数理論理学　演習 II

担当:　渕野 昌　　　　**2014 年 07 月 02 日**

以下の問題をできるだけ自力で解いてください:
　この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss14-uebung2.pdf`

としてダウンロードできます.
演習の解答を整理したものを，レポートとしてまとめて A4 レポート用紙に書いたものを 7 月 23 日に設定している補講の講義の始まる前に提出してください．複数枚の紙があるときにはホチキスでとめてください．解答は返却しないので必要ならコピーをとっておいてください.

— 7 月 16 日の講義は，休講とします.
以下の演習問題には講義でまだ扱っていない事柄も多少含まれている可能性があります．これについては，講義録

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/logic-ss13.pdf`

を参照してください.
演習や講義の内容に質問があるときには，メール (`fuchinodiamond-kobe-u.ac.jp`) であらかじめ連絡をとって来いただけると助かります．7 月 16 日の週の前後は出張で不在ですがこの週でも，私の研究グループの酒井先生 (私の居室 (自然科学総合研究棟 3 号館 4 階) の隣です)，菊池先生，薄葉先生 (2 人とも酒井先生の居室の横にあるガラスのドアを入ったところにいます) のどなたかに聞くこともできると思います.

— 期末テストでは前回と今回の演習で出した問題の類題が出題する問題の全体の 80 % くらいになる予定です.

$\boxed{\textbf{1.}}$ 次の $\vdots$ を補って，上のシークエントから下のシークエントを導く LK での証明を作成せよ (証明は，初式から始まる他の枝を持つものになってもよい):

(a)
$$\begin{array}{c} \Rightarrow (\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\neg\xi \vee \eta)) \\ \hline \vdots \\ \hline \Rightarrow \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\xi, \eta \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c} \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \\ \hline \vdots \\ \hline \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ コンパクト性定理を用いて，すべての半順序は全順序に拡張できることを証明せよ．ただし，有限集合の上の半順序については，それが全順序に拡張できることは既知とする.

$\boxed{\textbf{3.}}$ グラフ $G = \langle G, A\rangle$ について，G の chromatic number $chr(G)$ を，
$chr(G) = min\{n \in \mathbb{N} : G$ は n-色塗り分けが可能である $\}$ とする．この意味の $chr(G)$ が定義されているとき $chr(G) < \infty$ であると言うことにする．コンパクト性定理を用いて次を示せ:
定理 (De Bruijn–Erdős の定理)　　任意のグラフ G に対し，$chr(G) < \infty$ なら，
$$chr(G) = \max\{chr(G') : G' \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$$
が成り立つ.

$\boxed{\textbf{4.}}$ $\mathcal{L} = \{0, 1, +, <\}$ とする．ただし，0, 1 は定数記号，$+$ は 2 変数の関数記号，$<$ は 2 変数の関係記号とする．次の a. ∼ l. の $\mathcal{L}$-文 φ が恒真かどうかを調べよ．恒真でないものについては，それが恒真でないことを示す反例 (つまり $\mathfrak{A} \models \varphi$ でないような $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$) を与えよ.

a. $\forall x \forall y\, (x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$
b. $\exists x \exists y\, (x \equiv y \wedge \neg x \equiv y)$
c. $(\forall x\, x + x \equiv 1 \rightarrow (\exists x\, x + x \equiv 0 \rightarrow \forall x\, x + x \equiv 1))$
d. $\forall x \forall y \forall y'\, ((x + y \equiv 0 \wedge x + y' \equiv 0) \rightarrow y \equiv y')$
e. $\forall x \exists y\, x + y \equiv 0$
f. $\exists x \forall y\, y < x$
h. $\forall x \forall y\, (x \equiv y \rightarrow x + 1 \equiv y + 1)$
i. $\forall x \forall y\, (x + 1 \equiv y + 1 \rightarrow x \equiv y)$
j. $\exists x\, (\neg x \equiv 0 \wedge \neg y \equiv 1)$

k. $(\forall x\, x+0 \equiv x \to 1+0 \equiv 1)$
l. $(\forall x\, x+0 \equiv x \to 0+1 \equiv 1)$

$\boxed{\textbf{5.}}$ 上の $\boxed{\textbf{4.}}$ a. ∼ l. での $\mathcal{L}$-文のうち，命題論理のトートロジーの命題記号に $\mathcal{L}$-論理式を代入することで得られているものはどれかを答えよ．

$\boxed{\textbf{6.}}$ $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, f, <\}$ とする．ただし，0, 1 は定数記号，+, · は 2 変数の関数記号，f は 1 変数の関数記号，$<$ は 2 変数の関係記号とする．
$f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{R}_{f^*}$ を $\mathfrak{R}_{f^*} = (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, f^*, <^{\mathbb{R}})$ と定義する．ただし，$0^{\mathbb{R}}$, $1^{\mathbb{R}}$ は通常の数 0, 1 で，$+^{\mathbb{R}}$, $\cdot^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の足し算とかけ算，また $<^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の大小関係とする．
このとき，すべての $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，次の性質が成り立つような $\mathcal{L}$-文 $\varphi_1 \sim \varphi_7$ を求めよ:

a. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_1 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は偶関数,
b. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_2 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は増加関数,
c. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_3 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0} f^*(x) = 0$,
d. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_4 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は連続関数,
e. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_5 \;\Leftrightarrow\;$ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f^*(x) = \sqrt{2}\,x$,
f. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_6 \;\Leftrightarrow\;$ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f^*(x) = 2^x$,
g. $\mathfrak{R}_{f^*} \models \varphi_7 \;\Leftrightarrow\; f^*$ は 0 で微分可能で，f^* の 0 での微分係数は 2 である．

$\boxed{\textbf{7.}}$ $\mathcal{L}$ を任意の言語として，φ を $\mathcal{L}$ 論理式とするとき，シークエント $\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ の述語論理の LK での証明を与えよ．

$\boxed{\textbf{8.}}$ シークエント $\forall x \exists y \varphi \Rightarrow \exists y \forall x \varphi$ は一般には証明可能でないことを示せ．

$\boxed{\textbf{9.}}$ $\mathcal{L}$ を任意の言語として s_0, s_1, s_2 を $\mathcal{L}$-項とするとき，シークエント $s_0 \equiv s_1, s_1 \equiv s_2 \Rightarrow s_0 \equiv s_2$ の $\mathsf{LK_e}$ での証明を与えよ．

以上．

解説． (2014 年 07 月 28 日) 以下の解説は，ヒントや解答の方針の説明です．丸写ししてレポートの解答や試験の答案になるとは必ずしも限らない書き方になっていることに注意してください．
議論の細部は多くは省略されています．また "…の定義により", "定理 xxx から" などと書いてあるときには "…の定義" や "定理 xxx" をどう応用してその結論が得られるかのチェックは読者の課題として，いちいち述べていないことにも注意してください．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a):

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \Delta, (\alpha \vee \beta)}{\vdots}}{\Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}$$

が示せれば，これを組み合わせることで答が得られる．これは，

$$\dfrac{\Rightarrow \Delta, (\alpha \vee \beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta}\ (\text{weakening}) \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha, \beta}\ (\text{weakening})}{(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \alpha, \beta}\ (\vee\text{-左})}{\Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}\ (\text{cut})$$

によりよい．

(b):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\varphi}\ (\neg\text{-右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\neg\text{-右})}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\neg\text{-左})}{}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\text{cut})$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ を半順序として，$A_{p,q}$, $p, q \in P$ をそれぞれ異る命題記号とする．

$$T = \{A_{p,q} : p, q \in P,\, p \leq q\} \cup \{A_{p,p} : p \in P\} \cup \{((A_{p,q} \wedge A_{q,r}) \rightarrow A_{p,r}) : p, q, r \in P\}$$
$$\cup \{(A_{p,q} \rightarrow \neg A_{q,p}) : p, q \in P,\, p \neq q\} \cup \{(A_{p,q} \vee A_{q,p}) : p, q \in P\}$$

として，以下を示せばよい:
(1) 付値 v が T のモデルになっている (つまり $v \models T$) とすると，$p, q \in P$ に対し，

$$p \sqsubseteq q :\Leftrightarrow v(A_{p,q}) = 1$$

として， P 上の二項関係 $\sqsubseteq$ を定義すると $\sqsubseteq$ は $\leq$ を拡張する P 上の線形順序になっている．
(2) T は充足可能である (これを示すのにコンパクト性定理を用いる)．

$\boxed{\mathbf{3.}}$ グラフ G が n 色で塗り分け可能で $m \geq n$ なら G は m 色で塗り分け可能であることに注意する．また G が n 色で塗り分け可能なら G の部分グラフも n 色で塗り分け可能である．したがって，すべてのグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し，

$$chr(G) \geq \max\{chr(G') : G' \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$$

である．
このことから，もし $\langle G, E \rangle$ が定理の反例になっているとすると，$chr(G) > \max\{chr(G') : G'$ は G の有限部分グラフ$\}$ である．$n = \max\{chr(G') : G'$ は G の有限部分グラフ$\}$ として Γ を 6 月 25 日の講義でのような命題論理の論理式の集合とすると，コンパクト性定理から，Γ は充足可能となるが，このことから G は n 色で色分け可能となってしまい，$chr(G) > n$ に矛盾である．

$\boxed{\mathbf{4.}}$ $+\boxed{\mathbf{5.}}$ **a.** : $(x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$ は命題論理でのトートロジー $(A \vee \neg A)$ の命題変数 A に $x \equiv y$ を代入して得られる論理式だから，恒真である．したがって，$\forall x \forall y\, (x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$ も恒真である．

b. : $(x \equiv y \wedge \neg x \equiv y)$ は矛盾する命題論理の論理式 $(A \wedge \neg A)$ の命題変数 A に $x \equiv y$ を代入して得られる論理式だから，どのような解釈によっても成り立たない，したがって $\exists x \exists y\,(x \equiv y \wedge \neg x \equiv y)$ もどの構造でも成り立たないことがわかる．

c. : この論理式はトートロジー $(A \to (B \to A))$ の命題変数 A, B に，それぞれ $\forall x\, x + x \equiv 1$, $\exists x\, x + x \equiv 0$ を代入して得られる論理式だら，恒真である．

d. : たとえば，$\mathfrak{A} = (A, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \leq^{\mathfrak{A}})$ を，$A = \{0,1\}$ $0^{\mathfrak{A}} = 0$, すべての $a, b \in \{0,1\}$ に対し $a +^{\mathfrak{A}} b = 0$ となるようなものとすると．$0^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} 0^{\mathfrak{A}} = 0^{\mathfrak{A}}$ で $0^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} = 0^{\mathfrak{A}}$ だが，$0^{\mathfrak{A}} \neq 1^{\mathfrak{A}}$ だから，$\mathfrak{A} \not\models \forall x \forall y \forall y'\,((x + y \equiv 0 \wedge x + y' \equiv 0) \to y \equiv y')$ である．
以下略.

$\boxed{\textbf{6.}}$ **a.**: $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が偶関数とは，すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^*(a) = -f^*(-x)$ となることだった．ここでの言語 (の解釈) には関数 $-(\cdot)$ は含まれていないが，$\mathbb{R}$ で $y = -x$ となることと $y + x = 0$ となることは同値であることを用いると，φ_1 として

$$\forall x \forall y (x + y \equiv 0 \to f(x) + f(y) \equiv 0)$$

をとると，これが求めるものであることがわかる．

b. : $x \leq y$ は $\mathcal{L}$ では $(x < y \vee x \equiv y)$ で表現できるので，これを用いて “f は増加関数である” を自然に表現できる．

c. : 「$\lim_{x \to 0} f^*(x) = 0$」 は,

(*) すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を (十分に小さく) とると，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$|x| < \delta$ なら，$|f^*(x)| < \varepsilon$ となるようにできる

と表現される．この命題，あるいはこの命題と同値な命題に対応する内容を表現する $\mathcal{L}$-論理式を φ_3 としてとればよい．ただし，ここでの “(十分に小さく)” は，この ε-δ 論法と呼ばれる議論の仕方の内容の「心理的な」理解の助けのために書き足したもので実質的な内容には影響しない．これは以下でも同様である．φ_3 として，たとえば,

$$\forall x (0 < x \to \exists y (0 < y \wedge \forall z\,(z \cdot z < y \cdot y \to f(z) \cdot f(z) < x \cdot x)))$$

をとると，これは求めるようなものになっている．この式での変数記号 x, y, z は，それぞれ上の (*) での ε, δ, x に対応している．

d. : 「f^* は連続関数」は,

すべての $a \in \mathbb{R}$ とすべての $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ を (十分に小さく) とると，$|a - x| < \delta$ となるすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ のなるようにできる

と表現できる．これは **c.** の解説でと同じような手法で $\mathcal{L}$-論理式として表現できる．

e. : 略.

f. : 「すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f^*(x) = 2^x$ である」は,

f^* は連続で，$f^*(1) = 2$ で，すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $f^*(x+y) = f^*(x)f^*(y)$ である

と同値である (後半の条件からすべての有理数 x に対し $f^*(x) = 2^x$ となることがわかるので，連続性から，すべての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対しても $f^*(x) = 2^x$ となることが帰結できる)．f^* が連続であることは，**d.** を用いて表現でき，条件の後半は $\mathcal{L}$-論理式として容易に表現できる．

g. : これには，“$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$” を言えばよいが，この条件は **c.** と同様のやり方で表現できる．

$\boxed{\textbf{7.}}$: $\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ は，ここでは $\exists x \neg \exists y \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists y \neg \exists x \varphi$ の略記として扱っていることに注意する．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,(\neg\text{-右})}{\Rightarrow \varphi, \exists y\neg\varphi}\,(\exists\text{-右})}{\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\neg\text{-左})}{\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\,(\exists\text{-右})}{\exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\,(\exists\text{-左})}{\neg\exists x\varphi, \exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\exists y\neg\exists x\varphi, \exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow}\,(\exists\text{-左})}{\exists x\neg\exists y\neg\varphi \Rightarrow \neg\exists y\neg\exists x\varphi}\,(\neg\text{-右})
$$

8. ：もし，$\forall x\exists y\varphi \Rightarrow \exists y\forall x\varphi$ が一般に証明できたとすると，$\mathsf{LK_e}$ の健全性から，φ としてどのような論理式をとったときにも，$\forall x\exists y\varphi \rightarrow \exists y\forall x\varphi$ は恒真にならなくてはならない．しかし，たとえば，φ として $x + x \equiv y$ をとると，$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}} \rangle$ として，$\mathfrak{A} \models \forall x\exists y\ x + x \equiv y$ だが，$\mathfrak{A} \not\models \exists x\forall y\ x + x \equiv y$ だから，$\forall x\exists y\varphi \rightarrow \exists y\forall x\varphi$ は恒真でない．

9. ：$s_0 \equiv s_0$, $s_1 \equiv s_2, s_0 \equiv s_1 \Rightarrow s_0 \equiv s_2$ は，$\mathsf{LK_e}$ での (7 月 23 日の講義で導入した) 等号に関する初式 (3) で $f(x_0, x_1)$ を $x_0 \equiv x_1$ としたものとなっている．これと (1) のタイプの初式 $\Rightarrow s_0 \equiv s_0$ に cut をほどこして，

$$
\dfrac{\Rightarrow s_0 \equiv s_0 \qquad s_0 \equiv s_0,\ s_1 \equiv s_2, s_0 \equiv s_1 \Rightarrow s_0 \equiv s_2}{s_0 \equiv s_1, s_1 \equiv s_2 \Rightarrow s_0 \equiv s_2}\,(\mathrm{cut})
$$