数理論理学　追加の演習問題

担当:　渕野 昌 **2014 年 07 月 22 日**

期末試験では，演習 I, 演習 II の問題 (の類題) と以下の問題のうちのいくつかが，出題の大半となる予定です．
これらの演習の問題は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss14-additional-problems.pdf`

としてダウンロードできます.

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/logic-ss13.pdf`

を参照してください.

演習や講義の内容に質問があるときには，メール (`fuchinodiamond-kobe-u.ac.jp`) であらかじめ連絡をとって来いただけると助かります.

---

1. φ をある言語 $\mathcal{L}$ での任意の $\mathcal{L}$-論理式とする．このとき次を示せ:

(a) φ が恒真になるのは，$\forall x\varphi$ が恒真となる丁度そのときである．

(b) Δ を $\mathcal{L}$-文の有限集合として，シークエント $\Delta \Rightarrow \varphi$ が証明可能なら，$\Delta \Rightarrow \forall x\varphi$ も (述語論理の証明の体系 LK で) 証明可能であることを示せ.

ただし上の (a), (b) では $\forall x\varphi$ は講義でと同じく，$\neg\exists\neg\varphi$ の略記として扱かっているものとする.

2. 命題論理の完全性定理を用いて次を示せ: $\mathcal{L}$-論理式 φ が命題論理の論理式 $\psi = \psi(A_0, ..., A_{n-1})$ の命題変数 $A_0, ..., A_{n-1}$ にある $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ をそれぞれ代入することで得られる論理式とするとき，シークエント $\Rightarrow \varphi$ は述語論理の証明の体系 LK で証明可能である.

3. R を 2 変数の関係記号とする．言語 $\mathcal{L}$ が R を含むとして，次の $\mathcal{L}$-論理式のうち恒真なものはどれかを答えよ．これらの論理式が，なぜ恒真である (または恒真でない) かを説明せよ.

(a) $\forall x\exists yR(x, y) \rightarrow \exists y\forall xR(x, y)$　(b) $\forall x\exists yR(x, y) \rightarrow \forall y\forall xR(x, y)$
(c) $\exists x\forall yR(x, y) \rightarrow \forall yR(x, y)$　(d) $\forall x\forall yR(x, y) \rightarrow \forall yR(x, y)$
(e) $\forall x\exists y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$　(f) $\forall x\exists y(R(x, y) \rightarrow R(x, y))$
(g) $\forall x(R(x, y) \rightarrow R(x, y))$

ヒント. ある論理式が恒真であることは，その論理式が構造で解釈されたときにどういう意味になるかを考えて，その意味がどの構造でも成り立つことを示せば言える．ある $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ が恒真でないことを示すには，ある $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots\rangle$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ で $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ となるものがあること示せばよい.

以上.