解答例と解説

数理論理学　演習問題 No.2

担当:　渕野 昌

2011 年 08 月 02 日

以下の問題は自習用の課題です．期末試験では，レポートとして提出してもらった問題とここでの演習問題のうちのいくつかの課題の類題が主な問題になる予定です．

この演習の問題用紙は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss11-uebung2.pdf

としてダウンロードできます．この URL に問題の解答例を加えたファイルを掲載する予定です．解答例を書きたすときに新しい演習問題も付け加える可能性もあるので，注意してください．

1. 次の命題論理の論理式がトートロジーかどうかを確かめてください:

(a) $(\neg A \to (A \vee B))$

(b) $(A \vee \neg A)$

(c) $((A \wedge \neg A) \to B)$

講義でもやったように真偽表を作成して解釈の真偽値を確かめてみればよい．

(a):

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$(\neg A \to (A \vee B))$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

上から $\varphi = (\neg A \to (A \vee B))$ として，$f_{\varphi(A,B)}(0,0) = 0$ となるので，この論理式はトートロジーではない．

(b):

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

なので，この論理式はトートロジーである．

(c):

A	B	$\neg A$	$(A \wedge \neg A)$	$((A \wedge \neg A) \to B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

となるので，この論理式もトートロジーであることがわかる．

2. φ と ψ をある言語 L に対する (述語論理の) L-文とします．$\mathfrak{A}$ を L-構造として，

$$\mathfrak{A} \models \neg(\neg\varphi \to (\varphi \vee \psi))$$

となっているとき，φ, ψ が $\mathfrak{A}$ で成り立つかどうか (つまり $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathfrak{A} \models \psi$ かどうか) を答えてください．

1.(a) の真偽表を拡張して

A	B	$\dots$	$\neg(\neg A \to (A \vee B))$
1	1		0
1	0	$\dots$	0
0	1		0
0	0		1

が得られる．したがって，レクチャーノートの補題 5.2 により，$\mathfrak{A} \models \neg(\neg\varphi \to (\varphi \vee \psi))$ となるのは，$\mathfrak{A} \not\models \varphi$ かつ $\mathfrak{A} \not\models \psi$ のときであることがわかる．よって，ここでの $\mathfrak{A}$ では，φ も ψ も成り立たない．

3. 完全性定理は，実は必ずしも可算でない言語 L に対しても成り立ちます (ほとんど同じように証明できます)．この一般化された完全性定理を用いて，次のコンパクト性定理と呼ばれる定理を証明してください:

定理 (コンパクト性定理). L を (必ずしも可算でない) 任意の言語として，T を L-文の集まりとする．T のすべての有限部分集合が モデルを持つとき T はモデルを持つ．

完全性定理は，この講義では

(1) すべての T と φ に対し，$T \models \varphi$ なら $T \vdash \varphi$ である

という形の命題だが，この命題が

(2) すべての T に対し，T が無矛盾なら T はモデルを持つ

という命題から導かれることを講義で示した．この導出は L が必ずしも可算でない場合にも全く同様に行なうことができる．逆に，(1) から (2) が導かれることも容易に示せる: 対偶を示すことにして，(2) が成り立たないとすれば，ある理論 T で無矛盾だがモデルを持たないようなものが存在する．T は無矛盾だから，論理式 φ で $T \nvdash \varphi$ となるようなものが存在するが，この T と φ に対し，T がモデルを持たないことから $T \models \varphi$ が vacuously に成り立つ．したがって，この T と φ は (1) の反例になっている．

また

(3) T がモデルを持つなら T は無矛盾である

も証明の体系の健全性から正しい（ $\mathfrak{A}$ を T のモデルとすれば $\mathfrak{A} \not\models x \not\equiv x$ だから，$T \nvdash x \not\equiv x$ である）.

これらの事実を用いてコンパクト性定理が示せる．

T をすべての有限部分がモデルを持つような理論とすると，(3) により T のすべての有限部分は無矛盾である．このことから T 自身も無矛盾であることがわかる: もし T が矛盾するとすれば $T \vdash x \not\equiv x$ だが，P を $x \not\equiv x$ の T からの証明とすれば，P は有限列なので，P には T の有限個の公理しか含まれない．それらの全体を T' とすれば，P により $T' \vdash x \not\equiv x$ だが，これは，T のすべての有限部分が無矛盾であることに矛盾である．

したがって，(2) により，T はモデルを持つ．

4. 次の理論がモデルを持つことを示してください．

$$T = \mathrm{PA} \cup \{S^k(0) \leq c \,:\, k \in \mathbb{N}\}$$

ただし，c は PA の言語に含まれない新しい定数記号とします．また，$x \leq y$ は $\exists z(y \equiv x + z)$ として定義される論理式とします．

T のモデルは $\leq$ に関する無限下降列を持つことを示してください．

ここでは $x \leq y$ は $\exists z(y = x + z)$ など自然数上の順序 $\leq$ を L_{PA} で定義する論理式の一つの略と考えていることに注意する．

$n \in \mathbb{N}$ に対し，$T_n = \mathrm{PA} \cup \{S^k(0) \leq c : k \leq n\}$ とする．T' を T の有限部分集合とすると十分に大きな $n \in \mathbb{N}$ に対し $T' \subseteq T_n$ とできる．

$\mathfrak{N}_n = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, \ldots, n \rangle$ とする．ただし $n \in \mathbb{N}$ は定数記号 c の解釈である．このとき明らかに $\mathfrak{N}_n \models T_n$ だから，$\mathfrak{N}_n \models T'$ である．

以上により T のすべての有限部分はモデルを持つことが示せたから，コンパクト性定理により T はモデルを持つ．$\mathfrak{M}$ を T のモデルの一つとすると，$\mathfrak{M}$ の中で，

$a_0 = c^{\mathfrak{M}}$;

a_{n+1} は $S(a) = a_n$ となるような $\mathfrak{M}$ の要素 a

とすると．各 a_n は，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathfrak{M} \models S^k(0) \leq a_n$ を満たすことが示せるので，特に a_n は 0 と異るから，$S(a) = s_n$ となる $\mathfrak{M}$ の要素 a は実際にとることができ，上の構成はどこまでも続けることができる．したがって，$\mathfrak{M}$ の中に無限下降列 $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を定義することができることがわかる．

以上.