連続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙(ユニヴァース)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

20年2月22日 (12時55分)

以下の文章は、「現代思想」２００７年２月増刊号に収録された同名の論説に基づく。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も再収録した。また、投稿／校正後の加筆訂正も含まれている。

なお、このファイルの最新版は、
https://fuchino.ddo.jp/misc/goedel-universe.pdf
としてダウンロードできる。

4巻はむしろ土屋俊氏と戸田山氏の論文に期待する。数学のテクニックで、プラトニズムが実現できると夢見る「数学狂徒」を奈落の底に突き落としてほしい。([2])

「結局のところ連続体仮説って成り立つんですか、それとも成り立たないんですか?」([1])

1　無限の研究としての集合論

集合論とは何か、という問いに一言で答えなくてはいけないとすると、可能な答の一つは、『集合論とは無限を数学的に研究する学問である』というものであろう。

ただし、一般に無限と言ったとき、多くの場合、そこで起想されるのは、たとえば、0, 1, 2, 3, 4, ... と、次々に数を数え上げてゆくというようなプロセスの（想像上の）極限としての無限（∞）であるのに対し、集合論が扱う、あるいは、扱おうとしている無限は、そのような無限のプロセスがすべて終った後の世界／宇宙(ユニヴァース)においての、すでに存在している絶対的な無限である。このような『絶対的な無限』を考察する、あるいは考察できると考える、という立場に対する懐疑が様々な機会に様々な陣営から繰り返し表明され続けてきた、というのはいわば当然のこととも思われる。

しかし、まさにこのような立場から無限を考えることが、近代以降の数学を行う上で、あるいは近代以降の数学の基礎付けを行う上で不可欠なことでもあった。

このことは、実数体（数直線上の数の全体 ― 連続体 (continuum) と呼ばれることもある）の構成を思い出してみれば明らかである。ここでは、実数体の（標準的な）[1]構成の一つの概略を見てみることにする。まず自然数（つまり $0, 1, 2, 3, \ldots$）の全体（からなる集合）$\mathbb{N}$ の存在を構成の出発点として仮定すると、整数（つまり $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$）の全体（からなる集合）$\mathbb{Z}$ は、$\mathbb{N}$ の２つのコピー（正の数に対応するコピーは $\mathbb{N}$ のままで、負の数に対応するコピーは $\mathbb{N}$ の順序を反転させたもの）をつなげることで得られる。有理数（分数として表せる数）は、$\mathbb{Z}$ の元と $\mathbb{N}$ の 0（ゼロ）と異なる元の組に（これらをそれぞれ分子と分母と解釈することで）対応づけることができる。したがって、このような組のうち約分すると同じ数（の表現）になるものを同一視して[2] 得られる構造を有理数の全体 $\mathbb{Q}$ としてとることができる。

---

(1) ここで与えた実数体の構成はカントルによるものであるが、これと同相な構造を実数体として与えるデデキントの『切断』による構成法も広く知られている（歴史的な興味からは、デデキント自身による解説 [7]（日本語訳：[37]）を参照されたい）。切断の解説はたとえば [24] の付録 I や [23] にもある。

(2) つまり、ここで考えているような組の全体を、『約分すると同じ数（の表現）になる』という同値関係に関する同値類[3]に分割して得られる商構造を考えるということである。このようにして得られた集合 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ とは共通部分を持たないものとなっているが、$z \in \mathbb{Z}$ を、[4] 組 $(z, 1)$ の同値類と同一視することにより、$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ とみなすことができる。

また、ここでの同値関係は、分数の足し算に相当する数の表現の演算と両立する (congruent) ので、このようにして得られる商構造 $\mathbb{Q}$ 上に $\mathbb{Z}$ 上の四則演算を自然に拡張した演算が導入できる。

詳しくは、数学の入門書（たとえば [23] など）を参照されたい。

(3) ある同値関係に関する同値類とは、ひとつの要素とこの同値関係にあるものを集めて得られる集合のことである。ある集合上の同値関係に関するすべての同値類をとると、もとの集合はこれらの同値類への分割になる。

(4) $A \in B$ で『A は集合 B の要素（の一つ）である』をあらわす。この $\in$ はラテン語 elementum の頭文字に由来する記号であろう。

ここで構成した『有理数』の一つ一つは、自然数から有限的な操作で組み立てられたものになっており、その意味で、絶対的な無限を考える／考えられるという立場は、ここまでの構成には積極的に関与してはいない。しかし、次のステップでは『絶対的な無限』を考える立場が必須となる。

解析学では任意の（実数の）収束数列[5]をとってきたときに、それが本当にある数に収束する、という数の体系の性質（完備性）が様々な局面で必要になる。このため、有理数からなる収束数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の全体を考え、これらの数列のうち同じ数に収束するものを同一視[7]することで得られる構造を実数の全体 $\mathbb{R}$ として導入する。有理数の数列の間には、項別の演算による四則演算が導入できるが（たとえば2つの収束数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、その和を数列 $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ として定義する）、『同じ数に収束する』という同値関係は、このような演算と（註（2）で同じ意味で）両立する（congruent になる）ことが示せるので、ここで導入した $\mathbb{R}$ に四則演算が自然に導入でき、しかも、この四則演算は $q\in\mathbb{Q}$ を収束数列 $(a^q_n)_{n\in\mathbb{N}}$（ただし、すべての $n\in\mathbb{N}$ に対し $a^q_n=q$ とする）と同一視したときの $\mathbb{Q}$ 上の四則演算の拡張となる。

（5）収束数列と言うときは収束先の数が存在しなくてはいけないので、ここでの説明は自己矛盾しているように思えるかもしれない。しかし、ここで収束数列と言っているのは、『収束先が存在すべき数列』という意味である。数列 a_n, $n\in\mathbb{N}$ で、n を大きくしたときに、n から先の k での a_k の値の変動の幅がどんどん[6] 0 に近づくときには、（数の体系が完全 — あるいは『完備』 — なら）この数列は、ある『数』に収束するべきであろう。このような数列は19世紀フランスの数学者コーシー（Augustin Louis Cauchy, 1789–1857）にちなんでコーシー列と呼ばれるが、ここで言っている『収束数列』とは、実はこのコーシー列のことである。

（6）ここで『どんどん近づく』と意識的に口語的(slangy)な言い回しで表現した内容は、実際には $\varepsilon\delta$-論法と呼ばれる手法を用いて、より厳密に表現することができる。

（7）ここでも、『同じ数に収束する』という関係は、収束する先の数の存在を仮定することなく導入できる。つまり、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を註（5）の意味での収束数列とするとき（ただし、各 a_n、b_n は $\mathbb{Q}$ の要素とする）、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$（がそれぞれの極限として表現する数）が等しい、ということを、$n\in\mathbb{N}$ を大きくすると、a_n と b_n の差がどんどん 0 に近づく、ということとして定義できる。

このように $\mathbb{R}$ を構成したとき、任意の $\mathbb{R}$ での収束数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し、たとえば、$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ が任意の自然数 $n > 0$ に対し成り立つような有理数の数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとると、$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束数列となり、b をこの数列の同値類とすると、$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = b$ となることが示せる。つまり、ここで構成した $\mathbb{R}$ に対し、一つ前のパラグラフの初めで述べた意味での完備性が成り立つことが示せたことになる。

ここでの、$\mathbb{Q}$ からの $\mathbb{R}$ の構成では、$\mathbb{Q}$ での収束数列をすべて集めてくる、という操作が行われていることに注意する。このためには、無限の項を持つ一つ一つの数列を生成してゆく、というプロセスが[8]（無限の時間の後）完了した世界で、それらの数列の中から収束数列（つまり註(5)の意味でのコーシー列）の全体を集めてくる、ということが可能でなくてはならない。これは、ひとつの具体的な収束数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、その数列の項 a_n が、どんどんある数 a に近づいてゆく、というような議論におけるプロセスの極限としての『無限』を考える立場をはるかに超越した無限のモードである。

もっとも、今日では、近代以降の数学の結果の多くは、うまく工夫をすれば、考察できる無限に関する前提に強い制限を果した体系の中で、記述したり証明したりできることが判ってきている（たとえば、[27] あるいは [35] を参照）。ごく大雑把に言えば、前記の実数の構成に関しては、ここで言う『考察できる無限に関する前提に強い制限を果した体系』とは、$\mathbb{R}$ の構成での、『すべての $\mathbb{Q}$ での収束数列を集めてくる』という操作を、『ある具体的な構成法で得られる $\mathbb{Q}$ での収束数列を集めてくる』という操作[9]で置き換えることで得られる[10]ものである。

（8）これは、収束数列をひとつひとつ作りだしてゆく、というイメージで言えば、むしろ、次の節で述べることになる用語を用いて、『超限時間の後』とでも表現すべきかもしれない。

（9）『ある具体的な構成法』と表現したものの範囲を調節することで、考察できる無限に関する前提への制限の加えかたの度合の異なる複数の体系が得られることになる。

（10）このような体系で数学を行うためには、さまざまな数学の命題を、このようにして得られる実数に関する命題に意訳する必要がある。

しかし、もし数学が、最初からそのようにして制限された枠組の中で展開されることを強要されていたとしたら、近代以降の数学は、我々が今日見るような自由な発展を遂げてはいなかったことであろう。

この意味では、『すでに存在している絶対的な無限』を考えられるかぎり許容する、という集合論の立場は、（数学にとって非常に有効な）プラグマティズムとしてのフィクションにすぎなかった、と言いきってしまうこともできるかもしれない。

しかし、私を含む多くの数学者は、無限がこのように説明されることを好まないであろう。それは、数学者が数学するとき、その数学は本当にそこに『存在している』からである。つまり、数学者が、ある理論、あるいはもっとローカルには、ある理論の細部としての一つの証明が『見えた』と思うときには、彼あるいは彼女は、単に、式の形式的な変形のような演繹の結果として得るべき結果を得ているのではなく、その理論、あるいは証明が、数学的なイデアの世界で、本当に『見えて』いるからである。

このことは、イデアの世界の存在の問題であるよりは、単に我々の思考の生理の問題であるにすぎないのかもしれない[11]。

しかも、ゲーデルの不完全性定理（これについては後でふたたび触れる）によれば、私がここで言うところの数学的イデアの世界での存在は、数学の無矛盾と

（11）筆者は、以前に書いた解説文で、我々の思考の生理という様相も必然的に含む数学的なイデアの世界での存在のことを『数学的実存』という言葉で表現したことがある。しかし、その作文が発表された後、ある大先生（W大学のE先生）から『実存』という単語は日本語では実存主義との連想でのみ使われるので、このようには用いるべきではない、というおしかりをうけた。最近、同じ批判をE大学のF氏からも受けたので、私のこの言葉の選択は、実際にそのような問題を孕んでいるのかもしれないとも思っている。

いずれにしても、思考の生理を含めた我々の主体の存在（実存）と客観的な外的世界（およびその理想化としての内宇宙 — もちろん『客観的な』と言うときにすでに理想化ははじまっているわけであろうが）の関係については、より深い議論が必要なことは明らかであるが、この小文の主題からはずれてしまうので、ここでは、敢てこれ以上深入りしないことにしたい。

いう、背理法の仮定であるかもしれないところの仮説の上に構築された砂上の楼閣でしかないかもしれないのである。(12)

筆者は2006年の暮れに静岡大学数学科の依岡輝幸氏の招きで、同大学数学科で、主に学部生を対象として、『ルベーク測度の拡張の可能性について』という題で、集合論と解析学を含む（一般の）数学理論との関係についての講演[17]を行なった。依岡氏によると、この講演の後、興味を持った何人かの学生が彼のところに質問に来たそうであるが、そのときの質問の一つが、この節の最初に引用した[1]であったということである。

質問に出てくる『連続体仮説』については次の節で述べるが、この質問は、それが数学の初心者のものであるだけに（しかも実は私の講演では不完全性定理を含め集合論と形式論理との関連についての説明もなされていた!・）、ナイーヴな数学観がいかにピュアに、あるいは、いかに頑なにプラトニックであるかを示す好例になっていると言えよう。

今、『頑なに』といささか否定的な響きのする形容をしてしまったが、それが、「数学教徒」の迷信であるか田舎は別として、数学的内容をプラトニックなイデアの世界の中で『見る』ことができる（という頭の使い方ができる）という能力は、むしろ、数学ができることの決定的な必要条件の一つですらあると言うことができると思う。

(12) この記述は、意識的に意地悪なつきはなし方をして、数学者を外側からながめた視点からのものであるが、[18]で試みられている、不完全性定理と数学に関する状況の、数学者の内面よりの描写も参照されたい。

2 カントルの集合論

> …[13] Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit. ([4])

カントル (Georg Cantor, 1845 - 1918) は 1873 年に連続体 $\mathbb{R}$ が自然数の全体 $\mathbb{N}$ より本質的に大きな無限のサイズを持つことを証明している。この証明は、カントルがデデキントに宛てた手紙 ([5]) に書き記されていて、そのおかげて、この証明は、カントルによって、この年の12月7日より前の数日の間に得られたものであるという日にちの特定までできるのであるが、これを数学理論としての集合論が確立された瞬間とみなす数学史的解釈も可能である[14] (そのとき歴史が動いた!)。

ここでは、手始めに、このカントルの結果について詳しく見てみたいのだが、まず、それに必要となる準備を少ししておこうと思う。

数学的考察の対象を集めてひとまとまりにしたものを、ふたたび一つの新しい対象と看做す、というのが集合論の基本的な考え方である。このようにして得られた数学的考察の対象の集まりのことを集合と呼ぶのであった。

たとえば、前節で考察した、$\mathbb{N}$ は『自然数の全体を集めた集合』[15] である。この

---

(13) 〔筆者訳〕 …これに対して、数学の研究の欲求に対するいかなる不必要な制限も、より大きな危険を孕んでいるように私には思われる。そのような制限は、この学問の本質に照して何の妥当性も持ち得ないのであるからなおさらである。つまり、数学の本質はまさにその自由にあるからである。

(14) この解釈は、[14] で述べられている。

(15) こう言うといささか冗長なので、『自然数全体の集合』というような表現を用いることも多い。これに対して『自然数の集合』と言ったときには、自然数のうちのいくつか (無限個の場合ももちろんある) を集めてできた集合 (つまり $\mathbb{N}$ の部分集合) という意味である。冠詞があれば例えば英語では the set of natural numbers と a set of natural numbers とうまく区別がつくのであるが。日本語は数学を記述するのにはあまり良いデザインになっていない、と言えるかもしれない。

ことを表すのに $\mathbb{N} = \{x : x \text{ は自然数}\}$ というような記法[16]も用いられる。また有限個の対象 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ を集めてできる集合を $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ とあらわす。

集合 A のすべての要素と集合 B のすべての要素の間に、一対一の対応がつくときには、A と B は同じサイズの集合とみなすことができる。A と B が無限集合の場合にも、この考え方を適用することにして、A と B がこの意味で同じサイズのとき、これを A と B の濃度が等しいと表現して、このことを $|A| = |B|$ とあらわすことにする。

A が有限集合（要素を高々有限個しか持たない集合）のときには、A のすべての要素が B の一部の要素だけと一対一に対応づけられるなら、A より B の要素の数が大きいといえる。

しかし、A と B がともに無限集合のときには、A が B の真の部分と一対一に対応することだけから B の方が A より要素の数が大きいことは必ずしも帰結できない。たとえば、$\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の真の部分だが、対応[17] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を、$n \in \mathbb{N}$ が偶数なら、$f(n) = \frac{n}{2}$ として、$n \in \mathbb{N}$ が奇数なら、$f(n) = -\frac{n+1}{2}$ とすると、f は $\mathbb{N}$ のすべての要素を $\mathbb{Z}$ のすべての要素に一対一に対応させるものとなっている。した

（16）より一般には、ある性質 E に関して、$\{x : x \text{ は } E \text{ を満たす}\}$ あるいは、$\{x : E(x)\}$ で性質 E を持つ対象をすべて集めた集合をあらわす。実は、次の節で見るように、この集合の構成はいつでも可能なわけではない。これに対し、ある集合 X の部分集合 $\{x \in X : E(x)\}$ $(= \{x : E(x) \text{ かつ } x \in X\})$ は常に構成可能である（次節を参照）。

（17）f が、集合 A のすべての要素に集合 B の（なんらかの）要素を対応させているとき、そのような f を A から B への写像（または関数）といい、この状況を $f : A \to B$ であらわす。写像 f によって A の要素 x が対応づけられる B の要素を、$f(x)$ であらわす。写像は対応規則として与えられることが多いが、集合論では、必ずしも写像が何らかの規則によって導入されていることを仮定しない。このような（対応規則とは限らない）一般的な写像は、その実体としては、この写像の『グラフ』とみなすことのできる集合 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ のことだと思うというのが集合論での写像の扱いである。A から B への写像 f は、A の異なる要素を常に B の異なる要素に対応づけるとき、一対一であるという。また B のどの要素にも f でその要素に対応づけられる A の要素があるとき f は B の上への写像であるという。したがって、A と B の濃度が等しいことを示すような A から B への対応は、A から B の上への一対一な写像である。

がって、$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$となることがわかる。実は$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}|$も示せる。これは、例えば、次の図1のようにして$\mathbb{N}$の要素を$\mathbb{Q}$の分数表現に一対一に対応させることができることからわかる。

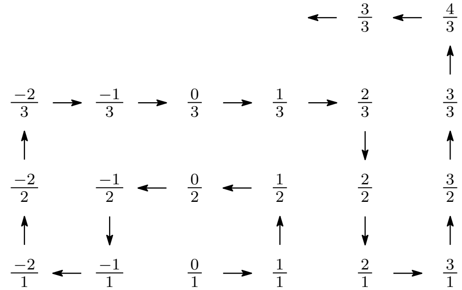


図 1

このように続けてゆくと、どの無限集合も$\mathbb{N}$と濃度が等しくなってしまうのではないかと考えたくなるところであるが、この節の最初に述べたカントルの定理が、その予想の反例となっているのである。この結果をもう一度ここでの文脈の表現に書きなおすと次のようになる：

定理1（カントル、1873）$\mathbb{N}$の要素を$\mathbb{R}$のすべての要素に一対一に対応づけることはできない。

[10]には、この定理のカントルによるデデキントへの手紙での証明の現代の記法による説明が述べられている。カントル自身が後に得た、もう一つの証明は、次のように述べることができる。

証明　背理法で証明する。$\mathbb{N}$の要素を$\mathbb{R}$のすべての要素に一対一に対応づけることができたとして、この対応で$0, 1, 2, \ldots$に実数$a_0, a_1, a_2, \ldots$が対応づけられているとする。もちろん、このとき、$a_0, a_1, a_2, \ldots$はすべての実数のリストになっている。このリスト$a_0, a_1, a_2, \ldots$でのi番目の実数a_iを（十進法で）無限小数表示して、この表示の小数点以下i番目の数字をd_iとする。このとき数字c_iを、d_iが1と異なるときには、$c_i=1$、そうでないときには、$c_i=2$となるよ

うにとる。[18] “$0.c_0c_1c_2c_3\ldots$” という無限小数表示で表される実数をaとすると、すべての$i=0,1,2,\ldots$ に対して、aの無限小数表示の小数点以下i番目の数字（つまりc_i）はa_iのそれ（つまりd_i）と異なるから、$a\neq a_i$となる。したがって、この数aは、$a_0, a_1, a_2, \ldots$ のどれとも異なるが、これは$a_0, a_1, a_2, \ldots$ のとり方に矛盾である。したがって、このような対応は存在しない。**（証明終り）**

$\mathbb{N}$と濃度が等しい集合を可算である、ということにする。また、可算でない無限集合は非可算[19]であるという。この用語を使うと、前記のカントルの定理（定理1）の主張は、「$\mathbb{R}$は非可算である」とあらわすこともできる。

集合A、Bに対し、Aのすべての要素をBの要素（のいくつか）に一対一に対応づけることができるとき、Aの濃度はBの濃度より小さいか等しい（あるいは、Bの濃度はAの濃度より大きいか等しい）と言い、これを$|A|\leq|B|$とあらわすことにする。これに対し、Aのすべての要素をBの要素（のいくつか）に一対一に対応づけることはできるが、Bのすべての要素をAの要素（のいくつか）に一対一に対応づけることができないときには、Aの濃度はBの濃度より真に小さい（あるいは、Bの濃度はAの濃度より真に大きい）と言い、これを$|A|<|B|$とあらわすことにする。$|A|\leq|B|$かつ$|B|\leq|A|$なら$|A|=|B|$となることが知られている（カントル=ベルンシュタインの定理[20]）ので、$<$や$\leq$を用いる濃度の比較は、実際に、ある種の大小関係をあらわすものになっている

---

(18) ここで、c_iを1か2となるようにとっていることのポイントは、2つ数字を用意しておけば、常に、少なくともどちらかはd_iと異なることだが、0と9を使って同様の議論をしようとすると、たとえば、$0.09999\ldots$ と$0.10000\ldots$ が同じ数を表す異なる無限小数表示となることから、議論の後半がうまくゆかなくなってしまうことに注意する。しかし、もちろん、1と2でなく、たとえば3と5を使っても同様に議論できる。

(19) 不可算という用語が使われることもある — たとえば[15]の日本語訳を参照。

(20) 証明はたとえば[26]または[19]などを参照。カントル=ベルンシュタインの定理は、ここでの用語の定義から、「$|A|\leq|B|$で$|A|=|B|$でないなら、$|A|<|B|$となる」とあらわすこともできることに注意。

ことがわかる。この用語を使うと、カントルの定理（定理1）の主張は、「$\mathbb{R}$の濃度は$\mathbb{N}$の濃度より真に大きい」と記述できる。

ある集合Xに対し、Xの部分集合（Xの要素（の一部）[21]を集めて得られるような集合）を全部集めてできる集合をXの冪集合[22]（べきしゅうごう）と呼び、$\mathcal{P}(X)$であらわす。

定理2　$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$である。

このことは、次のようにして見ることができる。まず、開区間$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$の要素$x$に、$\tan \pi(2x-1)$を対応させることで、開区間$(0,1)$の全部の要素と$\mathbb{R}$の全部の要素を一対一に対応させることができるから、$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$であることに注意しておく。

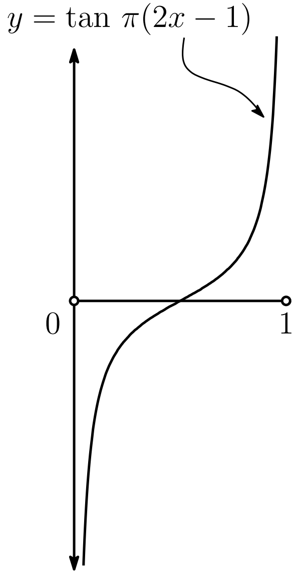


図 2

開区間$(0,1)$の要素xに対し、xの2進法での無限小数表示が$0.b_0 b_1 b_2 \cdots$であるときに、$\mathbb{N}$の部分集合$\{n \in \mathbb{N} : b_n = 1\}$を$x$に対応付ける対応の仕方は、高々可算個の重複（たとえば、2進法で0.1と$0.0111\cdots$が等しいことからくる重複）と$\mathbb{N}$と$\emptyset$が対応からもれていることを除く[23]と、$(0,1)$から$\mathcal{P}(\mathbb{N})$への一対

---

(21) ここでの『要素の一部』という条件は『要素の全部』も『要素のどれひとつもない』も含むものである。Xの要素の全部を集めてできる集合はX自身であり、Xの要素の要素をどれひとつも集めないで得られる集合は、要素を一つも含まないような集合である。後者は空集合と呼ばれ、$\emptyset$とあらわされる。つまり、ここで定義した冪集合$\mathcal{P}(X)$はX自身と$\emptyset$も要素として含んでいる。

(22)『冪集合』という名称は、Xが有限集合で、ちょうどn個の要素を持つときには、$\mathcal{P}(X)$は2^n個の要素を持つ、ということと関連してつけられたものであろう。

(23) $\emptyset$については註(21)を参照。

一の対応になっている。この高々可算な対応のほつれは容易に訂正できて、$(0,1)$のすべての要素と$\mathcal{P}(\mathbb{N})$のすべての要素の一対一の対応が得られるのである。

したがって、カントルの定理（定理1）は、『$\mathcal{P}(\mathbb{N})$の濃度は$\mathbb{N}$の濃度より真に大きい』と表現することもできる。

この形で表現したカントルの定理は、実はさらに一般化できる：

定理3（カントル）すべての集合Xに対し、$\mathcal{P}(X)$の濃度は、Xの濃度より真に大きい。つまり、不等式$|\mathcal{P}(X)| > |X|$が常に成立する。

この定理は定理1の証明のアイデアの一般化により示すことができる：Xの要素xに対して、xをただ一つの要素として持つXの部分集合$\{x\}$を対応させる写像は一対一なので、このことから$|X| \le |\mathcal{P}(X)|$がわかる。もし$|X| = |\mathcal{P}(X)|$だったとするとXから$\mathcal{P}(X)$の上への[24]一対一写像fが存在するが、このとき、$Y_0 = \{x \in X : x \notin f(x)\}$とする[25]と、$Y_0 \in \mathcal{P}(X)$だから、仮定により、$f(x_0) = Y_0$となる$X$の要素$x_0$が存在する。ところが、$x_0 \in Y_0$とすると$Y_0$の定義から、$x_0 \notin f(x_0) = Y_0$となり矛盾で、$x_0 \notin Y_0 = f(x_0)$とするとふたたび$Y_0$定義から$x_0 \in Y_0$となり矛盾である。（したがってこのような$f$は存在しない。）

この定理により、任意の無限集合Xに対して、それより濃度の大きな無限集合が存在することになる。

無限集合Xの冪集合の構成によって、Xより本質的に大きく複雑な無限集合が得られることが分かったわけであるが、与えられた集合より本質的により複雑な集合を構成するもう一つの方法に超限帰納法[26]がある。

---

(24)『$\mathcal{P}(X)$の上への一対一写像』という言い回しについては、註(17)を参照されたい。

(25) $x \notin A$は$x \in A$の否定で、『xはAの要素でない』をあらわす。

(26) 数学的帰納法による構成法は再帰(recursion)と呼ばれるので、ここでも超限再帰とした方がよいかもしれないが、集合論では、この区別をあえてせずに、再帰的な構成も（超限）帰納法（による構成）と呼ぶことが多い。なお帰納法と再帰による構成法の関係については[19]も参照されたい。

定理1により、実数を自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ を使って、0番目の実数、1番目の実数、2番目の実数、3番目の実数 $\cdots$ と数えていっても、全部の実数を数えあげることはできないことがわかったのだが、絶対的な無限の考察ができる立場からは、これら有限の数による数え上げが完了した後、その次の数（これを集合論では ω であらわす）から続けて、ω 番目の実数、$\omega+1$ 番目の実数、$\omega+2$ 番目の実数、$\omega+3$ 番目の実数 $\cdots$ とさらに続けてゆくことができるであろう。しかも、無限の世界では、このように数えてゆくと、いつかは必ず、すべての実数が数え上げられてしまうはずである。だが、それではこのような無限の数えあげは、実際にはどのように行われるべきなのだろか？$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ という数え上げに用いられる『数』のことを（超限）順序数と呼ぶことにして、（その定義をまだこれから規定していこうとしているところの）順序数によって、このような数え上げが、数え上げられる対象によらずいつでも可能であるためには、$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ という数の列の順序にそって帰納法の議論が可能でなくてはならない。集合論の言葉で、帰納法の議論の可能性をどう表現できるかを考えてみると、「$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ のどの部分列も最小の要素を持つ」、という性質としてあらわすのが、自然であることがわかる。そこで、順序数を、「その数より小さい数の全体が、どの部分集合も最小の要素を持つようなもの」、と規定することが考えられる。ところが、こう言っただけでは、ひとつひとつの順序数は、対象としては一意に決まってくれない。

これに対するエレガントな解決法は、カントルの時代よりずいぶん後になってから、フォン・ノイマン (John von Neumann, 1903–1957) によって発明されている（[33]）。それは、各々の順序数を、それより小さい順序数の全体と定義する、というものであった。これにより、有限の順序数、つまり自然数が集合として確定する：0 はそれより小さい順序数を一つも持たないから、$\emptyset$ となり、1 は 0 のみをそれより小さい順序数として持つから、$\{\emptyset\}$ となり、$\cdots$ 等々。また、$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ 等々。ところが、このように続けたと

きの一般論を展開するには、数学的帰納法による議論が必要になってくるが、まさにそのような無限版の数学的帰納法を乗せる媒体として順序数をここで定義しようとしているのであるから、これでは循環論法に陥ってしまう。フォン・ノイマンがここで案出したもう一つの巧妙なトリックは、このように帰納的に定義することと結果として同じになるような順序数の内的な定義を与えることであった。具体的には、「要素が集合の帰属関係 $\in$ で整列[27]されるような集合[28]を順序数とする」として順序数を定義する。また2つの順序数 α、β に対し、順序関係 $\alpha < \beta$ を、$\alpha \in \beta$ となることで定義するのである。

この順序数の定義により、各々の順序数は、それより小さい順序数の全体となり、それらは各順序型に関して一意に決まり、その大小関係にそって、数学的帰納法の議論のできるようなものとなるのである[29]。

さて、順序数をこのようなものとするとき、ω は、実体としては、$\mathbb{N}$ と同じ集合であるから、特に可算である。$\omega+1, \omega+2, \ldots$ も可算になることはすぐにわかる。しかしすべての可算な順序数の極限となる順序数をとると、これはもはや可算ではありえない。同様にある無限順序数 α から出発すると、その順序数と同じ濃度を持つ順序数の全体の極限となっている順序数 κ は α より大きな濃度を持つものになっている。そこで、順序数 κ で、それより小さいどの順序数より濃度の大きいものを基数と呼ぶことにして、任意の集合 X に対し、$|X|$ を X と濃度の等しい基数のこととすることで、今まで等式や不等式の中での形式的表現でしかな

---

(27) 集合 X（の要素）がある関係 R で整列される、とは、R が X 上の全順序（つまり X のすべての2つの要素が比較可能となる順序関係）となっていて、X のすべての（空でない）部分集合が R に関する最小元を持つことである。

(28) この定義は一見不自然に見えるかもしれないが、前に述べた $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$, $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$ 等は実際にすべてこの性質を持つことが容易に確かめられる。

(29) 子細は、例えば[19]を参照されたい。

かった集合Xの濃度$|X|$の実体をうまく定義することができるようになる。[30]

明らかに、有限の順序数はすべて基数となっており、ωは最小の無限基数である。無限基数の全体は、順序数の全体の部分となっていることから、順序数の大小関係（つまり$\in$）で整列される。したがって、基数の全体は、0番目の無限基数（つまりω）、1番目の無限基数、2番目の無限基数、…、ω番目の無限基数、$\omega+1$番目の無限基数、…と順序数を添字としてならべることができる。これらの基数をヘブライ語のアルファベットの最初の文字$\aleph$（アレフ）を用いて、それぞれ$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots$とあらわす。[31]

基数κに対し、$\mathcal{P}(\kappa)$の濃度を2^κで表すことにする。定理2から$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$である。そこで$2^{\aleph_0}$を連続体濃度と呼ぶことにする。定理1から、$2^{\aleph_0} > \aleph_0$（あるいは、$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$）である。より一般的には、定理2から、$2^\kappa > \kappa$（あるいは$2^\kappa \geq \kappa^+$）が成り立つ。ここに、$\kappa^+$で$\kappa$の次の基数をあらわす。

カントルは、数学に実際に具体的な集合としてあらわれる$\mathbb{R}$の無限部分集合の多くについてその濃度が可算（つまり$\aleph_0$）であるか連続体濃度$2^{\aleph_0}$であるかのどちらかであることを確かめているが、多分このことからの類推で、等式$2^{\aleph_0} = \aleph_1$が成り立つことを予想して、この予想を連続体仮説 (Kontinuumhypothese) とよんだ。より一般的な、「すべての無限基数κに対し$2^\kappa = \kappa^+$が成り立つ」という予想は一般連続体仮説と呼ばれている。[32]

カントルは晩年、連続体仮説の研究に心血を注いだ。しかし、実際にこの問題に一応の決着がつくのは、カントルが亡くなってからおよそ20年後にゲーデルが一

（30）このように議論できるためには、実は後で触れることになる選択公理を集合論で用いることのできる原理として仮定する必要がある。

（31）$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots, \aleph_\alpha, \dots$は順序数でもあるので、これらが順序数であることを強調したり、その順序型（つまりこれらの上に$\in$によって導入される順序）を問題とするときには、これらを$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \dots, \omega_\alpha, \dots$ともあらわすことにする。

（32）一般連続体仮説はハウスドルフ (Felix Hausdorff, 1868–1942) の 1908 年の論文で導入されている。

般連続体仮説が集合論と矛盾しないことを証明し、さらにその20年以上後にコーエンが任意の無限基数に対する連続体仮説の否定が集合論と矛盾しないことを示したときであった。

つまり、ゲーデルとコーエンの仕事によって、連続体仮説は、集合論の体系から独立な命題である、ということが証明されたのである。しかし、このような証明ができるためには、そもそも集合論の体系が何なのかが明確にされなければならない。これは、次の節で述べる、集合論の公理化により遂行されるのであるが、歴史的には、集合論の公理化の動機はもう少し別のところにあった。

3　素朴集合論から公理的集合論へ

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können ([12]).(33)

19世紀の終りから20世紀の初めにかけて、カントルの創始した集合論に問題のあることを示唆する結果(34)が相次いで発見された。今日の視点からは、これらの結果は、単に、当時の集合論にまだある種の不備があったことを示しているにすぎず、カントル自身もこれらの結果が集合論の基礎をゆるがす本質的な問題ではないことを、正しく認識していたことが、たとえば、1897年の9月26日にヒルベルトにあてた手紙（[5]）などから窺える。しかし、集合論の批判者たち(35)の目には、

(33) 〔筆者訳〕　かんとるノ創造シタ楽園カラ、我々ガ追放サレルコトガアッテハナラナイ。

(34) これらの結果はその性格から、逆説 (paradoxes) とか逆理 (antinomies) などと呼ばれることもある。

(35) 集合論の初期に強く集合論を批判して、カントルが望んでやまなかったベルリン大学の教授の席(Lehrstuhl)が彼に与えられることを阻止した、おそらくその張本人であったクロネカー (Leopord Kronecker 1823–1891) は、このときには既に亡くなっていたが、ポアンカレ (Henri Poincaré, 1854–1912) をはじめとして次の世代の反集合論論者が集合論批判の論陣をはっていた。

これらの『逆理』は集合論への[36]死刑宣告に等しいものに映っていたのではないかと思われる。

いくつかの『逆理』のうちラッセルの逆理として知られているのは、次のようなものである：「自分自身を要素として含まない」という集合の性質を考える。集合 x がこの性質を持つことは、$x \notin x$ という式で表現できる。今、この性質を持つ集合を全部集めてできる集合 A を考える。$A = \{x : x \notin x\}$ である。ところが、もし A が A 自身の要素だとすると、これは $A \in A$ とあらわせる。したがって A の定義から $A \notin A$ となり矛盾である。逆に、もし A が A 自身の要素でないとすると、これは $A \notin A$ とあらわせるが、A の定義から $A \in A$ となってしまい、やはり矛盾してしまう。

$V = \{x : x = x\}$（つまり V はすべての集合を集めたものである）や、$\mathrm{On} = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数}\}$ や、$\mathrm{Card} = \{\kappa : \kappa \text{ は基数}\}$ が集合だと仮定しても[37]矛盾が導かれてしまう。

これらの逆理の示していることは、対象を集めたものを無制限にいつでも集合と考えてよいわけではない、ということである。

そこで、既に得られている集合からどのような構成法を行なって新しい集合を作ることが『安全』であるかを規定しておけば、その範囲内で議論をすることで、ここで述べたような逆理を不用意にひきおこしてしまう心配がなくなるであろう。

---

(36) 一説によると、ポアンカレは（イタリアでの？）ある講演で、「集合論は未来の数学者にとって、昔に罹っていたが今は治ってしまった病気のようなものに思えるだろう」というような発言をしているそうである。

ただし、もし病気と言うのだったら、むしろ現代の集合論こそ、ポアンカレの時代とは比べものにならないような怪奇な病状を呈している、と言わなくてはならないであろう。しかし、第5節でも触れるように、現代の集合論をアンドロメダ・ストレインとして実際に認識のできる一般の数学者はほとんどいなくなってしまったようで、そのためか、ポアンカレの時代のような取り上げられ方すらされなくなっているのは、残念といえば残念である。

(37) V について言えば、もし V が集合だったとすると、後に述べる分離公理により、ラッセルの逆理での A も集合となってしまうから矛盾である。

このような観点からデザインされた集合論の公理系で現在最も普通に使われているものは、ZFC と略記される[38]。ツェルメロ[39] (Ernest Zermelo, 1871–1953) が導入し、フレンケル (Abraham Fraenkel, 1891–1965) やフォン・ノイマン、スコーレム (Thoralf Skolem, 1887 – 1963)、その他の人々によって補足拡張された体系である。

ここでは、まずツェルメロが最初に導入した公理系の概要を見てみることにしよう。後に述べるこの公理系の拡張でもそうであるが、以下の公理は集合だけからなる世界での状況を記述している、と解釈すべきものである。特に集合の要素もまた集合と考えているので、(形式的には) 集合族と集合の区別は存在しない。また、ここでの基本述語は集合の要素関係 $\in$ のみである。

公理系の一番初めの公理は、同じ要素を持つ集合は等しいことを主張する**外延性の公理**である。これに、集合の存在を主張する公理や、集合の構成原理の成立を主張するいくつかの公理が続く：空集合 $\emptyset$ の存在を主張する**空集合の公理**、与えられた集合 x、y に対し、集合 $\{x, y\}$ が存在することを主張する**対の公理**、集合 (族) x に対する、x の和集合 $\{z$: ある y が存在して $z \in y$ かつ $y \in x\}$ の存在を主張する**和集合の公理**、また、x の冪集合 $\mathcal{P}(x)$ の存在を主張する**冪集合の公理**である。無限集合の存在も保証しておかなくてはならない。これには、前節で述べたフォン・ノイマンの意味での ω の存在を主張する**無限公理**を採用すればよい。最後に、**分離公理**と呼ばれる公理群を付加する。これは各々の確定した性

---

[38] Z,F,C はそれぞれ、Zermelo, Fraenkel, Axiom of Choice (選択公理) の頭文字から来ている。

[39] ツェルメロ (Zermelo) というのはちょっとめずらしい苗字だが、これには逸話があって、ツェルメロのお父さんかお爺さんかが、昔のことで、もともとは苗字を持っていなくて、どこかの国境で急に苗字を名乗る必要が出たときに、咄嗟に Walzermelodie (ワルツのメロディー) というドイツ語の単語から苗字をでっちあげたのがその由来、ということである。

今、この逸話を思い出したのだが、これをどこで読んだのかも何語で読んだのかも全く思い出せないでいる。関連した記事がないかと思ってインターネットで見てみたのだが、筆者の話せない中国語とロシア語のページしか検索にかからなかった。出典がどこにあるか、どなたか教えていただけないだろうか。

質 $A(z)$ と与えられた集合 x に対し、集合 $\{z \in x : A(z)\}$ の存在を主張する公理の集まりである。（図３）。

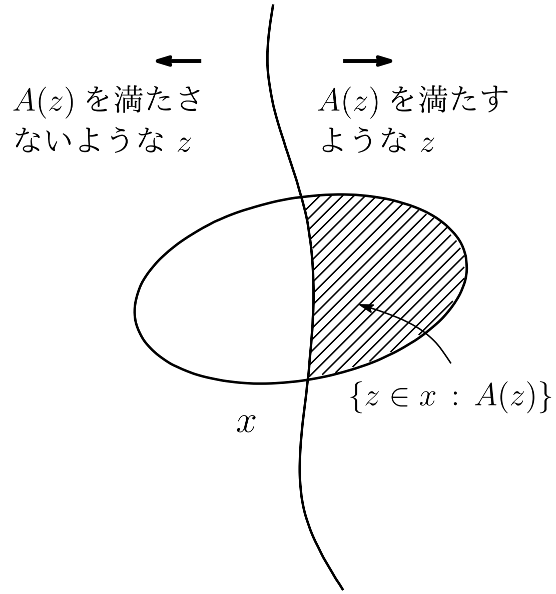


図 3

ラッセルの逆理での『集合』や、V, On, Card などの『構成』にはこの分離公理も後出の置換公理も適用[40]できないことに注意しておく。

（40） ただし、ある性質 A に対し $C = \{x : A(x)\}$ が集合になることが示せないときにも、『$x \in C$』を $A(x)$ という主張の代用（略記）として用いる。前出の V, On, Card 等に関しても、たとえば、形式的には、『すべての $x \in V$ に対し』は『すべての x に対し』の略記と思い、『ある $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し』は『ある順序数 α に対し』の略記と思うことにする。もちろん V, On, Card 等は集合でないので、これらが集合の要素になることは有り得ない。V, On, Card 等のような必ずしも集合でない、集合の集まりをクラスとび、それが集合でないことが確定していてそのことを強調したいときには真のクラスである、という。

ツェルメロの公理系では以上に加えて**選択公理**[41]が採用される。これは、互いに素[42]な空集合でない要素からなる集合xに対し、集合yで、すべてのxの要素との共通部分がちょうど一つの要素を含むようなものが存在することを主張する公理として定式化できる。この公理は、他の公理の存在のもとで、「すべての集合は整列できる」という主張と同値である（ツェルメロの定理）。ある集合xが整列できるなら、そのような整列順序の順序型となっている順序数αからxの上への一対一写像が存在する。したがって、そのようなxの上への一対一写像が存在するような順序数αのうち最小のものκをとれば、これは基数となることがわかるので$|x| = \kappa$である。したがって、選択公理のもとでは、すべての集合は（前節のフォン・ノイマンの意味での基数としての）濃度を持つことがわかる。

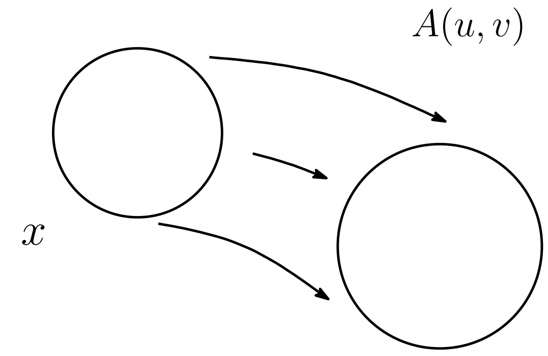
第1節でその概略を見た実数体の構成を含め、通常の数学は、すでにこのツェルメロの体系の中で展開することができる。しかし、順序数上の帰納法や再帰的構成を積極的に用いた（集合論的？）数学を展開するには、**置換公理**と呼ばれる次のような公理群が必要になる：性質$A(u,v)$が集合x上で関数的であるとは、すべての$u \in x$に対し、$A(u,v)$を満たす集合vが一意に決まることである、とする。ここで、すべての確定した性質$A(u,v)$に対し、$A(u,v)$がx上で関数的なら、

---

(41) 次節に述べるゲーデルとコーエンの結果により、選択公理は集合論の他の公理から独立である。他の集合の存在公理と異なり、選択公理が存在を保証する集合は、具体的にどのような集合となるかが全く不明なので、構成的な数学を標傍する立場からは、選択公理の使用が問題視されることもある。しかし、実際には、20世紀以降の数学では選択公理がいたるところで用いられているので、この公理なしに現代的な数学理論を展開することはほとんど不可能である。また、次の節で述べるように、ゲーデルの構成的集合の内部モデルLでは選択公理が成り立つことを思い出すと、構成的な数学の枠組の中で選択公理が用いられているときには、その議論をLに移行することにより選択公理の使用を除去することができるはずである。この意味で、選択公理をとりあえず使っておくことは構成的な数学をそれほど大きな『危険』に曝しはしない、と言えるであろう。また、決定性公理と呼ばれる集合論の公理が、選択公理のオルタナティーヴであるかのようにとり上げられることがあるが、現在では、決定性公理は、むしろ選択公理の成り立つ集合論の宇宙の内部モデルで成り立っている性質、ととらえることが妥当であることがわかってきている。

(42) つまり、$u \in x$ なら $u \neq \emptyset$ で、$u \in x$ と $v \in x$ が異なるなら、$u \cap v = \emptyset$ となるようなx。

集合 $\{v : \text{ある } u \in x \text{ に対し } A(u,v)\}$ が存在することを主張する命題を公理として採用する[43]（図４）。



$\{v : \text{ある } u \in x \text{ に対し } A(u,v)\}$

図 4

現在我々が ZFC の公理と考えているものの中で、最後にこの公理系にとり入れられたのは、フォン・ノイマンによる**基礎の公理**と呼ばれるものである。この公理は技術的には「すべての空でない集合 x は $x \cap y = \emptyset$ となるような要素 y を必ず持つ」という主張として定式化される。この公理からは例えば $x \in x$ を満たすような病的な集合 x の非存在がただちに導かれる。一方、第1節で考察した実数体や、第2節で考察した順序数など、実際の数学の運用で必要となる集合は、すべて、この公理を満たすような集合としてとれていることに注意する。

他の公理のもとでは、基礎の公理は、集合の全体が次のような累積的な階層に分割されることと同値である。順序数上の（超限的）再帰的定義により V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ を次のように定める：$V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$ （δ が極限順序数のとき[44]）。このとき、基礎の公理は、$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ と同値になる[45]（図５）。

（43）口語的には、この公理は全体として「集合を集合のサイズだけ集めたものはまた集合になる」ことを主張するものとなっていると表現することもできるだろう。

（44）順序数 δ が極限順序数であるとは、$\alpha + 1 = \delta$ となるような順序数 α が存在しないことである。

（45）ここでの、V, On の扱いについては、註（40）を参照。

ここで、分離公理や置換公理での『確定した性質』は、この表現のままでは、その適用範囲が定かでなく曖昧さが残る。スコーレムは1922年の論文で集合論の公理系を1階の論理体系内で記述することで、この『確定した性質』を『1階の論理の論理式（で表される性質）』で置き換えることができることを注意しているが、ツェルメロは1930年の論文[36]で、このアイデアをとり入れて、1階の論理体系で公理系を記述し、今日の意味の、確定した公理系としてのZFCの体系を確立したのであった。

集合論の公理化の動機について述べたところで、（集合論を公理化することで）「その範囲内で議論をすることで、ここで述べたような逆理を不用意にひきおこしてしまう心配がなくなるであろう」と書いたが、もっと積極的に「逆理を不用意にひきおこしてしまう心配はない」と言いきってしまうことはできないのだろうか？残念ながら、そのようなことは理論的に不可能な夢であることが、ゲーデルの不完全性定理から帰結できるのである。

ゲーデルの第二不完全性定理は「任意の、確定的に与えられた、初等数論の体系を含む公理系について、その公理系が無矛盾であることを、その体系自身の中で証明することができない」ということを主張する定理である。[46] ところで、公理的集合論の体系の中ではℕ（つまりω）が定義できて、そこでの帰納法や再帰的

(46) 不完全性定理は、その証明自体は技術的に決して難しくないのだが、その深淵な意味を考えると、他の数学の定理と同格にして「定理」と呼んでしまうのにはいささか抵抗を感じる。

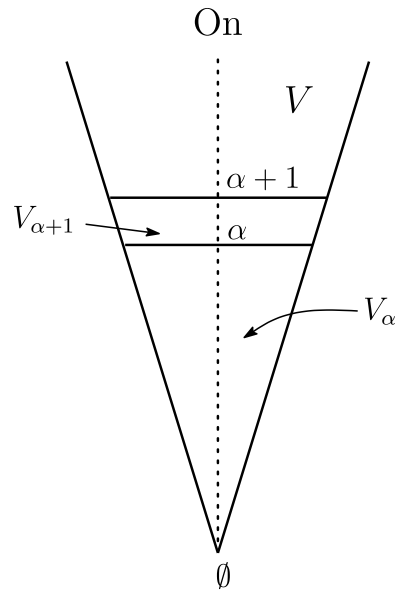


図 5

定義が可能なのだったから、公理的集合論の体系の中でのℕの理論は初等数論を含んでいる。したがって、不完全性定理から、集合論の体系の中（の推論）で集合論の体系自身の無矛盾性を示すことができない、あるいは、そのようなことができた瞬間に、その証明は、まさに集合論の矛盾を示すものになってしまう、ということになるわけである。ところが、実数体の理論の集合論での展開でも示唆されているように、集合論は既存の数学で行なえる議論をすべて内包しているのであるから、そこで無矛盾性が示せないとしたら、無矛盾性の証明が（地上で）なされる可能性は全くないと言ってよいであろう。

ゲーデルの不完全性定理が証明されたのは、ツェルメロの論文[36]が発表されたのと同じ頃だったが、その頃の晩年のツェルメロは、ゲーデルの不完全性定理を（心情的に？）理解できなかった（しようとしなかった？）[47]ということである。

しかし、集合論（数学）の無矛盾性を証明することが理論的に不可能であることは、集合論（数学）が無意味であることを直ちに意味するものではない。

数学の部分体系で、ある意味で、その無矛盾性の確立しているものはいくつかある ― この事情については、たとえば拙論[18]と、その引用文献の中の文献等を参照されたい。また、集合論の体系の中で展開される数学理論の健全性も、この体系の無矛盾性のある種の保証と考えられる。体系の中で理論が大きく発展している、ということや、その発展の様相は、それ自体、体系の整合性の保証と考えられる。また、そのような大きな発展にともなった思惟、推論によっても（今までに）何の矛盾も出てこなかった、という意味での保証にもなっているからである。

しかし、純粋に形式的には、この集合論の（見かけの？）無矛盾性は、矛盾が出るまでのペンディング状態、あるいは永遠に矛盾が出てこないことの高々有限な例証、ということにすぎない。これは、ある意味で何の意味をも持ちえないこ

(47) この間の事情やツェルメロとゲーデルの邂逅については[6]のpp75–77前後に詳しい。

とが既に証明されているのに、生命の尊さを高らかに謳いあげたり、オブソレートとしか思えない種類の愛国心の高揚をはかったりしなくてはならない、という我々21世紀人の人生をも連想させて、誠に涙ぐましくもある。

一方ゲーデルの第一不完全性定理[48]からは、集合論の公理系のどのような拡張をとっても、完全な公理系を作ることはできないことがわかる。もちろん、「どのような拡張をとっても」というのは、「どのような矛盾しない体系への拡張をとっても」という意味である。第二不完全性定理から、集合論の拡張が矛盾しないこと自体、確定的には確認できないわけであるが、矛盾しないと考えられる妥当な拡張を考えた場合には、この拡張された体系から論理的に真偽の決定できないような命題が常に存在することが予想されるわけである。特に、集合論自身もそれが無矛盾である限り、この意味で完全でない。

しかし、このことは、集合論の公理系の性質を思い浮かべるとむしろ自然な状況であると言うことができそうである。集合論の公理系は、述語∈の基本的な性質と、いくつかの（つまり種類としては有限個だが、実際の論理式としては無限個の）集合の構成原理（集合の存在公理）のリストから成り立っている。しかも、このリストは、単に、今までの数学で必要になった集合の構成原理を分析して必要なものを集めてきたものにすぎず、未来の数学においてさらに拡張されてもおかしくないものである。実際、そのような種類の拡張の候補としては、様々な種類の巨大基数[49]の存在を主張する公理が案出されてきており、しかも、それらの公

(48) 第一不完全性定理は、「任意の、確定的に与えられた初等数論の体系を含む公理系は、（それが矛盾しないなら）完全でない。つまり、この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張φで、φもφの否定もこの体系から証明できないようなものが存在する」ことを主張する定理である。

(49) 巨大基数とは、非可算な基数で、ωがそうであるような、それより下の基数に対しての、ある種の超越性[50]を持つような基数のことである。巨大基数の理論やその集合論での意味については[14]に詳しい。

(50) ωに関して言えば、それより小さな基数はすべて有限であり、それが無限であることで、ω

理は、歴史的にはそれぞれ異なる文脈の中で導入されてきたものなのにもかかわらず、互いに有機的に関連しあって全体として ZFC の拡張のネットワークといった趣の複合体を形成していることが明らかになってきている（[14] を参照）。第一不完全性定理は、ZFC に今までに知られている巨大基数公理を付加していってもそれで果てることはなく、さらに拡張の可能性を持った開かれた体系になっていることを保証してくれている、というふうに解釈することもできるわけである。

ちなみに、巨大基数については、「そんなあるかないか分らないものを考えてもしょうがない」という感想を持つ人も少なくないようである。しかし、前節の冒頭に引用したカントルの言葉にもあるように、あるかもしれないものの研究を、それがないかもしれないという理由だけで制限するのは、数学の自由の精神に反する非生産的な態度として、非難されるべきであろう。

現在までに知られている巨大基数の公理については、上で『拡張のネットワーク』と表現したような非常に美しい相互関係の理論が作りあげられつつある。また、巨大基数の存在公理の下で、次節で触れることになる内部モデルの手法や強制法、ジェネリック超フィルターの手法などによる様々な応用や興味深い結果が多く得られている。このような状況をふまえると、これらの巨大基数は、むしろもっと積極的に、存在すべきもの、とみなすべきであるように思える。

4　ゲーデルの構成的集合のユニヴァースと連続体仮説の集合論からの独立性

ゲーデルが連続体仮説の集合論上の相対的無矛盾性を証明したのは 1930 年代の後半だった。もう少し正確に言うと、ゲーデルのこの集合論に関する仕事は、選択公理を含まない集合論上の、選択公理の相対的無矛盾性の証明から、一般連続

は（加減乗除など）有限の数どうしの演算の結果では越えることができない、という種類の超越性を有している。

体仮説の集合論上の相対的無矛盾性までを含むものだった。

ZFC から選択公理を除いた体系は ZF と呼ばれるが、初等数論は、この体系にすでに含まれているので、第二不完全性定理は ZF にも適用できる。したがって、この体系が無矛盾であることを証明することはできないわけである。これに対して、ここで言う『ZF 上の選択公理の相対的無矛盾性』は、『ZF が無矛盾なら、ZFC も無矛盾である』という主張である。同様に、『ZF 上の（一般）連続体仮説の相対的無矛盾性』は、『ZF が無矛盾なら、ZF に（一般）連続体仮説を付け加えた体系も無矛盾である』という主張である。実際には ZF で議論すると、選択公理は一般連続体仮説から導き出せるので（シルピンスキーの定理）[51]、ZF 上の一般連続体仮説の相対的無矛盾性がここで述べた結果をすべて包括していることになるが、証明の構造としては、ゲーデルの結果は、（強い形の）[52] 選択公理の ZF 上の相対的無矛盾性証明と、ZFC 上の一般連続体仮説の相対的無矛盾性証明、という二段構えになっている。

これらの相対的無矛盾性の結果は、実際には、証明の体系に関する、次のような、メタ数学（metha-mathematics）[53] での主張になっている。たとえば、ZF 上の一般連続体仮説の相対的無矛盾性の定理のゲーデルによる証明は、『ZFC に一般連続体仮説を付け加え

（51）この定理は、リンデンバウムとタルスキーが 1926 年に証明なしで発表したもので，シルピンスキーが 1958 年の論文で証明を与えている。

（52）後で見るように、ゲーデルによる構成的集合の全体からなる内部モデルでは、ユニヴァース全体を整列する定義可能な整列順序が存在する。したがって、各集合から、この整列順序に関して最小の要素を選択する対応はユニヴァーサルな選択関数となっている。

（53）数学者が数学するとき、彼または彼女はイデアの世界での数学的対象について議論をしているわけだが、その結果出来上がった理論を外側からながめたときには、それは記号の操作の体系の中で形式的論理体系での証明規則に従った記号の変形になっている。もちろん数学者は機械に読ませるために数学理論を書きだすのではなく、生身の人間に読ませるために書くわけなので、出来上がった数学理論（の記述）は、コンピュータプログラムのような機械でも処理できるような種類の記号列ではないが、理論的には、そのようなものに翻訳できる、ということである。このように、数学の営みを記号列の操作として外側からながめて分析する視点のことを、メタ数学という。

た体系から矛盾を導くような証明が与えられたとすると、この証明を機械的に変形して、ZF から矛盾を導く証明に作りなおせる』という主張の証明と見ることが[54]できるのである。

ゲーデルの証明は、今日から見ると非常に自然で、誰でも思いつきそうに思えるが、勿論これは、我々が、ゲーデルを含む20世紀の巨人たちの肩に乗って見ているからである。

この巨人たちの肩の上からの眺望をスケッチするための準備を、まず少ししておこうと思う。数学的構造MとMの部分構造Nがあるとき、NがMの初等部分構造であるとは、Nの任意の要素 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ に対して、1階の論理の論理式で書けるn個の対象に関する性質φの真偽が、この性質をMで解釈しても、Nで解釈しても変らないことをいう。

任意の数学的構造Mが与えられたとき[55]、Mの任意の無限部分集合（必ずしも部分構造でなくてよい）Aに対し、Aを含むMの初等部分構造Nで、$|A| = |N|$となるものが必ず存在する[56]（レーベンハイム=スコーレムの定理）。

Mとその部分構造Nに対し、論理式φが（MとNに関して）絶対的であるとは、Nのどんな要素（の組）をφのパラメタとしてとってきても、φがMで成り立つこととNで成り立つことが同値になることである。レーベンハイム=スコーレムの定理ではすべての論理式を考えなければならないため、真理の定義不可能性から、Mがクラスの場合には、一般には、定式化すら不可能であるが、絶対性はひとつひとつの論理式に関する性質なので、MやNが真のクラスである場合

---

(54) より詳しくは、[19] を参照されたい。

(55) もう少し正確には、ここでは、M の構造に含まれる関係や関数が全部で高々可算個であることを仮定している。

(56) A から出発して、存在命題となっている（それまでにとってきたMの要素をパラメタとして含む）論理式がMで成り立っているとき、その主張の例となるMの要素をひとつ付け加えるという操作を繰り返して、このような論理式の主張の例に関する閉包を作り、これをNとすればよい。詳しくは、たとえば [32] を参照されたい。

にも考察することができる。

帰納的関数は不完全性定理の証明でゲーデルによって導入された重要な概念で、この導入によって帰納的関数の理論という数理論理学の研究分野が新しく発足しているが、同じように、絶対性と次に述べる構成的集合は、両方とも、ゲーデルにより連続体仮説の相対的無矛盾性の証明で導入され、その後の集合論で非常に重要な役割をはたすことになる概念である。

構造Mが、M（の領域）上の$\in$-関係のみを二項関係として持つ[57]とき、$\in$-モデルと呼ぶことにする。任意の$\in$-モデルMに対し、Mと同型な、$\in$-モデルNで推移的なものが存在する（モストフスキーの定理（の特殊な場合））。ここで、集合Nが推移的であるとは、$x \in N$ で $y \in x$ なら常に $y \in N$ となることである。また、このようなMからNへの同型写像は、Mの推移的な部分集合の要素を動かさないものになっている。以降、任意の集合を断わりなく$\in$-モデルとも見ることにする。したがって、集合論の言語で書かれた論理式の真偽は任意の集合xで（xを$\in$-モデル$(x, \in)$とみなすことで）考えることができる。すべての存在記号がある集合（を表す変数またはパラメタの要素の存在の形）に制限されているような論理式（制限された論理式）は、推移的集合とVとの間で絶対的になることが論理式の構成に関する帰納法で容易に示せる。

以上の準備をしておくと、ゲーデルの（一般）連続体仮説の相対的無矛盾性の証明は次のように述べることができる。

前節での $V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ に似せて、$L_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ を次のようにして再帰的に定義する：$L_0 = \emptyset, L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup \mathrm{Def}(L_\alpha), L_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha$ （δが極限順序数のとき）。ただし、集合Xに対し、$\mathrm{Def}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y$ は X で定義可能$\}$[58]とする。こ

（57）この状況を $M = (M, \in)$ とあらわすことにする。

（58）$Y \subset X$ が X で定義可能とは、X のいくつかの要素をパラメタとして含む（集合論の言語上の）論理式 $\varphi(x)$ が存在して、$Y = \{a \in X : a$ を $\varphi(x)$ に代入した $\varphi(a)$ は X で成り立つ$\}$ となることである。

こで、$L=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha$ とする。L の要素（つまり $x\in L_\alpha$ となるような $\alpha\in\mathrm{On}$ の存在するような集合 x）は構成的集合であるという。

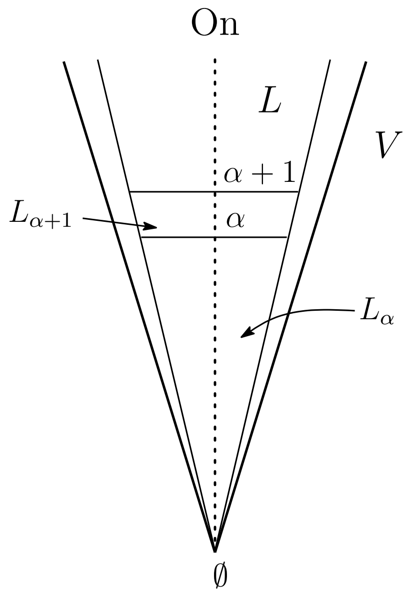


図 6

各 L_α は推移的であることが（超限）帰納法で示せるから L も推移的である。このことと先程の推移的な∈-モデルでの絶対性に関する注意を用いると、L_α は L の中で構成しても V での意味の L_α と一致し、したがって L で、$V=L$（つまり、すべての集合 x に対し、$x\in L_\alpha$ となるような順序数 α が存在するという主張）が成り立つことや、L で ZF が成り立つことが示せる。On 上の整列順序と集合論の言語上の論理式が可算個あることを使うと、L 上の整列順序が再帰的に構成できるから、このことと、第3節で述べたツェルメロの定理から、L で選択公理が成り立つことがわかる。

以上の議論は子細にチェックして証明の道筋を工夫しなおすと、すべて ZF の中で証明できることがわかる。このことから ZF 上の選択公理の相対的無矛盾性が証明できる：もし、ZFC が矛盾するとして、P を ZFC からの矛盾の証明とすると、P にあらわれる論理式をすべて L に制限して（つまりそのような論理式に現われる量化子の範囲を L の要素に書きなおして）、証明の体系に依存する多少の変更を加えると、ZFC に含まれる有限個の論理式を L で解釈したものが成り立つという主張をあらわす論理式を前提条件とした矛盾の証明が得られる。ところが、ZFC のそれぞれの論理式に対して、それを L で解釈したものが成り立つとい

う主張をあらわす論理式は上で述べたように ZF から証明できるので、全体として ZF の仮定からの矛盾の証明が得られたことになる。（証明終り）

一般連続体仮説の相対的無矛盾性の証明は、次のようにして見ることができる。簡単のために連続体仮説の相対的無矛盾性の証明のみを見ることにする。一般連続体仮説についてもほとんど同じ議論で証明できる。

$V = L$ を仮定して、ω の部分集合 x をとると、$x \in L_\alpha$ となるような順序数 α がとれる。α は極限順序数としてよい。このとき、レーベンハイム＝スコーレムの定理から、L_α の可算な初等的部分モデル M で、x を含むようなものがとれる。L_α は $L_\beta, \beta < \alpha$ の和となっているから、『自分は $L_\beta, \beta \in \mathrm{On}$ の和となっている』という主張（これを ψ とよぶことにする）は L_α で成り立つ。したがって、M が初等部分モデルであることから、ψ は M でも成り立つ。したがって、N をこの M に対してモストフスキーの定理でのようにとると、ψ は N でも成り立つ。ところが N の推移性から帰納的に証明すると、N の中での順序数 α に対して、N の中で L_α をとると、これは V での L_α と一致することが α に関する帰納法で証明できる。したがって、N で ψ が成り立っていることから、$N = L_\gamma$ となる順序数 γ が存在することがわかる。N は可算であるから、γ も可算である。一方、モストフスキーの定理の後で述べた注意により、M から N への同型写像は x を動かさないことがわかる。よって、$x \in N = L_\gamma \subseteq L_{\omega_1}$ となる。

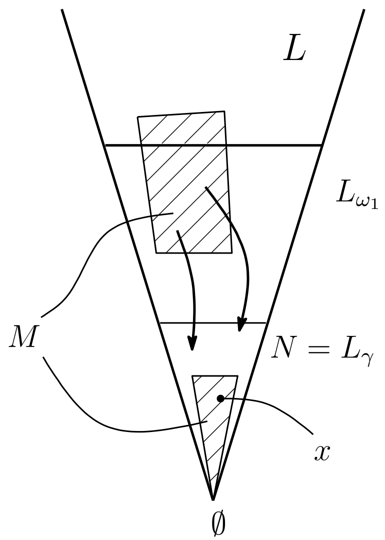


図 7

x は任意だったから、L で、$\mathcal{P}(\omega)$ は L_{ω_1} の部分集合となることがわかった。と

ころが L_{ω_1} の濃度は $\aleph_1$ だから、[59] $\mathcal{P}(\omega)$ の濃度は $\aleph_1$ より小さいか等しい。一方カントルの定理から $\mathcal{P}(\omega)$ の濃度は $\aleph_1$ より大きいか等しいので、この濃度は $\aleph_1$ と等しくなることがわかる。したがって、連続体仮説が L で成り立つことが以上で示せたわけであるが、これに選択公理の相対的無矛盾性の証明と同様の議論を組み合せると、連続体仮説の ZFC 上の相対的無矛盾性が得られることになる。**（証明終り）**

ゲーデルは、すでに［11］の 1947 年版で連続体仮説の集合論上の独立性（つまり連続体仮説もその否定も ZFC 上で相対的無矛盾であること）を予想している。［6］によると、ゲーデルは、ここで述べた連続体仮説の相対的独無矛盾性の研究とほぼ平行して連続体仮説の否定の相対的無矛盾性の証明の研究にも着手しているようである。

しかし最終的に連続体仮説の否定の相対的無矛盾性を証明したのは、コーエン (Paul Cohen, 1934 –) で、それは 1963 年になってからのことであった。コーエンは強制法と呼ばれている手法の[60]プロトタイプを開発して、それを用いて、連続体仮説の否定の相対的無矛盾性を証明したのだった。しかも、彼は、連続体濃度が、それまでに連続体濃度の性質として知られていた、非可算で、可算な共終数を持ちえない、という制限を除くと、何にでもなり得ることも示している。

ゲーデルの L による（一般）連続体仮説の相対的無矛盾性の証明が、V の部分クラス（つまり L）で、推移的で[61]すべての順序数を含んでいて、集合論の公理の[62]

---

(59) パラメタの組を固定したとき，それらのパラメタを用いて定義できる集合は高々可算であることを使うと，α に関する帰納法により，$|L_\alpha| = \max\{|\alpha|, \aleph_0\}$ となることが容易に示せる。

(60) 強制法 (forcing) という名称は、コーエン自身の命名だが、コーエンが 1963 年の仕事で使ったのは、現在ではコーエン強制法と呼ばれている、現在の意味での一般的な強制法のうちの一つのバリエーションであった。

(61) これは $\alpha \in L_{\alpha+1}$ がすべての順序数 α に対し成り立つことからわかる。

(62) 真理の定義不可能性から、すべての公理のモデルになっていると言うことはできないことに注意する。

一つ一つのモデルになっているよう[63]なものを構成して、そこで（一般）連続体仮説が成り立つことを示すことで得られていたのに対し、コーエンの強制法は ZFC のモデルを外に拡げる手法である。しかし実際には集合論のユニヴァースである V の外には何もありようがないので、このことは、正確には、もう少し違った記述をする必要がある。つまり、実際には、これは次のようである。今、ZFC と相対的無矛盾であることを示したい命題を C としよう。C の相対的な無矛盾性を証明するための強制法のバリエーションを $\mathbb{P}$ とすると、次が可能になる：ZFC の公理のうちの任意の有限個 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ が与えられたときに、それらを含む十分に沢山な有限個の ZFC の公理 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(m \leq n)$ がとれて、次が成り立つ。うまく順序数 α をとると、V と V_α の間で、これらの公理のすべてが絶対的になっているようなものがとれる（レヴィの反映原理）。つまり V_α は $A_1, A_2, \ldots, A_m$ のモデルになっているわけだが、レーベンハイム=スコーレムの定理により、V_α の初等部分モデルで可算なもの M をとり、モストフスキーの定理を適用して M と同型で推移的な N をとる。N に $\mathbb{P}$ によるジェネリック集合と呼ばれる、N に要素として含まれない N の部分集合 G を付加して[64]、$\in$-モデル $N[G]$ を作ると、$N[G]$ は $A_1, A_2, \ldots, A_m$ （n でなくて m）と、C のモデルになる。

この状況が、命題 C の ZFC からの相対的無矛盾性の証明を与えることは、次のようにして見ることができる：今、ZFC に C を付加した体系から矛盾が導けたとして、その証明を P' とする。P' で実際に用いられている ZFC の公理を $A_1, A_2, \ldots, A_m$ とすると、背理法により、P' は $A_1, A_2, \ldots, A_m$ から C の否定（これを D とよぶことにする）の証明 P に変形できる。一方、強制法のバリエーション $\mathbb{P}$ の選び方から、$A_1, A_2, \ldots, A_m$ と、C のモデル $N[G]$ が存在する。ZFC 外側からながめなおすと、このことを証明するのには ZFC の有限個の公理が用いられてい

（63）このようなクラスのことを集合論の内部モデルという。

（64）N は可算だからカントルの定理により N に要素として含まれない N の部分集合は沢山存在する。

るはずであるが、それらを $B_1,\ldots,B_\ell$ とする。さて、$N[G]$ は C のモデルであったが、N は $A_1, A_2,\ldots,A_m$ のモデルでもあるから、これらの ZFC の公理の選び方から、$N[G]$ は C の否定 D を満たさなくてはならない。これは矛盾である。この矛盾の証明をもう一度外からながめると、これは、$A_1, A_2,\ldots,A_m, B_1,\ldots,B_\ell$ からの矛盾の証明となっていることがわかる。したがって ZFC から矛盾が証明された。

特に、$\mathbb{P}$ としてコーエン強制法をとると、$\mathbb{P}$ は $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ の相対的無矛盾性を証明するための強制法のバリエーションとなっていることが知られているので、上のメタ数学的議論により、連続体仮説の否定の ZFC からの相対的無矛盾性の証明が得られたことになるのである。

このように強制法でのモデルの構成は、厳密には最初に言った V の拡大、というナイーヴなとらえ方はできないのであるが、方便として、あるいはブール値モデルによる解釈により、V の $\mathbb{P}$ によるジェネリック拡大を考える、というとらえ方の方が直観的でもあるため、そのような記述が採用されることも多い。

コーエンは、また、彼が連続体仮説の否定を証明したときに作ったモデルの内部モデルで選択公理の否定を満たすようなものを作っており、これによって選択公理の ZF 上の独立性も証明している。(65)

ここでは、構成的集合の理論や強制法の議論の細部や、これらの手法やその変形の様々な応用を含む、その後の集合論の発展について触れる余裕がないのが残念であるが、そのかわりに、これらのテーマについてさらに勉強してみたいと思う人のために、参考文献について一言触れて、この節を終りたいと思う。

拙著[19]には、本節で述べた事柄がもう少し詳く書かれている。また、入門書としては、[25]や[26]もよいだろう。

構成的集合や強制法の理論を含め集合論をもっときちんと勉強したい人には、日

(65) この主張も厳密には、上で見たようなメタ数学的議論に翻訳することができる。

本語訳も近々出版される予定になっている[15]が標準的な教科書としてすすめられる。強制法は、1960年代には、ごく一部の数学研究のエリートのみがマスターできる密儀のような感があった。筆者の知っている範囲で言えば、日本にもドイツにも強制法を初めて使いこなせるようになった人というのが特別のステータスを持っていた。アメリカでは少し状況が違っていたかもしれないが。このような雰囲気は1970年代まで続いていたが、現代では、強制法は集合論を勉強する学生が当然使いこなせるようになる（使いこなせなくてはならない）、ごく標準的な手法になっている。[15]は、強制法が、このように、集合論を勉強した人なら誰でも使いこなせるような手法として普及することになることのきっかけを作った教科書の一つ、と言うことができるだろう。

もっと近年の集合論の発展は[14]や[13]で見ることができるが、順序としては[15]をまずきちんと読んでからでないと、[14]や[13]に書いてあることの意味は理解しにくいと思う。

なお、筆者にも集合論の少し規模の大きな教科書／専門書[20]を日本語で書く計画があるのだが、この計画は今のところまだ鬼が笑う領域に属している。(66)

5　ゲーデルの哲学と集合論の未来

専門家以外には決して読破できないが、現代集合論の最先端の息吹が感じられる。（[31]の参考文献表での[14]へのコメント）

この本の中の考えは
テーブルをくもらす
雲の通過であろう
（[22]に収録の『あざみの衣』からの詩句）

(66) ただし、笑う鬼が一匹か二匹以上にはならいようにはしたいと思っているのであるが。

集合論は、前節で述べた連続体仮説の独立性の結果で決着がついてしまったわけでは決してない。特に1980年代後半くらいから現代にかけてなされた研究は質、量ともに、この分野を専門としている者にとってさえも圧倒されるものがある。

一方、集合論の近年の発展は一般にはほとんど知られていない。一般に知られていないだけではなくて、日本では一般の数学者にもほとんど知られていない、というのが実状であろう。もう1年前くらい前になるが、筆者の勤めている大学に非常勤で来ている N 大学の数学の博士課程を出た人と話していて、「集合論ですか、なつかしいなあ、昔、学部で勉強させられたことがあります」と言われて[67]、がっくりきたことがあった。しかし、超限帰納法と数理論理学という、どちらも日本の大学の数学教育のスタンダードなプログラムに含まれていない躓きの石があるために、集合論は、人一倍気を入れて専門的に勉強する、というのでもなければ、日本で数学の勉強をした人にはいささかハードルが高いと言えるかもしれない。実際、日本で現在集合論の研究を前線で行なっている数学者を思い浮かべてみると、その60%以上は外国で学位を取った人かその弟子である。その意味では、この節の初めに引用した[31]の「専門家以外には決して読破できない」というコメントもあながち誇張ではないかもしれない。

ゲーデルの[11]については前節でも触れたが、この10ページほどの文章[68]はゲーデルの集合論に関する基本思想を述べた一般向けの論文である。最初の版はゲーデルの構成的集合による相対的無矛盾性の仕事の少し後の1947年に書かれてい

(67) 集合に関するの基本的な記法を数学の基礎の一環として教える科目が、多くの数学科の学部の授業に組み込まれているが、これはピアノのおけいこのアノン（ハノン）の練習曲のようなものであろう。アノンの練習曲が音楽とあまり関係がないように、これらの科目もあまり集合論とは関係がないと言わざるを得ない。日本のさかんなクラシックのピアノ音楽教育の結果として、クラシック音楽とはアノンの練習曲のようなものだと思っている人が沢山輩出されているのだとしたら、集合論を学部で習った集合算のようなものだと思っている数学者が沢山いるかもしれない、というのと同じくらい憂鬱な気分にさせられることではある。

(68) ゲーデルの[11]については、[21]にも子細な分析がある。

て、その改訂版である1964年版はコーエンの仕事の直前に書き上げられている。しかし、この改訂版が実際に出版されたのはコーエンの仕事の後であるので、ゲーデルがその時点でこの改訂版を撤回しなかった、ということは、コーエンの仕事をふまえても、この文章の大きな変更の必要を感じていなかった、ということであろう。1947年版と1964年版とを比べてみると、1964年版では多数の脚注が付加されていて、1964年に付加、という但書のある脚注には、可測基数の存在から $V = L$ の否定が導かれる、というスコット（Dana Scott, 1932 – ）の結果が新しく引用されたりしてはいるが、本文には英語の推敲を除くと大きな変更はほとんどない。実際、既に1947年版のテキストでの連続体仮説の独立性の扱いは、未だ証明されていない事実という感じに近いものであるし、この文章で、ゲーデルは、連続体仮説からの帰結の『不自然さ』から、連続体仮説は正しくない、つまり、ZFCの『正しい』公理による拡張でその否定が証明されるべきである、という予想を表明すらしている。この文章を今読んでみると、ゲーデルはひょっとすると世紀末からミレニアムにかけての集合論の発展が全部見えていたのではないか、というような不思議な感覚にさえ襲われるのである。

[11] の連続体仮説の否定について述べたところの少し前のパラグラフで、ゲーデルは、正しい公理の判定条件となりうる状況をいくつかあげている。そこであげられているのは、公理から豊かな結論が導きだせること、その公理なしでも証明できる命題に、より直観的で本質的な別証を提供できること、また、その公理自身によって証明できるようになる結果の豊かさなどで、これを述べた後ゲーデルは（旧版でも新版でも）このパラグラフを、そのことによって、『分野[69]全体がよく見渡せるようになる』ときには、『それら（訳注：そのような公理）は、少なくと

（69）旧版の原文では、『分野』に、数学でいうと代数、幾何などに相当する学問の分野の単位を指すドイツ語の Disziplin に対応する英語の単語 discipline が使われており、新版では英語でやはり同じくらいかこれよりさらに細分化された学問分野の一領域を指す field という単語が使われている。

も確立された物理の理論と同じ意味で受け入れられるべきであろう』と結んでいる。この最後の部分のレトリックに惑わされてか、ゲーデルはアンバランストな、あるいはさらに病的なプラトニズムにとらわれいた、というような否定的な評価が一部でなされているようである。第1節で引用した[2]なども、その流れの中の発言なのではないかと思う。しかし、少なくとも数学者にとっては、ゲーデルのあげている判定条件は、数学の結果や、分野を評価するときの判断基準としてはきわめて自然なものであり、そのような判断を必要にせまられた場合に体系の公理にも適用する、というのはあながち無理な作戦とも言えないのではないかと思う。事実、この小文や[19]で述べたように、選択公理や基礎の公理の正しさの理由付けとしてあげることのできる議論もゲーデルの判定基準と呼応するものとなっているが、実際に、これらの公理[70]は広く受け入れられているわけである。

さて、連続体問題に戻ると、ゲーデルは、晩年、連続体の濃度が $\aleph_2$ であることを確信していたようである。ところが、近年、連続体の濃度が $\aleph_2$ になることを導く集合論の（自然な）公理（の候補）[71]がいくつも発見されてきている、というのは興味深い。[72]

連続体の濃度については、これまでの研究から三つの大きな可能性が浮上している：

（1）$2^{\aleph_0} = \aleph_1$：つまり連続体仮説が成り立つ場合である。前節で述べたゲーデルの結果にかかわらず、$V = L$ というのは、その理由ではありえないだろう。$V = L$ は、先程触れたスコットの結果から巨大な巨大基数の存在と抵触するか

---

(70) もちろん、これらの公理に対して異議をとなえる（となえたがる）人たちが今日でも存在することも無視できない事実ではあるが。

(71) このことに関連した解説には拙著[16]がある。

(72) ゲーデルが連続体仮説の無矛盾性証明で導入した絶対性の概念が、これらの公理の正当性の議論の重要なキーワードの一つになっていることも注目に値する。

らである。巨大基数の存在自身は連続体の大きさに[73]大きな影響を与えないことが判っているが、スコットの結果などから、大きな巨大基数の存在から$V \neq L$が強い形で成り立つことがわかるので、巨大基数は存在すべきものである、という立場からは、$V = L$を連続体仮説が成立することの理由[74]としては採用できない。連続体仮説が正しい理由としては、むしろ$\aleph_1$が潜在的に巨大基数である（つまりVのジェネリック拡大の内部モデルである種の巨大基数になり得る）ということと関連した状況であろう、松原 洋やフォアマン (Matthew Foreman, 1957 –)らによる、これに関連するいくつかの研究がある。

（2）$2^{\aleph_0} = \aleph_2$：Vとその絶対性ジェネリック拡大の間の或る種の絶対性がこれの理由[74]になりえる（[16]を参照）。ウディン (Hugh Woodin, 1955 –) の Ω-logic についてもここで触れるべきだが、これについては筆者がまだ不勉強のため、コメントは[20]までペンディングとしたい。

（∞）$2^{\aleph_0}$が非常に大きい：この理由[74]は$2^{\aleph_0}$が（実可測基数であるなどの理由から）潜在的な巨大基数であることであろう。

これらの3つの可能性は、どれか一つが正しいと選択すべきものではなく、むしろパラレルワールドとして、全部を認めた上でそれらの関連や対比を研究することで、総体として連続体に関する理解が深まってゆく、という種類のものであるかもしれない、とも思う。また、現代における連続体問題は連続体の濃度だけではなく、もっと多様な連続体の集合論的特性を注目すべきで、実際に、実数の集合論や記述集合論などの分野でそのような研究が積み重ねられてきており、それらの研究の成果の統合から何かが新しく見えはじめてきてもいるように思える。

筆者自身の専門ということで、ある程度の身贔屓をさし引いて考えなくてはい

(73) たとえば[14]を参照。

(74) ここで、『理由』としてあげられている命題は、勿論、それ自身集合論から（無矛盾性とすれば）独立な命題である。しかし、これらの命題は、連続体のサイズに関する主張に比べると、その正しさに関する議論の可能性の感じられる意味を持ったものになっていると言えるであろう。

けないにしても、ゲーデルとコーエンの仕事に答える形で発展してきた 1980 年以降の集合論は、21 世紀の現在、最も魅力的でチャレンジングな数学の研究分野の一つとなっていることは間違いないと言うことができると思う。

謝辞

田中尚夫先生、愛媛大学の藤田博司氏、静岡大学の依岡輝幸氏には本稿の執筆途中の原稿に目を通していただき、いくつかの貴重なコメントをいただいた。ここに感謝の意を表したい。

リファレンス

[1] ある数学科の学生の質問。[75]

[2] 『2ちゃんねる』に掲載された [30] の出版予告に対する（匿名の）コメント (2006).

[3] Amir Aczel, The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity, Four Walls Eight Windows (2000).

[4] Georg Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannischfaltigkeiten, Mathematische Annalen 21 (1883).

[5] ―――――, Briefe, (Hrsg.: H. Meschkowski und W. Nilson), Springer-Verlag (1991).

---

(75) 第 1 節の最後を参照されたい。

[6] John W., Jr. Dawson, Logical Dilemmas: The Life And Work of Kurt Godel, A K Peters (2005).[76]

[7] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, F. Fieweg (1872).

[8] ——————, Was sind und was sollen die Zahlen, F. Fieweg (1888).

[9] ——————, 河野伊三郎 訳、デーデキント、数について、[7] と [8] の合訳 (1961/2001).

[10] Juliet Floyd and Akihiro Kanamori, How Gödel Transformed Set Theory, Notices of the American Mathematical Society 53(2006), 417–425.

[11] Kurt Gödel, What is Cantor's Continuum Problem?, American Mathematical Monthly 54, 515–525; errata 55, 151 (1947); Revised and expanded version in: P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall (1984).

[12] David Hilbert, Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95(1), (1926), 161–190.

[13] T. Jech, Set-Theory, 3. millennium ed., revised and expanded, Springer, (2002).

[14] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer-Verlag (1994/1997); 日本語訳: A. カナモリ著、渕野 昌 訳、巨大基数の集合論、シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

(76) 最近、本書の日本語訳も出版されているが、この日本語訳は原書と対比しながら読むと非常に面白い本であるらしい。[20.02.22(土 12:21(JST)) に補筆]: これについては、この作文をしてから少したって 2008 年 4 月に書いた `https://fuchino.ddo.jp/barcelona.html#08.04.14` を参照してください.

[15] Kenneth Kunen, Set-Theory, An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980): 日本語訳: K. キューネン著、藤田 博司 訳、集合論 — 独立性証明への案内、日本評論社 (近刊).

[16] 渕野 昌、Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から、数学 (Sugaku), Vol.56, No.3 (2004), 248–259.

[17] ———、ルベーク測度の拡張の可能性について、談話会講演、静岡大学理学部数学科 講演で用いたコンピュータによる出力の pdf 版：
`https://fuchino.ddo.jp/papers/shizuoka-ws06-talk.pdf`

[18] ———、ゲーデル以降の数学と数学基礎論、数学のたのしみ Vol. 10, 2006 年秋号 (2006).

[19] ———、構成的集合と公理的集合論入門、[30] に収録 (2007+α).

[20] ———、集合論 (仮題)、準備中 (200?).

[21] 松原 洋、集合論の発展 —ゲーデルのプログラムの視点から—、[30] に収録 (2007+α).

[22] 西脇 順三郎、豊饒の女神、思潮社 (1962).

[23] 斎藤 正彦、数学の基礎 — 集合・数・位相、東京大学出版会 (2002).

[24] 高木貞治、解析概論、岩波書店 (1938/1961).

[25] 田中尚夫、選択公理と数学 増訂版、遊星社 (2005).

[26] ———、公理的集合論、培風館 (1982).

[27] 田中一之、逆数学と2階算術、河合文化教育研究所 (河合出版) (1997).

[28] ——— 編、ゲーデルと２０世紀の論理学（ロジック）、第2巻、完全性定理とモデル理論、東京大学出版会 (2006).

[29] ———— 編、ゲーデルと２０世紀の論理学、第３巻、不完全性定理と算術の体系、東京大学出版会 (近刊).

[30] ———— 編、ゲーデルと２０世紀の論理学、第４巻、集合論とプラトニズム、東京大学出版会 (近刊).

[31] 玉野 研一、なっとくする無限の話、講談社 (2004).

[32] 坪井 明人、モデル理論とコンパクト性、[28] に収録、 111–190 (2006).

[33] John von Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum, 1, 199–208 (1923).

[34] ————————, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 154, 219-240 (1925).

[35] 山崎 武、逆数学と２階算術、[29] に収録 (2007+α).

[36] Ernst Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue undersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Fundamenta Mathematicae, 16, 29–47 (1930).

[雑誌掲載版以降の補足文献]

[37] —————、渕野 昌 翻訳／解説、数とは何かそして何であるべきか、ちくま学芸文庫、(2013) ([7] と [8] の日本語訳、および [36] の日本語訳を含み，訳者による子細な解説を含む。)。

[38] **巨大基数と巨大な巨大基数、超数学での無限と集合論的無限、それらに対する有限の諸相**, 現代思想 (寄稿), 2019 年 12 月号, (2019). この記事の拡張版: `https://fuchino.ddo.jp/misc/large-cardinals-2019-x.pdf`