数理統計学 演習 2 (2013/11/26)

2013 年度 後期 担当: 渕野 昌

教科書の以下の問題を，講義時間中に解いて解答 (結果だけでなく，どう考えて結果が得られるかの説明を言葉 (日本語または英語) で与えること) を配付した用紙に書いて，講義時間の終りに提出してください.

講義時間中に教室を回るので，質問があれば呼びとめてしてください.

なお，この演習の解説を含め，講義に関連する教材を,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html`

にリンクする予定です.

---

① サイコロを 3 回投げたとき，ちょうど 2 回だけ 5 か 6 のどちらかが出る確率を求めよ.

② X を正規分布に従う確率変数として，$E(X) = 1.2, V(X) = 4$ とする．このとき，$P(1.0 \leq X \leq 2.0)$ と $P(1.3 \leq X \leq 1.8)$ を求めよ.

③ 確率変数 X がベルヌーイ試行 $B_N(n, p)$ に従うとき，$\sigma_X^2 = np(1-p)$ となることを示せ (講義で行った $\mu_X = np$ の証明を参考にして，教科書 p.58 下の式の行間を埋めよ．各等式がなぜ成り立つかを説明せよ).

④ ある地域では，ここ 120 年間の資料から，震度 3 以上の地震が 1 年に平均 2.4 回起っていることがわかっている．この地域での震度 3 以上の地震の発生頻度がポアソン分布に従うと仮定したとき，今年 1 年で震度 3 以上の地震がこの地方で 3 回以上起る確率を求めよ.

⑤ ポアソン分布が教科書 p.59 でのような意味での二項分布の極限として求められること，また，ある分布の列の極限の平均と分散は，それぞれ，この列に現れる分布に従う確率変数の平均と分散の極限となることを用いて，ポアソン分布 $Po(\mu)$ に従う確率変数 X の平均と分散が $E(X) = \mu$, $V(X) = \mu$ となることを示せ.

⑥ 上の ④ で，ある時点から 2 年間震度 3 以上の地震が全く起こらない確率を求めよ.

⑦ 確率変数 X が指数分布 $E_X(\lambda)$ に従うとき，$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}, V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ となることを証明せよ.

解答例． (2014 年 01 月 25 日 (00:00 JST) 更新．) ①: 1 から 6 までの数のうちのいくつかの数からなる数列 (重複があってもいい) の全体の個数は 6^3 である．一方 5 か 6 がちょうど 2 回だけあらわれるような長さ 3 の 1 から 6 までの数のうちのいくつかの数からなる数列の全体の個数は $(4 \times 2 \times 2) \times 3$ で計算できるから，求める確率は,

$$\frac{(4 \times 2 \times 2) \times 3}{6^3} = \frac{2}{9}$$

である．

②: $X \sim N(1.2, 2^2)$ だから，$Z = \dfrac{X-1.2}{2}$ とすると，

$$\begin{aligned} P(1.0 \le X \le 2.0) &= P(\frac{1.0-1.2}{2} \le Z \le \frac{2.0-1.2}{2}) \\ &= P(-0.1 \le Z \le 0.4) \\ &= P(0 \le Z \le 0.1) + P(0 \le Z \le 0.3) \end{aligned}$$

となるから，教科書 p.173 の正規分布表を使って，$P(1.0 \le X \le 2.0) \approx 0.0398 + 0.1554 = 0.1952$ である．同様に，

$$\begin{aligned} P(1.3 \le X \le 1.8) &= P(\frac{1.3-1.2}{2} \le Z \le \frac{1.8-1.2}{2}) \\ &= P(0.05 \le Z \le 0.3) \\ &= P(0 \le Z \le 0.3) - P(0 \le Z \le 0.05) \end{aligned}$$

だから，$P(1.3 \le X \le 1.8) \approx 0.1179 - 0.0199 = 0.098$ である．

③: $X \sim B_N(n,p)$ とすると，$E(X) = np$ である:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \left(\sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \right) & ;\ell = k+1 \text{ とおく} \\ &= np \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)} p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell} \right) \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np \end{aligned}$$

同様に計算すると，

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X(X-1) + X) - (E(X))^2 \\ &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k(k-1) {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}}_{\substack{\parallel \\ (*)}} + np - (np)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}\right) \qquad ;\ell = k+1 \text{ とおく} \\
&= n(n-1)p^2\left(\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{\ell!(n-k)!}p^{\ell}(1-p)^{(n-2)-\ell}\right) \\
&= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p)
$$

④ X を年間の震度 3 以上の地震の回数を返す確率変数とすると，仮定は，$X \sim Po(2.4)$ であから，$P(X \geq 3) = 1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)) = 1-e^{-2.4}(\frac{2.4^0}{0!}+\frac{2.4^1}{1!}+\frac{2.4^2}{2!}) \approx 0.43$ となって，震度 3 以上の地震が 3 回以上起る確率は 43% という結果が出る．

⑤: $X \sim B_N(n,p)$ とすると，$E(X) = np, V(X) = np(1-p)$ だから，$np = \mu$ を一定にして $n \to \infty$, $p \to 0$ とすると $V(X)$ は $np = \mu$ に近づく．このことから $X \sim Po(\mu)$ に対して $E(X) = \mu, V(X) = \mu$ となることがわかる．

⑥: ある時点から 2 年間を単位として考えたときにも震度 3 以上の地震の発生回数 X はポアソン分布に従うとしてよいが，このときの平均発生回数は 4.8 である．したがって．$P(X=0) = e^{-4.8}\frac{4.8^0}{0!} = e^{-4.8} \approx 0.008$ したがって震度 3 以上の地震が二年間にわたって 1 回も発生しない確率は 1% 未満であることがわかる．

⑦: