数理論理学 概論

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

神戸大学大学院 システム情報学研究科

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(May 23, 2011 (18:44 JST) version)

a lecture in the omnibus lecture series
情報基礎特論

May 23, 2011

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

The Name of the Game

この講義で話すのは,

- 記号論理学 (symbolic logic)
- 数理論理学 (mathematical logic)
- 数学基礎論 (foundation of mathematics)

といったキーワードで呼ばれることのある研究分野の概論です.

ただし, 実際には「記号論理学」も「数学基礎論」も, 本来は, ここでの 数理論理学 の部分分野の名称なので, ここでは専ら(もっぱら)「数理論理学」という名称を用いることにします.

数理論理学の研究分野

- ラフな分類ですが，数理論理学には，以下のような研究分野があります:
  - ▷ 数学基礎論
  - ▷ 論理学　(菊池)
  - ▷ 証明論
  - ▷ 計算論（帰納的関数論）
  - ▷ モデル理論　(桔梗)
  - ▷ 集合論　(酒井，Brendle, 渕野)
- 隣接分野には:
  - ▷ 数理論理学の理論計算機科学への応用　(田村，番原)
  - ▷ 哲学的な論理学

▷: システム情報学研究科（主に私のグループと田村先生のグループ）で，現在 (active に) 研究されている分野.

形式論理 (formal logic)

- 数理論理学の諸分野はいずれも 形式論理を応用する，という点が他の数学の研究分野と大きく異なります.
- 以下で，形式論理で基本となる１階の 述語論理 に関連したことの説明をします.
- １階の述語論理とそれに関連する基礎的な事柄については，私の学部２年の講義「数理論理学」 と大学院の講義 「数理論理学特論」 で詳しく扱われています.

述語論理の導入のモティヴェーション

- ▶ 述語論理の導入モティヴェーション
  - ▷ 数学を形式的に（記号の操作の体系として）展開できるような枠組が何かを調べる (論理的体系 (logical system))

この方向での研究の先駆者としては

- ギリシャ古典論理学
- Gottfried Wilhelm von Leibniz
  (1646(寛永 23 年) - 1716(享保 1 年)) (Leibniz の “夢”)
- Ernst Schröder (1841(天保 12 年) - 1902(明治 35 年))
- Friedrich Ludwig Gottlob Frege
  (1848(嘉永 1 年) - 1925(大正 14 年))

などがあげられます.

- ▷ 20 世紀の前半に,（1 階の）述語論理で公理的に展開される集合論の中で, すべての数学的理論が展開できることが明かになっています.

集合論の公理の体系の述語論理による記述

- 述語論理の 論理式 （文章に相当する記号列）は，基本的な関係をあらわす表現（原子論理式）から出発して，それらを $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\rightarrow$ (then), $\leftrightarrow$ (if and only if), $\neg$ (not), $\forall x$ (for all x), $\exists x$ (there exists x) などの論理記号や量化子記号で（きめられた文法にそって）つなぎあわせることで得られます.

- 例として，集合論の公理系を述語論理の論理式の集まりとして記述してみます:

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \mathrel{\varepsilon} x \leftrightarrow z \mathrel{\varepsilon} y) \ \rightarrow\ x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg (t \mathrel{\varepsilon} z)$

対の公理: $\forall x \forall y (\exists z \forall t\, (t \mathrel{\varepsilon} z \ \leftrightarrow\ t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x (\exists s \forall t\, [t \mathrel{\varepsilon} s \ \leftrightarrow\ \exists y\, (y \mathrel{\varepsilon} x \ \wedge\ t \mathrel{\varepsilon} y))]$

集合論の公理の続き

- 以下では “$z \subseteq x$” を “$\forall y\,(y \varepsilon z \to y \varepsilon x)$” の省略形とします. “$x \equiv \emptyset$” は “$\neg\exists u\,(u \varepsilon x)$” のこととします. また, “$t \cup \{t\} \varepsilon x$” は, “$\exists u(\forall v(v \in u \leftrightarrow (v \in t \vee v \equiv t)) \wedge u \in x)$” の略です.

巾集合公理: $\forall x \exists p \forall t\,[t \varepsilon p \leftrightarrow t \subseteq x]$

無限公理: $\exists x\,[\exists y\,(y \varepsilon x \wedge y \equiv \emptyset) \wedge \forall t\,(t \varepsilon x \to t \cup \{t\} \varepsilon x)]$

基礎の公理: $\forall x\,[\neg x \equiv \emptyset \to \exists y\,(y \varepsilon x \wedge \forall z\,(z \varepsilon y \to \neg z \varepsilon x))]$

- 次の二つの公理はすべての論理式 φ についてそれらのパターンの論理式を公理として集めてくるものとします.

分出公理$_\varphi$: $\forall \overline{x} \forall x \exists s \forall t\,[t \varepsilon s \leftrightarrow t \varepsilon x \wedge \varphi(t, \overline{x})]$

置換公理$_\varphi$:

$$\forall \overline{x} \forall a(\forall x\,[x \varepsilon a \to \exists y\, \varphi(x, y, \overline{x})]$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall y'\,[\varphi(x, y, \overline{x}) \wedge \varphi(x, y', \overline{x}) \to y \equiv y']$$
$$\to \exists b \forall y\,[y \varepsilon b \leftrightarrow \exists x\,(x \varepsilon a \wedge \varphi(x, y, \overline{x}))]).$$

集合論の公理の続き (2)

- 上の公理系は無限個の公理を含むものになっています.

— この公理系のどんな有限部分も全体とは同値にならいことが証明できます.

- 通常は, 上の公理の他に 選択公理 と呼ばれる公理も仮定しますが, ここでは省略します.

- 前にも触れたように, 今までに知られているほとんど数学のすべてが, この枠組の中で展開できます.

▷ この枠組の中では展開できないことが知られている, ごく少数の例外的な数学理論も, この枠組のある意味で本質的でない拡張 (conservative extension) の中で展開できることが示せます.

述語論理の理論の発展

- 述語論理について以下の点を明らかにする必要があります:
  - 述語論理の体系が矛盾を含まないことを調べる.

これについては, Gerhard Genzen (1909(明治 42 年) – 1945(昭和 20 年)) による肯定的な結果が得られています.

  - そのような体系での形式的証明に, すべての数学的な証明が翻訳できるか?

Yes: Kurt Gödel (1906(明治 39 年) – 1978(昭和 53 年))
完全性定理 (Completeness Theorem, 1929)

  - すべての数学理論がそのような体系上で本当に展開できるか?

Yes: 述語論理上の集合論.

述語論理の理論の発展 (2)

▷ 述語論理上で展開された数学が矛盾を含まないことを調べる.

David Hilbert (1862- 1943, 文久 2 年 – 昭和 18 年)
("Hilbert のプログラム")

▷ ヒルベルトのプログラムは（厳密な意味では）, (完全には)
実行不可能である:

Kurt Gödel (1906 - 1978)
不完全性定理 (Incompleteness Theorems, l931)

▷ ヒルベルトのプログラムの部分的な実現:

▶ たとえば，初等幾何や古典的な解析学は，前出の Genzen や, David Hilbert, Paul Bernays, Wilhelm Ackerman, Alfred Tarski らの研究結果から矛盾を含まないことの保証ができる集合論の部分体系に含まれることが示せます．この意味では，19 世紀くらいまでに発展した数学については（工学部で普通に使う数学は大体これでカバーできる）矛盾を含まないことの厳密な証明が得られていると言えます.

最後に

- このスライドの印刷用 pdf ファイルは,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/misc/intro-math-logic-pf.pdf

としてダウンロードできます.

- 「数理論理学」「数理論理学特論」のレクチャーノート（まだ最終版ではありません）は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

としてダウンロードできます.