平面単位距離グラフの彩色について

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

神戸大学大学院 システム情報学研究科

http://fuchino.ddo.jp/index-j.html

(January 2, 2017 (00:21 JST) version)

大阪府立大学 情報数理談話会での講演

July 20, 2011

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

グラフ

- ここでは，グラフとは無向で一重のグラフのこととする:

$G = \langle G, E\rangle$ がグラフとは，(1) $E \subseteq G^2 \setminus \{\langle x, x\rangle : x \in G\}$ で，
(2) E は symmetric，つまり，
すべての $x, y \in G$ に対し，$\langle x, y\rangle \in E \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in E$
となることとする．

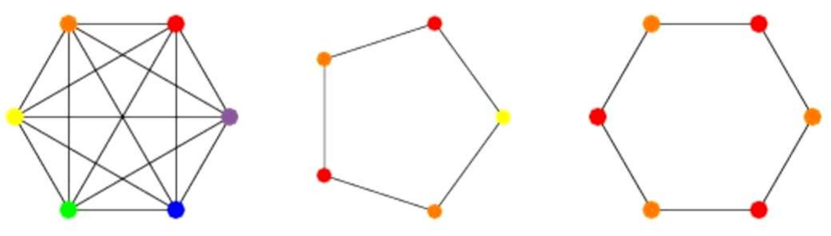
$\langle x, y\rangle \in E$ を xEy と書いて，
x と y は (このグラフで) つながっている
と解釈する．

グラフの chromatic number

空でない集合（色の集合） C に対して写像 $f : G \to C$ が proper coloring であるとは，すべての $x, y \in G$ に対し，xEy なら $f(x) \neq f(y)$ となることとする．

- G の chromatic number $\chi(G)$ を，次のように定義する:

$\chi(G) = \min\{\kappa :$ G から基数 κ への proper coloring が存在する$\}$



$\chi(G) = 6$ | $\chi(G) = 3$ | $\chi(G) = 2$

平面単位距離グラフ

$\mathbb{R}^2$ 上の関係 U を

$$U = \{\langle x, y\rangle \in (\mathbb{R}^2)^2 : d(x, y) = 1\}$$

と定義して，グラフ $(\mathbb{R}^2, U)$ を，unit distance graph of the plane (平面単位距離グラフ) とよぶ.

以下では，このグラフを $\mathcal{U}$ とあらわすことにする.

$$\mathcal{U} = (\mathbb{R}^2, U)$$

である.

$\chi(\mathcal{U})$ は何か? (Hadwiger-Nelson Problem)

この問題は 50 年以上未解決である.

ただし，次の部分解が知られている:

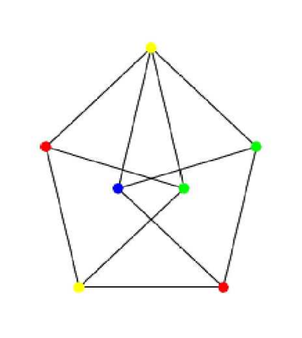
$$4 \leqq \chi(\mathcal{U}) \leqq 7.$$

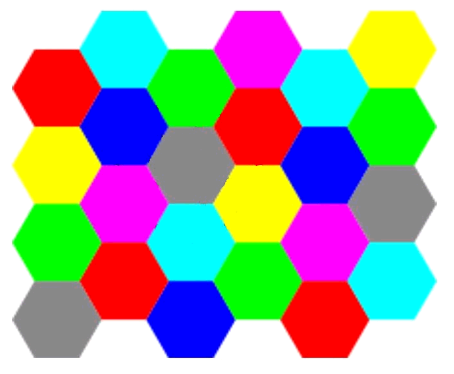
不等式とその証明

補題 1

$$4 \leqq \chi(\mathcal{U}) \leqq 7.$$

証明.





□

De Bruijn-Erdős の定理

$\chi(\mathcal{U})$ の問題は，有限グラフの chromatic number の問題に還元できる．

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し，
$k = \sup\{\chi(H) : H$ は G の有限部分グラフ $\}$ が有限なら
$\chi(G) = k$ が成り立つ．

系 3

$\chi(\mathcal{U}) = \max\{\chi(H) : H$ は $\mathcal{U}$ の有限部分グラフ $\}$.

系 3 の証明:

H を G の部分グラフとするとき，$\chi(H) \leqq \chi(G)$ である．

したがって，
$\sup\{\chi(H) : H$ は $\mathcal{U}$ の有限部分グラフ $\} \leqq \chi(\mathcal{U}) \leqq 7$
となるから，定理 2 を用いることができる． $\square$

De Bruijn-Erdős の定理の証明

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し，
$k = \sup\{\chi(H) : H$ は G の有限部分グラフ $\}$ が有限なら
$\chi(G) = k$ が成り立つ.

証明.

$k = \max\{\chi(H) : H$ は G の有限部分グラフ $\}$ とすると，
$k \leqq \chi(G)$ は明らかである.

有限な $x \subseteq G$ に対し，$G_x = \langle x, E_x \rangle$ を対応する G の部分グラフとし $f_x : x \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ を proper colorging とする.

$X = \{x \subseteq G : x$ は有限 $\}$ とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を，すべての $a \in G$ に対し，$\{x \in X : a \in x\} \in \mathcal{F}$ となるような ultrafilter として，$\langle G^*, E^*, f^* \rangle$ を $\langle x, E_x, f_x \rangle, x \in X$ の $\mathcal{F}$ による ultraproduct とする.

$G \subseteq G^*$ と考えてよいが，$f^* \restriction G : G \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ は G の proper coloring である. □

De Bruijn-Erdős の定理の証明

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し，
$k = \sup\{\chi(H) : H$ は G の有限部分グラフ $\}$ が有限なら
$\chi(G) = k$ が成り立つ．

注意.

- Bruijn と Erdős による証明はここで示したものとは異なる．
- ここで示した証明では選択公理が (ultrafilter の存在を保証するところで) 本質的に用いられている．
- 実際，選択公理を仮定しないときには，定理が成り立たない場合もある (Shelah-Soifer, 2003).
- $\chi(\mathcal{U}) > \max\{\chi(H) : H$ は $\mathcal{U}$ の有限部分グラフ $\}$ が (選択公理を仮定しない) 集合論と矛盾しない可能性は (今のところ) まだゼロではない．

グラフの list chromatic number

グラフ G の list chromatic number $\chi_\ell(G)$ を，以下の (*) を満たす最小の数（基数） κ とする:

(*) G の各点に任意の κ 色からなる色のリストを対応させたとき，それらのリストから色を選ぶような proper coloring が必ず存在する．

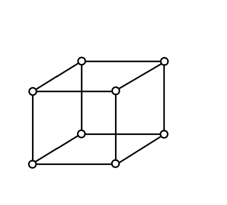
Lemma 4

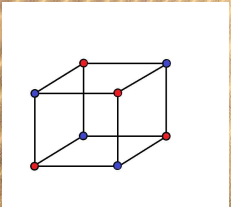
任意のグラフ G に対し，$\chi(G) \leqq \chi_\ell(G)$ である．

証明． $\kappa = \chi_\ell(G)$ として，G の頂点に同一の κ 色の色のリストを対応させた場合を考えれば明らかである． □

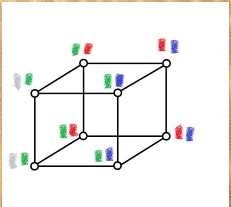
$\chi(G) < \chi_\ell(G)$ となるグラフ G は存在する

例: 立方体の頂点と辺からなるグラフを G とする:





$\chi(G) = 2$



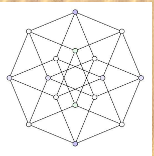
$\chi_\ell(G) > 2$

Lemma 5

G_n を n 次元立方体の頂点と辺からなるグラフとするとき $\chi_\ell(G_n) \geqq n$ となる.

Lemma 6

n 次元立方体の頂点と辺からなるグラフ G_n は $\mathcal{U}$ に埋め込める.



系 7

$$\chi(\mathcal{U}) \leqq 7 < \aleph_0 \leqq \chi_\ell(\mathcal{U}).$$

グラフの coloring number

グラフ $G = \langle G, E \rangle$ の coloring number $col(G)$ を，以下の (*) を満たす最小の基数 κ とする:

(*) G 上の整列順序 (well-ordering) $\sqsubset$ で，すべての $a \in G$ に対し，$\{b \in G : bEa,\ b \sqsubset a\}$ のサイズが $< \kappa$ になるようなものが存在する．

Lemma 8

すべてのグラフ G に対し，$\chi_\ell(G) \leq col(G)$ が成り立つ．

証明．　$\kappa = col(G)$ で，$\sqsubset$ を対応する G 上の整列順序とする．

ℓ を G の各点に κ 個の要素からなる (色の) 集合を対応させる関数 (リスト) とする．

$\sqsubset$ に関する帰納法で，G の proper coloring f を $f(a) \in \ell(a)$, $(a \in G)$ となるように作れる:

f が $\{b \in G : b \sqsubset a\}$ 上で既に定義されたとき，$\ell(a) \setminus \{f(b) : b \in G,\ b \sqsubset a,\ bEa\}$ は空でないから，この要素の一つを $f(a)$ とすればよい． □

定理 9 (S.F.(2011), Hiroshi Sakai (2009))

$col(\mathcal{U}) \leqq \aleph_0$.

証明は elementary submodels による coloring number の特徴付けを用いると数行でできる.

詳細は:

S.Fuchino, Remarks on the coloring number of graphs, RIMS Kôkyûroku 1754 (2011), 6-16.

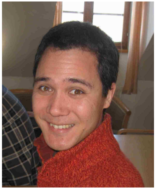
を参照.

系 10 (Ardal, Maňuch, Rosenfeld, Shelah and Stacho (2011))

$\chi_\ell(\mathcal{U}) = \aleph_0$.

(personal) history

講演者 (渕野) は，平面の chromatic number の問題 (Hadwiger-Nelson problem) について，2009 年秋に RIMS の集合論研究集会に参加した Lionel Nguyen Van Thé から教わった．



この直後，講演者からこの話を聞いた酒井拓史は $col(\mathcal{U}) \leqq \aleph_0$ の直接証明を得た．この証明について Nguyen Van Thé と 3 人で議論したが，その後，酒井も渕野もこの証明を忘れてしまった．

講演者は，2011 年の初めに coloring number の elementary submodels による特徴付けを発見して，この特徴付けを用いて $col(\mathcal{U}) \leqq \aleph_0$ の証明の再現を含む，より一般的な結果を得た．この論文をさらに拡張したものを酒井との共著で準備中である．

参考文献など

[1] 英語版 wikipedia の “Hadwiger-Nelson problem” の項目
`http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson_problem`

[2] A. Soifer, The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators, Springer (2008).

[3] S. Fuchino, Remarks on the coloring number of graphs, RIMS Kôkyûroku, 1754, (2011), 6-16.

[4] web ページ:

`http://fuchino.ddo.jp/index-j.html`

本スライドも，この web page にリンクする予定である．

fin