

以下の問題を解いてください。ただし、解答は、できるだけ、答がなぜ答になっているかの説明がされているようなものにしてください。

答だけが説明なしに書かれていても解答とは見なさせないこともあるので注意してください。

1 $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ として、 L -構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ を考える。このとき、

(a) $\mathcal{N} \models \varphi(m, n) \Leftrightarrow m \leq n$

がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L -論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ。

(b) $\mathcal{N} \models \varphi(m, n) \Leftrightarrow m$ は n の倍数

がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L -論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ。

(c) $\mathcal{N} \models \varphi(l, m, n) \Leftrightarrow l$ は m と n の最小公倍数

がすべての $l, m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L -論理式 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ を与えよ。

2 f を 1 変数関数記号として、 $L = \{0, 1, +, \cdot, f\}$ を考える。

(a) 任意の $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R}$ について、

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^* \rangle \models \varphi[a, b] \Leftrightarrow f^*(a) \leq f^*(b) \text{ となる}$$

が成り立つような L -論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ。

(b) 任意の $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について、

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^* \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^* \text{ の値は常に } 0 \text{ と異なり, 関数 } \frac{1}{f^*(x)} \text{ は増加関数である}$$

が成り立つような L -文 φ を与えよ。

| A | B | φ |
|---|---|-----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

3 右の真偽表を満たすような命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A, B)$ を作れ:

4 以下では、 K で、講義で用いたような、述語論理の

推論の体系をあらわす。

(a) 真偽表を作って、命題論理の論理式 $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ がトートロジーであることを示せ。

(b) L を言語として、 φ, ψ を任意の L -論理式とすると、 $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi))$ が K の公理であることを示せ。

(c) T を L -論理式として φ, ψ を L -論理式とする。 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle$ が K での $(\varphi \rightarrow \psi)$ の T からの証明であるとき、 $P' = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \varphi_{p+2} \rangle$ が K での $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ の T からの証明になるような $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}$ を求めよ。求めた P' がなぜ $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ の証明になっているかを説明せよ。

5 次の定理の証明で、下線を引いた (1), (2), (3) の主張が正しいことの理由を説明せよ。

定理。(述語論理のコンパクト性定理) 任意の言語 L に対し、 T を L -文の集まりとする。 T のすべての有限部分集合がモデルを持つとき T 自身もモデルを持つ。

証明。 T をすべての有限部分がモデルを持つような理論とすると、

T のすべての有限部分は無矛盾である(1) このことから、 T 自身も無矛盾であることがわかる(2) したがって、 T はモデルを持つ(3)。

6 L を任意の言語とすると、 L -文 φ で、任意の L -構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ に対し、

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow A \text{ は有限}$$

となるようなものは存在しないことを証明せよ (ヒント: 6. のコンパクト性定理を用いて背理法で示す)。