数理論理学　演習 I

担当:　渕野 昌　　+解答の方針(の一つ)　　2015 年 06 月 10 日

以下の問題をできるだけ自力で解いてください:
A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキス等でとじたものを 6 月 17 日の 講義の初め に (教卓の上に) 提出してください.

解答は，それがどうやって得られたのか，など，(日本語で）詳しく説明するような書き方にしてください（日本語に自信のない場合には英語で書いてもいいです）. 結果だけが書かれていて，なぜそう言えるのかについての説明の不十分なものは解答とは認めません．ただし，これは，だらだらと長い解答を書けばいいと言っているわけではありません．要点をおさえた，わかりやすく簡潔な説明を工夫してください．

レポートは返却しないので，自分用のコピーをとっておいてください．

この演習の問題用紙は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss15-uebung1.pdf

としてダウンロードできます．

演習の解答を整理したものを，レポートとしてまとめて A4 レポート用紙に書いたものを 5 月 21 日の講義の始まる前に提出してください．複数枚の紙があるときにはホチキスでとめてください．解答は返却しないので必要ならコピーをとっておいてください．

---

1. 次を示せ:

両辺の論理式のブール関数への解釈が等しいことを，真偽値表を作成し比較して確かめればよい.

(a) $(A_0 \rightarrow A_1) \mathrel{\models\!\dashv} (\neg A_0 \vee A_1)$,

(b) $(A_0 \wedge A_1) \mathrel{\models\!\dashv} \neg(\neg A_0 \vee \neg A_1)$,

(c) $\neg\neg A_0 \mathrel{\models\!\dashv} A_0$.

A_0	A_1	A_2	φ	ψ
0	1	0	0	1

により $\cdots \not\models \cdots$ である

2. $(\underbrace{(A_0 \rightarrow A_1) \rightarrow A_2}_{\varphi}) \not\mathrel{\models\!\dashv} \underbrace{(A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))}_{\psi\text{ とする}}$ を示せ.

3. 全てのブール関数は $\neg$ と $\rightarrow$ だけが論理記号として現れる論理式の関数解釈として表わせる (つまり $\{\neg, \rightarrow\}$ は関数的完全である) ことを示せ.

4. すべての論理式 φ, ψ に対し, $\varphi \mathrel{\models\!\dashv} \psi$ となるのは, $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ がトートロジーになるちょうどそのときであることを示せ.

$\varphi = \varphi(A_0, \ldots, A_{m-1})$
$\psi = \psi(A_0, \ldots, A_{m-1})$
とすると，$\varphi \mathrel{\models\!\dashv} \psi$ なら
$f_\varphi(i_0 \cdots) = f_\psi(i_0 \cdots) = 0$ または 1
for all $i_0, \ldots \in 2$
だが $\cdots = 0$ の場合も $\cdots = 1$ の場合にも
$f_\eta(i_0, \ldots) = 1$ となるから η は universally valid である もし η が univ. valid でなければ
$f_\eta(i_0, \ldots) = 0$ となる $i_0, \ldots \in 2$ が とれるが このとき $f_\varphi(i_0 \ldots) = f_\psi(i_0 \ldots)$ ではありえない.

$(\varphi \vee \psi) \mathrel{\models\!\dashv} (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
$(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\models\!\dashv} \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
と $\{\neg, \vee, \wedge\}$ の関数的完全性からよい

5. 論理式 φ, ψ に対し $(\varphi|\psi)$ の解釈が,

f_φ	f_ψ	$f_{(\varphi\|\psi)}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

となるようなものとして導入される論理演算は, Sheffer operation と呼ばれる.

(a) $(\varphi|\psi)$ を φ, ψ, $\neg$, $\wedge$ の組合せで表わせ.

(b) $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ は φ, ψ, $|$ の組合せで表わせることを示せ. このことから $\{|\}$ が関数的完全であることが結論できることを説明せよ.

たとえば
$(\varphi|\psi) \mathrel{\models\!\dashv} \neg(\varphi \wedge \psi)$

たとえば
$\neg\varphi \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi | \varphi)$
$(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\models\!\dashv} ((\varphi|\psi)|(\varphi|\psi))$

6. 次の $\vdots$ を補って, 上のシークエントから下のシークエントを導く LK での証明を作成せよ (証明は, 初式から始まる他の枝を持つものになってもよい):

(a)
$$\dfrac{\Rightarrow (\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\neg\xi \vee \eta))}{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \neg\xi, \eta}}$$

(b)
$$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow}{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow \varphi}}$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta} \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha, \beta}}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta}}{}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}\ (\text{cut})$$

を組み合わせればよい

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi} \qquad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\text{cut})$$

以下の問題は，6 月 10 日の講義の時間に行った演習の間に補足の問題として追加したものです．

$\boxed{\textbf{7.}}$ 論理式の集まり T と論理式 φ に対し，φ は T から証明可能 (記法: $T \vdash \varphi$) ということを，LK の証明の定義での初式の概念を，

すべての $\psi \in T$ に対して，シークエント $\Rightarrow \psi$ も初式とする

と拡張したときの体系 LK でシークエント $\Rightarrow \varphi$ の証明が存在すること，として定義する．

(a) v : PropVar $\to \mathbb{2}$ を付値とするとき，$v \models T$ で， $T \vdash \varphi$ なら $v \models \varphi$ であることを証明せよ．

$T \vdash \varphi$ の証明の高さに関する帰納法で示す

(b) $T \vdash \varphi$ と，シークエンス $T \Rightarrow \varphi$ が証明可能であることは同値であることを示せ．

$\boxed{\textbf{8.}}$ $\varphi = \varphi(A_1, ..., A_n)$ を論理式として， $\psi_1, ..., \psi_n$ を論理式とするとき，$\varphi(\psi_1, ..., \psi_n)$ で，論理式 φ に現れる命題変数 $A_1, ..., A_n$ をそれぞれ $\psi_1, ..., \psi_n$ で置き換えて得られる論理式とする．

(a) $\varphi = \varphi(A_1, ..., A_n)$, $\varphi' = \varphi'(A_1, ..., A_n)$ で $\varphi \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \varphi'$, $\psi_1 \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \psi_1', ..., \psi_n \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \psi_n'$ のとき，$\varphi(\psi_1, ..., \psi_n) \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \varphi'(\psi_1', ..., \psi_n')$ となることを示せ．

(b) (a) を用いると，$\boxed{\textbf{3.}}$ は $\boxed{\textbf{1.}}$ の応用として解けることを示せ．

φ の構成に関する帰納法で示す

以上．