

担当: 淵野 昌

2014年05月14日

以下の問題をできるだけ自力で解いてください:

この演習の問題用紙は,

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss14-uebung1.pdf>

としてダウンロードできます.

演習の解答を整理したものを, レポートとしてまとめて A4 レポート用紙に書いたものを 5月21日の講義の始まる前に提出してください. 複数枚の紙があるときにはホチキスでとめてください. 解答は返却しないので必要ならコピーをとっておいてください.

1. 次を示せ:

(a) $(A_0 \rightarrow A_1) \models (\neg A_0 \vee A_1)$,

(b) $(A_0 \wedge A_1) \models \neg(\neg A_0 \vee \neg A_1)$,

(c) $\neg\neg A_0 \models A_0$.

2. $((A_0 \rightarrow A_1) \rightarrow A_2) \models (A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$ を示せ.

3. 全てのブール関数は \neg と \vee だけが論理記号として現れる論理式の関数解釈として表わせることを示せ. (ヒント: Disjunctive Normal Form Theorem と [1], (b) を用いる)

4. すべての論理式 φ, ψ に対し, $\varphi \models \psi$ となるのは, $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ がトートロジーになるちょうどそのときであることを示せ.

5. (a) $\varphi = \varphi(A_0, \dots, A_{n-1})$ を $\vee, \wedge, \rightarrow$ のみが論理記号として現れる論理式とする. $f = f_{\varphi(A_0, \dots, A_{n-1})}$ とする. このとき, $t_0, \dots, t_{n-1}, t'_0, \dots, t'_{n-1} \in \mathbb{2}$ が, $t_0 \leq t'_0, \dots, t_{n-1} \leq t'_{n-1}$ を満たすなら, $f(t_0, \dots, t_{n-1}) \leq f(t'_0, \dots, t'_{n-1})$ となることを示せ. (ヒント: φ の構成に関する帰納法で示す.)

[問題の訂正: “ $\vee, \wedge, \rightarrow$ のみが” \rightarrow “ \vee, \wedge のみが”]

(b) ブール関数で, $\vee, \wedge, \rightarrow$ のみが論理記号として現れる論理式の解釈としては表わせないものがあることを示せ. (ヒント: (a) を応用する.)

以上.