数理論理学　演習レポート No.1 と解答例

担当: 渕野 昌 **2012 年 05 月 23 日**

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキス等でとじたものを 6 月 6 日の 講義の初め に提出してください．

解答は，それがどうやって得られたのか，など,（日本語で）詳しく説明するような書き方にしてください（日本語に自信のない場合には英語で書いてもいいです）．結果だけが書かれていて，なぜそう言えるのかについての説明の不十分なものは解答とは認めません．ただし，これは，だらだらと長い解答を書けばいいと言っているわけではありません．要点をおさえた，わかりやすく簡潔な説明を工夫してください．

レポートは返却しないので，自分用のコピーをとっておいてください．

この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss12-uebung1.pdf`

としてダウンロードできます．問題の提出期限後に，同じ URL に問題の解答例を加えたファイルを upload する予定です．

---

1. 命題変数の集合 PropVar を固定しておき，PropVar の命題変数を用いた命題論理の論理式の全体を PFml と書くことにする．関数 $\Phi : \mathsf{PFml} \to \mathsf{PFml}$ を，論理式の構成に関する再帰により，次のように定義する:

(1) $\varphi \in \mathsf{PFml}$ が命題変数のときには，$\Phi(\varphi) = \varphi$ とする．

(2) φ が $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ で $\Phi(\varphi_1) = \psi_1$, $\Phi(\varphi_2 = \psi_2)$ のとき，$\Phi(\varphi) = (\neg\psi_1 \lor \psi_2)$ とする．

(3) φ が $(\varphi_1 \land \varphi_2)$ で $\Phi(\varphi_1) = \psi_1$, $\Phi(\varphi_2 = \psi_2)$ のとき，$\Phi(\varphi) = \neg(\neg\psi_1 \lor \neg\psi_2)$ とする．

(4) φ が $(\varphi_1 \lor \varphi_2)$ で $\Phi(\varphi_1) = \psi_1$, $\Phi(\varphi_2 = \psi_2)$ のとき，$\Phi(\varphi) = (\psi_1 \lor \psi_2)$ とする．

(5) φ が $\neg\varphi_1$ で $\Phi(\varphi_1) = \psi_1$ のとき，$\Phi(\varphi) = \neg\psi_1$ とする．

このとき,

(a) すべての $\varphi \in \mathsf{PFml}$ に対し，$\Phi(\varphi)$ は $\neg$ と $\lor$ のみを論理記号として含む命題論理の論理式になっていることを示せ．

(b) すべての論理式 $\varphi \in \mathsf{PFml}$ に対し，$\varphi \models\!\!\!\models \Phi(\varphi)$ となることを示せ．

2. $\{\neg, \to\}$ が functionally complete であることを示せ．

3. 次の論理式が tautology かどうかを調べよ:

(a) $(((P \to Q) \to P) \to P)$

(b) $((P \to Q) \lor (Q \to P))$

4.

(a) n を任意の自然数とする．任意のグラフ $\langle G, E\rangle$ に対し，$\langle G, E\rangle$ のすべての有限部分グラフが n 色で (辺で隣合う頂点は必ず異る色になるように) 色分けできるなら，$\langle G, E\rangle$ 自身も n 色で色分けできることを命題論理のコンパクト性定理を用いて証明せよ．

(b) 有限個の色では色分けのできないようなグラフの例を示せ．

5. ψ_0, ψ_1, ψ_2 をそれぞれ,

$$(A \leftrightarrow B),$$
$$\neg((A \to B) \to (\neg(B \to A))),$$
$$((\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B))$$

とするとき，$(\psi_i \to \psi_j)$ が tautology になるような，$\psi_i, \psi_j, i, j, < 3, i \neq j$ の組をすべて求めよ．ただし，ψ_0 の定義での $(A \leftrightarrow B)$ は $((A \to B) \wedge (B \to A))$ の略記と考える．

6. ある町には常に正しいことを言う人と，常に正しいことの反対を言う人のみが住んでいるという．今この町に入ったところで T 字路があってその角にこの町の住人の１人が立っていた．この人から町の中心に行くには右に曲がったらいいのか左に曲がったらいいのかかを聞きたい．ただし，時間がないため,「はい」か「いいえ」で答えられる質問を１回しかすることができない．正しい情報を得るにはどんな質問をしたらよいか？ もちろん余所者の私にはこの人が常に正しいことを言う人なのか常に正しいことの反対を言う人なのかは分らない．求めた質問が求めるような性質を持っていることを真偽表を書いて説明せよ．

7. T 字路の先の片方の道は天国に続き，もう片方の道は地獄に続いている．この角に 3 人の聖人が坐っている．１人は，常に正しいことを言い，もう１人は，常に正しいことの反対を言う．三人目の言うことは正しかったり正しくなかったりする．ただし，この 3 人のうちの誰がどの答えかたをする人なのかは判っていない．この 3 人の聖人のうちの 2 人に (同一人物でもよい)「はい」か「いいえ」で答えられる質問をそれぞれ 1 つづつして (同一人物の場合には同じ人に 2 つの質問をする)，天国へ行く道がどちらかなのを聞きだすには，どんな質問をどのようにしたらよいか？

8. 殺人の容疑者が 3 人いる． Adams, Brown と Clark である．Adams は 「おれはやってねえ．死んだやつは Brown の古い友達だが Clark はそいつを憎んでいたんだ.」と言った．Brown は 「おれはやっていねえ．死んだやつとは会ったこともない．それに，その週はずっと町にはいなかったんだ.」 と言った．Clark は「やったのはおれじゃねえ．あの日に Adams と Brown がダウンタウンで死んだやつと一緒にいるのを見てるんだ．2 人のうちのどちらかがやったに違いない.」と言った．2 人の無実の容疑者が本当のことを言っていて，１人の殺人犯だけが必ずしも本当のことだけを言ってはいないとしたら，誰がやったことになるか[1]？

以上.

[1]演習問題 6. と 8. は，Herbert B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press (2001) に載っていた演習問題の翻案で，演習問題 7. は 6. のバリエーションです．6. と 7. は有名なパズルなので，答を既に知っている人もいるかもしれませんが，その場合でも，答を論理的にきっちりと説明するのは，それほど簡単な課題でないかもしれなくて，その意味では良い演習問題になるはずです．

上の問題のうち，**1.** から **5.** までは，6 月 20 日で予定している演習のときに，もう一度確認してもらおうと思っているので，解答例の掲示は保留にしたいが，論理についての考察のきっかけという意味で付けたしたにすぎない **6.**, **7.**, **8.** については，以下に解答を与えておくことにする．

6: この問題の解答は，(数理論理学の講義では扱わない) 不完全性定理の証明での重要な鍵となる self-reference の変形が用いられる.「あなたは,「町の中心に行く道は左の道か」と聞かれたら,「はい」と答えますか?」という質問が求めるようなものになっていることを場合分けで示すことができる: ここで考えなくてはいけない場合は，1. 左の道が町の中心に行く道で，質問を受けた人が常に正しいことを言う人の場合 2. 左の道が町の中心に行く道で，質問を受けた人が常に真実と反対のことを言う人の場合，3. 右の道が町の中心に行く道で，質問を受けた人が常に正しいことを言う人の場合 4. 右の道が町の中心に行く道で，質問を受けた人が常に真実と反対のことを言う人の場合の 4 つである．

7.: **6** のアイデアを 2 回応用すればいい．3 人のうちの 1 人に,「あなたは,「あなたの右にいる人 (あるいは左にいる人) はあなた以外の 2 人のうち常に本当のことを言う聖人ですか」と聞いたら「はい」と答えますか?」 と一つめの問で聞く．その答を使って気紛れな答をする聖人ではない 1 人が特定できるので，この 1 人に 2 つ目の問として **6** と同じタイプの質問をすればよい．

8.: もし Adams が嘘を言っているのなら，Brown と Clark は正しいことを言っていなくてはならないがそうだとすると Clark の証言から Brown は町にいたことになり Brown の証言に矛盾する．もし Brown が嘘を言っているのなら，Adams と Clark は正しいことを言っていることになるが，2 人の証言は矛盾しない．もし Clark が嘘を言っているとすると，Adams の証言から Brown は殺された人の知合いということになるが，これは Brown の証言に矛盾する．したがって，Brown が殺人をおかして嘘を言っている，というのが唯一の可能性として残ることになる．