数学の基礎としての集合論 vs. 数学としての集合論 *

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)
神戸大学大学院 工学研究科 情報知能学専攻

1　はじめに

「集合論は数学の基礎である」というような主張を耳にすることがある．しかし，数学の現場ではこの主張の意味するところは顧みられることが少ないように思える．日本での数学系の学科では集合論を選択科目としてすら教えないことがほとんどなので，多くの人にとって，この主張を吟味するための背景知識は全く与えられていない，というのが現状であろう．[13] の前書きには，

> 集合論の上に全数学が築かれることは常識であるのに，公理的集合論の授業は（とくに日本では）非常にすくない．... 公理的集合論を知らない数学者も多いだろう．...

という一節が見られる．しかし，もし日本の多くの数学者が公理的集合論を知らないのだとすると，それは取りも直さず，数学をやるためには集合論などいらない，ということを示唆しているのではないだろうか？

これは，一面そうとも言えるかもしれないが，しかし講演者には，むしろ，そうとは言いきれない面もあるように思える．次のような相似な状況を考えてみよう．数学は（理論）物理学の基礎である，という主張はあながち的外れなものではないであろう．しかし，話してみると，物理学者の中には数学の何たるかを本当に全く知らない人がいることに驚かされることがある[*1]．そのよう

---

[*] このテキストは，著者の中部大学在職中の 2003 年 9 月 24 日に，千葉大で開かれた数学会の秋季総合分科会の企画特別講演として講演したものの予稿に若干手を加えたものです．

[*1] これは単に講演者の個人的な体験である．もちろん逆に，物理学者の中には数学者も顔負けの数学の達人もいたりもするのだが.

な人は，自分は数学を知らなくても物理学の研究ができているのだから，物理学には数学などいらないのだ，と主張するかもしれない．しかし，数学者としては，そのような主張に対して「そんなこともないでしょう ...」と異議をはさみたくなるところである．同様に，数学をやるには集合論などいらない，という主張には，講演者はやはり異議を唱えたくなるのである．ここで，“異議を唱えたくなる”，というのは単に好みや政治的立場上で言っているわけではなく，それなりの理由があるわけだが，そのことを説明するために，本講演では「集合論は数学の基礎である」という命題をあらためて検証しなおしてみたいと思う．といっても，できるだけ何の前提知識も仮定せずに論ずることを試みることになるめ，ここで述べることのできるのは，ごく初等的な事柄ばかりであり，より本格的な議論については別の機会に譲らざるを得ない．

さて，「数学の基礎としての集合論」というような趣旨で話を進めると，多分，「そんなことを言っても実際には集合論は何か役に立つのか？」というような疑問を呈される方が必ずいるものと思う．「役に立つのか？」という設問は，たとえば工学部での議論では，（この頃よく聞く表現で言うと）「経済効果が大きいのか？」というものとほとんど同質であることが多のではないだろうか．一方，数学者が，こう質問したときには，その意味するところは畢竟「それを使って面白い定理が証明できるのか？」または「面白い理論は構築できるのか？」といったところではないだろうか[*2]？ そこで，本講演の後半では，集合論がこの意味で非常に “役に立つ” ものであることを示すような例をいくつかとりあげてみたいと思う．

2　数学の基礎としての集合論

集合論と数学の関係の考察にあたって，まず集合論の基礎的な部分を復習してみることにする．集合論は，標準的には以下のような公理からなる数学的体系での（かつ／または，このような数学的体系に関する）研究である．

以下で述べる公理系は，ツェルメロ (Ernst Zermelo, 1871–1953) により定式化され，フレンケル (Abraham Fraenkel, 1891–1965) によりさらに拡張されて得られた体系に基づくもので，ZFC とよばれている．‘Z’ と ‘F’ はこの 2 人の頭文字で，最後の ‘C’ は選択公理 (axiom of <u>c</u>hoice) をあらわしている．

[*2] あるいはもっと露骨に，「自分の研究で使えるのか？」ということかもしれない．

公理的集合論では，考察の対象はすべて集合である，と考える．したがって，以下で，“ある x について ...” と言ったときには “ある集合 x について ...” という意味である．

集合論では，対象の集まりかたのみが問題となるので，2つの集合 a, b に対して “a が b の要素である” という帰属関係を唯一の基本的な述語として採用する．この関係を “$a \in b$” とあらわす．他の述語はすべて帰属関係（および，より基本的な同等関係 “$=$”）のみを使って定義される．$a \in b$ のとき a は b の元（げん）である，という言い方もする．集合論の公理系の一番最初の公理は，集合はその要素により一意に決まることを主張する次のものである：

（外延性公理）　任意の x, y に対し，すべての z で，$z \in x$ と $z \in y$ が同値になるとき，$x = y$ が成り立つ．

ZFC の他の公理は，すべて，「集合 $x_1, x_2, \ldots$ が与えられたとき，これらから ... という性質を持つ集合を作ることができる」というタイプの主張（存在公理）となっている．

（空集合公理）　要素を一つも持たないような集合が存在する．

外延性公理により，要素を一つも持たない集合は存在すれば一意であることが示せる．この一意に決まるところの，要素を一つも持たないような集合を $\emptyset$ であらわし空集合とよぶ．

（対の公理）　任意の x と y に対し，x と y だけを要素として持つような z が存在する．

対の公理でその存在の保証された（これも外延性の公理により一意に決まるところの）集合 z を $\{x, y\}$ とあらわす．特に $x = y$ のときには，これを $\{x\}$ と書いて，singleton x とよぶ．対の公理を用いて 2 つの集合 x, y の順序対を，$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ として導入することができる．x, y の順序対もこの定義により一意に決まるので，これを (x, y) と書く（集合論の最近の文献では，$\langle x, y\rangle$ という記号を用いることも多い）．順序対の定義は，必ずしもこれでなくてもよいのであるが，要点は，$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ かつ $y = y'$ という同値関係が成り立つことである．

（和集合の公理）　任意の x に対し，集合 y で，任意の z が y の元であることと，ある $u \in x$ が存在して $z \in u$ となることが同値になるようなものが存在する．

この公理は x を集合族と見てその和集合をとった y の存在を主張している(我々の立場ではすべての集合は集合からなるので，集合と集合族の区別はないのであるが，要素を集合として扱っていることを強調するために「集合族」という言葉を使うこともある).

特に，$x = \{v, w\}$ のときには，上の公理での y は v と w の普通の意味での和集合 $v \cup w$ となる．

φ を集合に関する性質とするとき，次の公理を考える（ここで用いた "集合に関する性質" という言い回しは意味が曖昧で，さらに明確化する必要がある．実はこれは非常に重要なポイントとなるが，これについては後で再びコメントする).

（分出公理）$_{\varphi}$　$x_1,\ldots, x_n$ **を固定するとき，任意の** x **に対し，**x **の元** z **で** $\varphi(z, x_1, \ldots x_n)$ **を満たすようなものの全体からなる集合** y **が存在する．**

上のような y は やはり φ と $x_1, \ldots x_n$ が与えられると一意に確定する．そこでこれを $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \ldots x_n)\}$ とあらわす．

（無限公理）　**集合** x **で空集合を元として含み，すべての** $y \in x$ **に対し，** $y \cup \{y\} \in x$ **となるようなものが存在する．**

上のような集合 x は，仮定により $\emptyset \in x$ だから，$\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$, $\ldots$ となり，直観的な意味で x は無限個の元を含んでいることがわかる．集合論では，自然数 $0, 1, 2, \ldots$ を，それぞれ $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$ のこととして導入する[*3]．したがって，無限公理で存在の保証された集合 x は $0, 1, 2, \ldots$ のすべてを含むものとなっている．そこで，このような x と分出公理を用いると，自然数の全体からなる集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ の存在が証明できる．

集合 x が集合 y の部分集合であるとは，すべての z に対し，$z \in x$ なら $z \in y$ が成り立つこととし，これを $x \subseteq y$ であらわす．たとえば，分出公理での $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \ldots x_n)\}$ は x の部分集合である．

[*3] これも順序対と同様に具体的にはどのようなものとして導入するかは重要ではないが，ここでのように導入すると，自然数や無限順序数の理論が統一的かつ自然に展開できることが知られている．このため，この定義は集合論では標準的なものとなっている．

（べき集合の公理） **任意の x に対し，そのべき集合が存在する．つまり，集合 y で，すべての z に対し $z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$ となるようなものが存在する．**

集合 x のべき集合を $\mathcal{P}(x)$ とあらわす．先ほど自然数の全体 $\mathbb{N}$ が集合としてとらえられることを見たが，たとえば，$\mathbb{N}$ の部分集合を実数の二進表示と対応づけて考えることにより（たとえば $X \subseteq \mathbb{N}$ で $2n+1$ が X に含まれていたときには X に対応する実数の二進表示での小数点以下 n 桁目の数字は 1 とする，などと決めることで），上の公理でその存在の保証された集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ （の適当な部分集合）から，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を，ここでの公理的集合論の枠組の中で構成することができることになる．

さきほどの順序対を思い出してみると，集合 a, b に対し，$\{(x,y) : x \in a, y \in b\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ となるので，べき集合の公理と分出公理を用いると，a と b の直積（デカルト積）$a \times b = \{(x,y) : x \in a, y \in b\}$ の存在が示せる．これにより，たとえば，集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ etc. を集合論の中で扱うことができる．また集合 a から集合 b への写像（関数）も，グラフ $f \subseteq a \times b$ として扱うことができる．つまり，$f \subseteq a \times b$ が a から b への関数である，とは，すべての $x \in a$ に対し，$(x,y) \in f$ となるような $y \in b$ がちょうど 1 つ存在することとして定義するわけである．分出公理により，${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \{f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) : f$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $\}$ や，$C(\mathbb{R}) = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数 $\}$ などといった集合の存在も示せる[*4]．

このように続けることで，我々が普通に出会う数学的対象は，すべて公理的集合論の枠組の中で扱えるようになる．さらに，たとえば，前記のようにして構成した $\mathbb{N}$ は，（たとえばペアノが定式化したような）自然数の全体の満たすべき性質を，すべて満たすものになっていることを示すことができる[*5]．同様にして数学で通常に行われる推論はすべて集合論の公理系からの演繹に翻訳できることが確かめられる．

上の議論でもわかるように，ここまでで述べた ZFC の公理と，以下に述べ

[*4] この場合 $f(x)$ は $(x,y) \in f$ となるような（f が関数なら一意に決まるところの） y をあらわす．

[*5] ここでの $\mathbb{N}$ の定義から，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$n+1$ は $n \cup \{n\}$ のこととして定義すればよい．$\mathbb{N}$ での $\in$ に関する帰納法による関数の導入原理を用意しておくと，このことから数の和や積の演算が自然に導入できる．等々．

る選択公理だけからなる枠組の中でも，ほとんどすべての数学的議論は展開できるのであるが，集合論ではさらに次の 2 つの公理を仮定する．

分出公理と同じように，次の公理も，集合に関する性質 $\varphi(x,y,z,x_1,\ldots x_n)$ 一つ一つに対応する公理を集めた公理群になっている：

(置換公理)$_\varphi$ **すべての集合 A と，c_1，...，c_n に対し，任意の $a \in A$ をとったときに，$\varphi(a,b,A,c_1,\ldots,c_n)$ となるような b が一意に決まるなら，集合 C で，すべての $a \in A$ に対し $\varphi(a,b,A,c_1,\ldots,c_n)$ となる $b \in C$ が見つかるようなものが存在する．**

置換公理は，分出公理の拡張になっており，実際，置換公理と他の集合論の公理から，分出公理の一つ一つの主張を導きだすことができる．これまでの他の公理と違い，置換公理は通常の数学の議論では用いられることが稀な公理である．古典的な数学にこの公理が必要となることはない，と断言してもよいくらいである．しかし 20 世紀以降の数学では，たとえば，ボレル集合に関するいくつかの重要な結果で，この公理が本質的に用いられていることが知られている[*6]．

次の基礎の公理と呼ばれるものも，通常の数学の議論ではほとんど用いられることがないものである．

(基礎の公理) **空集合でない任意の集合 x に対し，$y \in x$ で，どんな $z \in x$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する．**

基礎の公理から，すべての集合 x に対し $x \in x$ とはならないことがわかる．また，集合の列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ で，$x_n \ni x_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つなら，$x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ とすると，x は基礎の公理の反例になってしまう．したがって，基礎の公理のもとでは，このような集合列は存在しない．

基礎の公理は技術的な理由で付け加えられた公理と言えるが，この公理を集合論の公理系に加えることの妥当性は，(1) $x \cup \mathcal{P}(x) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \cup \cdots$ の[*7]任意の部分集合が $\in$ に関する極小元を持つような集合 x の全体が基礎の公理を

[*6] もちろん集合論（集合論的数学）での議論ではこの定理も縦横に用いられることになる．

[*7] 実は $x \cup \mathcal{P}(x) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \cup \cdots$ という集合の存在を言うためには，一般には置換公理が必要である！

含む集合論の公理系を満たすものになること — 特にこのことから，ZFC から基礎の公理を除いたものが矛盾しないなら，（基礎の公理も含む） ZFC も矛盾しないことがわかる；(2) 上で定義した $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ... など集合論の枠組の中で通常の数学を展開するのに必要となる集合は，すべて (1) のような性質を持つものになっていること；(3) 基礎の公理での性質を満たさない集合の存在を保証する公理を集合論の他の公理に付け加えても (1) の性質を持つ集合に関しては何ら新しい結論が得られないこと[*8]，により保証されている，と考えることができる．

公理的集合論（ないし通常の数学的議論）では次の選択公理が頻繁に用いられる：

（選択公理） **空集合を含まないような任意の集合 x に対し，x から $\bigcup x$ への写像 f で $f(z) \in z$ がすべての $z \in x$ に対し成り立つようなものが存在する．**

このような f は，集合族 x の一つ一つの要素 z から z の “代表” 元 $f(z)$ を選び出す関数となっている．

選択公理は，Zermelo がこの公理を定式化した当初から色々と物議をかもした公理である．バナッハ=タルスキーの逆理など，我々の物理的直観とあいいれない面もあるため，問題視する人もあるようである．この公理が通常仮定される理由としては，(1) ゲーデルの構成的集合に関する結果から，ZFC と ZFC から選択公理を除いた公理系とは無矛盾性に関して等価であること；(2) Shoenfield の絶対性定理により，集合論での命題としてあらわしたときにそれほど複雑な形にならない数学的命題については[*9]，ZFC での証明が得られれば，それから選択公理を用いない証明を作りなおすことができること；(3) 選択公理のオルタナティヴと考えられる決定性公理の成り立つ世界は，選択公理の成り立つ集合論の “宇宙” の内部モデルとして捉らえることができること (Woodin による)；そして何よりもまず，(4) 選択公理を仮定したときに可能になる（集合論的）数学が非常に豊かなものであること，などが挙げられる．

さて，以上で集合論の公理系 ZFC の公理をすべて見たわけであるが，ここ

[*8] つまり，このような拡張された公理系は集合論の公理系の一種の保守拡大になっている．

[*9] この主張を正確に記述するのには数理論理学での知識を必要とするため，“それほど複雑な形にならない” という条件の実際の意味については触れないことにするが，古典的数学で扱われるような種類の命題の多くがこのようなものになる．

で，保留にしていた，分出公理と置換公理における，“集合に関する性質” という曖昧表現の問題について触れておきたいと思う．分出公理や置換公理の個々の適用の際には，具体的な集合の性質が与えられるので，問題がなさそうにも思えるが，これでは，何を “集合に関する性質” と考えてよいのか，という指針が全く与えられておらず， ZFC の公理系の外延が定かにならない．歴史的には，Zermelo と Fraenkel は，上で述べたような，問題の残った形での集合論の公理系を提示するに終っている．これに現在知られているような厳密な意味での公理系としての形が与えられたのは，Thoralf Skolem (1887–1963) の 1923 年の論文においてで，そこでは，その当時新興の形式論理学での１階の論理が用いられていた．

数学の記述に関連する論理体系は，そこでどれだけの集合論的概念を a priori なものと捉えるかに従って，いくつかの種類が考えられるのであるが，１階の論理は，そのうち論理体系としては集合論的な概念を全く内包しないものとなっている．１階の論理は他の論理と同じように，その論理における論理式（命題や述語をあらわす記号列）とそれらの間の演繹関係の定義によって与えられる．集合論における論理式の全体は次のようにして帰納的に（つまり記号列の複雑さに関する帰納法により）導入することができる： まず無限個の変数（記号）を用意しておく，これを使って，(1) x, y が変数なら，表現 $x = y$, $x \in y$ は集合論の論理式である（以下では簡単のために “集合論の” は略す）；(2) φ, ψ が論理式なら，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は論理式である； (3) φ が論理式で x が変数なら $\exists x(\varphi)$, $\forall x(\varphi)$ は論理式である； (4) 集合論の論理式は (1), (2), (3) の繰返し適用により得られるもののみである．

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\exists x\ (\cdots)$, $\forall x\ (\cdots)$ は，それぞれ 「かつ」,「または」,「ならば」,「同値」,「でない」,「x が存在して $\cdots$」,「すべての x に対し $\cdots$」 と読み下され，そのような意味に解釈されるべきものである．

このような形式的な論理式を用いて集合論の公理はすべて上で導入したような論理式として書くことにし[*10]，たとえば分出公理は，各論理式 φ に対し，

$$\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists z \forall u \, (u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots x_n)))$$

を公理に加えることで導入できる[*11]．ここで “集合に関する性質” は “ZFC

[*10] たとえば，外延性公理と空集合公理は，それぞれ，$\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$, $\exists x \forall y \, (\neg y \in x)$ という論理式であらわすことができる．

[*11] ただし，この論理式や上の脚注での論理式では，可読性のためにいくつかの括弧を省略して

の（１階の論理での）論理式” で置き換えられているわけだが，後者による分出公理や置換公理の導入は外延の確定したものになっていることに注意する．

１階の論理では論理式による推論（あるいは証明）の概念も次のようにして規定することができる：まず，ここでは列挙はさけるが，たとえば $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ などいう推論規則を有限個あつめた “推論規則集” $\mathcal{R}$ を具体的に与えることができて，ZFC での論理式 φ の ZFC からの証明を，論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ で，φ_n は φ と等しく，各 φ_i, $i \leq n$ は，ZFC の公理の１つであるか，あるいは $j_0, \ldots j_{k-1} < i$ で，$\varphi_{j_0}, \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{k-1}} \vdash \varphi_i$ が推論規則の１つのパターンとマッチするものとなっているようなものがとれることと定義する．このような論理式の列を φ の ZFC からの証明とよぶ．φ の ZFC からの証明が存在するとき，φ は ZFC の定理である，といい，これを ZFC $\vdash \varphi$ とかく．推論規則が妥当に与えられているとすると，ZFC $\vdash \varphi$ なら，φ の ZFC からの形式的な証明は数学的な証明と解釈することができ，φ の表現している数学的事実は数学的定理であると考えてよい．ここで注意しておくと，上の論理式の定義では，“$\emptyset$”, “$\subseteq$”, “$\mathcal{P}(\cdot)$” などの記号は許されていないが，これらは，コンピュータ言語でのマクロのようなものとして扱うことができ，これらの記号を使った論理式は，必要なら “$\in$” と “$=$” のみを使った論理式に展開できる．

数学的なアイデアの豊かさを思いおこすと，このような形式的証明の体系はいかにも貧弱な印象を与えるかもしれないが，驚くべきことに，ゲーデルの完全性定理により，（１階の論理体系として知られている推論規則集 $\mathcal{R}$ に関して），すべての ZFC の論理式 φ であらわされる数学的命題の数学的証明が存在すれば，（その証明が正しいものであるかぎり）対応する φ の（形式的体系 $\mathcal{R}$ での） ZFC からの証明が存在する！ ZFC をこのような形式的体系として認識し研究する分野は特に公理的集合論とよばれる．これに対し，この節の前半で述べたような記述により形式的体系を意識せずに議論を行うことを素朴集合論 (naïve set theory) とよぶ[*12].

このように，全数学は公理的集合論の形式的体系の中に埋め込まれたものとして捉えられることがわかったわけであるが，ここで「だから何なのか？」という当然（？）の疑問に答えておく必要があるであろう．

書いてある．

[*12] 「素朴」という日本語の単語はポジティヴな意味を持つことが多いが naïve はネガティヴな意味も持つ形容詞である．

まず全数学を集合論の中に埋め込んで考えることにより，数学を大きな枠組の中で統一的な視点から扱うことができる，という利点があげられる，これは，現在ではほとんど常識となっている視点と言えるが，このような見方を最初に一般の数学コミュニティーに提示したのはブルバキの「数学原論」[1] であった．しかし，このためには，Skolem の意味で公理化された集合論をもってくる必要はなく，[1] でも素朴集合論的な視点を越える議論が行われているわけではない．実際，ブルバキ自身，以下に述べるような，集合論が形式化されたときにはじめてその考察が可能となるようなゲーデルの不完全性定理と関連する諸問題を無視し続けた，という指摘もある ([10],[11]).

ゲーデルの第一不完全性定理は，どのような数学的体系も，そこで数論の一部が展開できて，体系が無矛盾なら完全でない，つまりその体系からの演繹によって真偽の確定のできないような（その体系での）命題の存在することを主張するものである．数学も，さらに公理的集合論でさえもこの不完全性定理の呪縛から逃れることはできない．実際，ZFC の中で証明もできず，その否定も証明できないことの証明された数学的命題（つまり ZFC から独立な数学的命題）が近年になって多数見つかっている．このような言わゆる独立性証明 (indedendence proof) には，もちろん ZFC の公理系が確定していることが大前提であり，その証明には当然数理論理学の手法も不可欠である．

ここで，集合論の公理系 ZFC を全数学を内包する理論として認識すると，ZFC から独立な命題は，“数学的に証明できず，その否定もまた数学的に証明できないような命題” と考えてよいことがわかる．次の例を見てみよう： 積分論での Tonelli の定理により，2 変数実関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ が可測なら，等式 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ が成り立つ．この命題から f の可測性を除いた

(∗) すべての 2 変数実関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ に対し，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ が存在するなら，等式 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ が成り立つ．

という主張が正しいかどうか，というのは自然な疑問であろう．ところが，まさにこの主張 (∗) は，ZFC から独立な命題となっているのである：

Theorem 2.1 (1) (Sierpiński [14]) ZFC の公理系にマルティンの公理を加えた体系から (∗) の反例となるような関数の存在が示せる．特に ZFC の公理

系に連続体仮説を加えたものから $(*)$ の反例となる関数が構成できる．したがって，ZFC が矛盾を含まないなら[*13]，ZFC から $(*)$ を証明することはできない．

(2) (Laczkovich [9], Friedman [3], Freiling [4]) forcing による ZFC のモデル M で，$(*)$ の成り立つようなものが存在する．特に ZFC が矛盾を含まないなら ZFC から $(*)$ の否定を証明することはできない[*14]．

解析学的な命題の真偽が数学から独立である，という状況は解析学を研究している立場からはあまり気分の良いものではないかもしれないが[*15]，いずれにしても，上のような事情に関する識見は，公理的集合論に解析学を埋め込んで考える立場からはじめて得られるもので，従来の解析学にとどまっていたのでは決して得ることのできないものであろう．独立性の結果のうち，ZFC からの独立の示された命題が通常の数学的考察の枠内に十分におさまりそうなものは他にも多く知られているが，そのようなもののうち特に解析学とかかわるものについては，[2] にその多くのものについての解説がある．

集合論に初めて触れた人は「全数学が集合論の枠内で展開できる」という主張に懐疑の念をいだくかもしれないが，実際には，逆に，集合論の枠組は通常の数学の基礎としての必要に比べて強すぎる．ZFC から置換公理と基礎の公理を除いた体系でさえ，古典的な数学の議論で必要になる集合論の最小セッティングからはほど遠いことが分かっている．どのような数学的議論で集合論のどの程度の部分が必要になるのか，という問題は，逆数学と言われる研究分野で子細に研究されている（これについては，たとえば [15] を参照）．「大は小を兼る」ということで，十分に強い ZFC で考えていれば十分と思うかもしれないが，ゲーデルの第二不完全性定理により状況はもう少し複雑なものになっている．

第二不完全性定理は，どのような数学的体系も，そこで数論の一部が展開でき，体系が無矛盾なら，その体系の中で体系自身の無矛盾性の証明を得ること

---

*13 この仮定の必要性については以下の第二不完全性定理に関連の議論を参照.

*14 マルティンの公理や forcing についての一般的な解説はたとえば [5] を, より本格的な記述は [8], [6] を参照されたい.

*15 しかし，このような独立性の結果は集合論的深淵の所在を示す興味深い結果である，ととらえる捉え方も可能なのではないだろうか？ 多くの集合論研究者の美学的あるいは数学的立場も，そのようなものではないかと思う.

ができない，と解釈できる命題を主張するものである[16]．特にこの定理により，集合論は，そして，通常の全数学でさえ，その無矛盾性の保証を得ることが理論的に全くできない．一方１階の論理における自然数論の公理系（ペアノの公理 – PA ） のように，その無矛盾性がある意味で確立されているものがある．これは勿論，第二不完全性定理の意味での厳格な有限の立場からの無矛盾性の証明ではありえないが，しかし，無矛盾性の "度合" がきわめて強いことを示唆する結果と言える．たとえば逆数学で扱かわれるような，ペアノの公理からあまり離れておらず，その無矛盾性の度合の確立されているような公理系の中で，ある範囲の数学が展開できることが分れば，その範囲で実行可能な数学的議論に関しては，その整合性，無矛盾性に対する一定の保証が得られていると考えてよいことになるわけである．

逆に，ある種の数学的命題の中には，無矛盾性に関して集合論よりさらに強い理論を必要とするものもある．上でも触れた決定性の公理 (AD) は，ZFC から選択公理を除いたもの（これを ZF とあらわす）のもとで使うと，例えば「すべての実数の集合はルベーク可測である」という驚くべき，しかし非常に明快な定理を導いてくれる公理であるが，ZF + AD からは ZFC の無矛盾性が証明できてしまうので，第二不完全性定理により，AD + ZF は ZFC だけの中では解釈することができない理論になっている．実は 「すべての実数の集合はルベーク可測である」も ZF と組み合せると ZFC の無矛盾性を帰結する強い体系となってしまうが，その無矛盾性に関する強さ（つまり無矛盾性の少なさ）は ZF + AD よりはずっと弱いものになることが示せる．さらに，このような議論で用いられる「無矛盾性に関して集合論よりさらに強い理論」のうち現在まで知られているもののほとんどすべては，無矛盾性の度合に関して線型に順序づけられることが知られている（[7] を参照)．

以上で概説したような種類の集合論での知見は，数学の基礎についての考察を試みる際には，無視のできないものになっていると言うことはできるのではないだろうか．

[16] 先程の Theorem 2.1 での "ZFC が矛盾を含まないなら" という付帯条件はこのような事情のため取り除くことはできない．ただし，全数学の体系，ないし ZFC の無矛盾性については，数理論理学での諸結果（本文の以下の説明を参照）や，現在に至るまでに構築されてきた ZFC やその拡張における理論の総体と照し合わせてみるとき，何ら疑うべき徴候は見られないと言いきってよいと思う．

3 数学としての集合論

以上のような説明をすると，集合論とは数学の基礎の研究をするために，形式論理での論理式の変形をしているような分野である，というような誤解を受けそうである．集合論の研究者の多くは，むしろ，集合論を数理論理学に属す研究分野というよりは，他の言わゆる純粋数学に近い分野としてとらえているのではないかと思う．確かに記号論理学との関係が他の分野より明示的かつ直接的な分だけ*17，その研究においては，直観と形式の間の大きな振幅の往復運動を強いられることになるのではあるが，そのような研究の牽引力となっているのは，あくまでも他の数学分野におけるのと同質の “数学的直観” であると思う．

本講演では，純粋数学としての集合論，集合論の他の研究分野との交流（のさらなる可能性）というような視点についても触れたいと思っているが，紙数がつきたため予稿ではこれについては割愛せざるを得ない．

参考文献

[1] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, livre I ∼ X, Editions Dunod.

[2] Krzysztof Ciesielski, Set Theoretic Real Analysis, J. Appl. Anal. 3(2) (1997), 143–190.

[3] H. Friedman, A consistent Fubini-Tonelli theorem for non-measurable functions, Illinois J. Math. 24 (1980), 390–395.

[4] C. Freiling, Axioms of Symmetry: throwing darts at the real number line, J. Symbolic Logic 51 (1986), 190–200.

[5] 渕野 昌，Forcing Axioms と連続体問題，in prepartion (to appear in 数学).

[6] T. Jech, Set-theory, 3. millennium ed., revised and expanded, Springer, (2002).

*17 ここでは説明する余裕がなかったが，集合論では，集合論の体系を外側から制御するいわゆる meta mathematics としての論理と，集合論の内部で，meta mathematics を模して展開される論理の間の微妙な関係も積極的に扱う必要がでてくる．

[7] A. Kanamori, The Higer Infinite, Springer-Verlag, (1994/97); (日本語訳：「巨大基数の集合論」, 渕野 昌 訳，シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998).

[8] K. Kunen, Set Theory, North-Holland, (1980).

[9] M. Laczkovich, Fubini's theorem and Sierpiński's set, preprint, 1985.

[10] A.R.D. Mathias, The Ignorance of Bourbaki, Math. Intelligencer 14, no. 3, 4–13 (1992), (日本語訳：「ブルバキの無知」，田中 一之，山崎 武 訳，in: 田中 一之 編，数学の基礎をめぐる論争，シュプリンガー・フェアラーク東京，1999).

[11] A.R.D Mathias, Further remarks on Bourvaki, down-loadable.

[12] A.R.D. Mathias, What is Mac Lane missing?, in: H. Judah, W. Just, H. Woodin (eds.), Set Theory of the Continuum, Springer-Verlag, (1992).

[13] 斎藤 雅彦，数学の基礎　集合・数・位相，東京大学出版会 (2002).

[14] W. Sierpiński, Sur les rapports entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_0^1 f(x,y)dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, Fund. Math. **1**, 142–147, (1920).

[15] 田中 一之，逆数学と二階算術，河合文化教育研究所，(1997).