しない対角線 (直線) で結んで三角形に分割して得られるグラフの頂点は (直線で結ばれた頂点は異る色になるように) 3 色で塗り分けられる」 という命題を証明した．ここでのグラフはそのようなものになっていないが，下の円でかこんだ頂点と 2 辺を取り除くと，そのようなものにできるので，それは 3 色で塗り分けられる．取り除いた頂点には，この塗り分けで直線で結ばれた 2 頂点に塗られた色と異る色を塗れるので，これによりもとのグラフも 3 色で塗り分けられることがわかる．