解答例と解説

数理論理学　レポート No.1

担当:　渕野 昌

2011 年 07 月 27 日

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキス等でとじたものを 6 月 15 日の 講義の初め に提出してください.（この日にどうしても提出できない場合には 6 月 22 日の講義の初めにも「後出し」の提出として受取りますが，それ以降は受けとりません.）

解答は，結果を得るための思考過程を（日本語で）詳しく説明するような書き方にしてください（日本語に自信のない場合には英語で書いてもいいです）．結果だけが書かれていて，それを得るための考え方が十分に述べられていないものは解答とは認めません.

この演習の問題用紙は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss11-uebung1.pdf

としてダウンロードできます．問題の提出期限後にこの URL に問題の解答例を加えたファイルを掲載する予定です.

---

1. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ として，L-構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ を考える．このとき，

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathcal{N} \models \varphi(m) \Leftrightarrow n = m$$

がすべての $m \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi(x)$ を与えよ.

$n = 0$ のときには，$\varphi(x)$ として $x \equiv 0$ をとればよい．$m > 0$ なら，$\varphi(x)$ として，たとえば，$x \equiv \underbrace{(1 + (1 + \cdots + (1 + 1}_{n\text{ 個}})) \cdots))$ をとればよい．この論理式が求めるような性質を持つことは n に関する帰納法で示せる.

(2) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathcal{N} \models \varphi(m) \Leftrightarrow m \text{ は 2 の倍数}$$

となるような L-論理式 $\varphi(x)$ を与えよ.

たとえば，$\varphi(x)$ として，$\exists y\, x \equiv (y + 1) + (y + 1)$ をとればよい.

(3) すべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathcal{N} \models \varphi(m, n) \Leftrightarrow m < n$$

となるような L-論理式 $\varphi(x, y)$ を与えよ.

たとえば $\varphi(x)$ として $\exists z\ y \equiv (x + z) + 1$ をとればよい.

2. 講義で補題 3.1:

L を任意の言語として $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ を 同型な L-構造で $g : A \to B$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像であるとする．このとき，任意の L-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(g(a_0), ..., g(a_{n-1}))$$

が成り立つ.

の証明の後半を省略したが，この補題の省略のない証明を与えよ．

3. (1) a, b を $\mathbb{R}$ の任意の要素とするとき，$\langle \mathbb{R}, < \rangle$ から $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ への同型写像 g で，$g(a) = b$ となるものが存在することを示せ．

同型写像の定義から，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の同型写像となるのは，g は 1-1 onto（全単射）で，すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ が成り立つことである． たとえば，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$g(x) = x + b - a$ $(x \in \mathbb{R})$ で定義すると，g はこの条件を満たし，$g(a) = a + b - a = b$ である．

(2) $L = \{<\}$ として，任意の L-論理式 $\varphi = \varphi(x)$ について，$\{a \in \mathbb{R} : \langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a)\}$ は $\emptyset$ か $\mathbb{R}$ のどちらかになることを示せ（ヒント: (1) と補題 3.1 を用いる）．

ある論理式 $\varphi = \varphi(x)$ に対し，$\{a \in \mathbb{R} : \langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a)\}$ が $\emptyset$ でも $\mathbb{R}$ でもなかったとすると，$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ で $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a_0)$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \neg\varphi(a_1)$ となるようなものがとれる．ところが，(1) により，$\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の同型写像で g ，$g(a_0) = g(a_1)$ となるものがとれるから，これは補題 3.1 に矛盾である．

(3) $a \in \mathbb{R}$ とするとき，ある L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ により $\{b \in \mathbb{R} : \langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a, b)\}$ と表わせる $\mathbb{R}$ の部分集合は何になるか（すべての場合を）答えよ．

$\emptyset$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) の 6 つの集合が $\{b \in \mathbb{R} : \langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a, b)\}$ とあらわせる集合のすべてである．実際，論理式 $\neg x \equiv x$, $x \equiv x$, $x < a$, $(x < a \vee x \equiv a)$, $(a < x \vee x \equiv a)$, $a < x$ でこれらの集合が定義される．

上の 6 つの集合のどれとも異るある集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が，ある L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ によって $X = \{b \in \mathbb{R} : \langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a, b)\}$ とあらわされたとすると，$a < c, d$ で $c \in X$ かつ $d \notin X$ となる $c, d \in \mathbb{R}$ が存在するか，あるいは $e, f < a$ で $e \in X$ かつ $f \notin X$ となる $e, f \in \mathbb{R}$ が存在する．今，前者の状況が成り立っているとして， $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq a \text{ のとき} \\ \frac{d-a}{c-a}(x - a) + a, & x > a \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義すると，g は $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の自己同型となり，$g(a) = a$, $g(c) = d$ となるから，$\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi(a, c)$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \neg\varphi(g(a), g(c))$ となり，補題 3.1 に矛盾である．他の場合についても，同様である．

3. f を 1 変数関数記号として，$L = \{0, 1, +, \cdot, f\}$ を考える．

(1) 任意の $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，

$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^{\mathbb{R}}$ は 2 次多項式で与えられる関数である

が成り立つような L-文 φ を与えよ．

φ として，たとえば，$\exists x \exists y \exists z (\neg x \equiv 0 \wedge \forall u\ f(u) \equiv x \cdot u \cdot u + y \cdot u + z)$ をとればよい．

(2) 任意の $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，

$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^{\mathbb{R}}$ は増加関数である

が成り立つような L-文 φ を与えよ．

φ として，$\forall x \forall y(x < y \to f(x) < f(y))$ とすればよい．弱い意味での増加関数については $\forall x \forall y(x < y \to (f(x) \equiv f(y) \vee f(x) < f(y)))$ をとればよい．

(3) ($\varepsilon\delta$-論法を知っている人のための演習問題) 任意の $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^{\mathbb{R}} \text{ は連続関数である}$$

が成り立つような L-文 φ を与えよ．

たとえば，$\forall x \forall \epsilon(\epsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall x'((x - \delta < x' \wedge x' < x + \delta) \to (f(x) - \epsilon < f(x') \wedge f(x') < f(x) + \epsilon))))$ はこのようなものになっている．上の “論理式” には，‘$-$’ (マイナス) など，言語 L に含まれない表現がいくつか含まれているが，これらの表現は，対応する L-論理式で置き換えることができる (演習).

(4) ($\varepsilon\delta$-論法を知っている人のための演習問題) 任意の $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^{\mathbb{R}} \text{ は微分可能である}$$

が成り立つような L-文 φ を与えよ．

たとえば，$\forall x \exists y \forall \epsilon(\epsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall h((-\delta < h \wedge h < \delta) \to (y - \epsilon < (f(x+h) - f(x))/h \wedge (f(x+h) - f(x))/h < y + \epsilon))))$ はこのようなものになっている．上の “論理式” には，‘$-$’ (マイナス) など，言語 L に含まれない表現がいくつか含まれているが，これらの表現は，対応する L-論理式で置き換えることができる (演習).

以上.