

- (1) **Remarks on the role of Dedekind in the advent of modern mathematics**
- (2) **Bemerkungen über die (lr)relevanz der „Axiomatischen Methodik“ nach dem Gödelschen Unvollständigkeissatz**

渚野 昌 (Sakaé Fuchino)

神戸大学大学院 システム情報学研究科

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(25. August 2010 (09:52 JST) version)

RIMS 研究集会 「数学史の研究」での講演

August 24, 2010.

This presentation is typeset by p<sup>L</sup>A<sub>T</sub>E<sub>X</sub> with beamer class.

- (1) **Remarks on the role of Dedekind in the advent of modern mathematics**
- (2) **Bemerkungen über die (lr)relevanz der „Axiomatischen Methodik“ nach dem Gödelschen Unvollständigkeissatz**

## **Kronecker, Dedekind, Hilbert on the Foundation of Arithmetic**

湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

神戸大学大学院 システム情報学研究科

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(25. August 2010 (09:52 JST) version)

RIMS 研究集会 「数学史の研究」での講演

August 24, 2010.

This presentation is typeset by p<sup>L</sup>A<sub>T</sub>E<sub>X</sub> with beamer class.

以下の書籍の **新訳**

to be included in 「ちくま学芸文庫 Math & Sciencee」:

- ▶ R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen  
(連続性と無理数, 1872 (明治 5 年))
- ▶                     : Was sind und was sollen die Zahlen  
(数とは何かそして何であるべきか, 1888 (明治 21 年))

日本数学会 2010 年度年会 (慶應義塾大学理工学部) 3 月 25 日の「数学基礎論と歴史」分科会講演の最後に発表された公理主義に関する「**とんでも**」講演の反駁の必要性:

○ 薮氏の仲間として無視 / 観賞していればよいと思っていたのだが, 後日, 高瀬正仁先生との談話の折, 「**あの人はあなたの分野の人でしょう?**」と真顔で聞かれてしまった.

- ▶ 数理論理学, あるいはもっと特化して数学基礎論での「**とんでも**」発言は他の分野の人々からは判別できない?, または,
  - ▶ 数学基礎論あるいはもっと広く数理論理学は, 他の分野からは「**とんでも**」科学のようなものとしか見られていない?
- ▶ **いずれにしても, これが, どう「とんでも講演」だったのかということについての子細な説明を公にする必要がある !!!**

- ▶ R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872 明治 5 年/1927 昭和 2 年 (5.Auflage))
- ▶ \_\_\_\_\_, *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888 明治 21 年/1930 昭和 5 年 (6.Auflage))
- ▶ L. Kronecker, *Über den Zahlbegriff*, Journal für reine und angewandte Mathematik 101, 337–355, (1887 明治 20 年).
- ▶ D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, 180–183 (1900 明治 33 年).
- ▶ \_\_\_\_\_, *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, Mathematische Annalen 104, 485–494 (1931 昭和 6 年).

## 参考文献

- ▶ 河野 伊三郎 (翻訳), デデキント: 数について – 連続性と数の本質 (1961 昭和 36 年)
- ▶ D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I, II*, Springer-Verlag (1931, 1939 昭和 6 年, 昭和 14 年/1968, 1970)
- ▶ 吉田 夏彦, 淵野 昌 (部分翻訳), ヒルベルト & ベルナイス: 数学の基礎 (シュプリンガー数学クラシックス) (1993/2007)
- ▶ A.R.D. Mathias, *The ignorance of bourbaki*, The Mathematical Intelligencer Vol.14 (3), 4–13 (1992)
- ▶ W. Sieg and D. Schlimm, *Dedekind's analysis of number: systems and axioms*, Synthese 147, 121–170 (2005 平成 17 年).
- ▶ E.Reck, *Dedekind's contributions to the foundations of mathematics*, <http://plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/>

# 数学者による「数学史の研究」の（私の / 可能な）スタンスについて

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (5/30)

- ▶ 歴史学の subset としての数学史
  - ▶ 科学史の subset としての数学史
  - ▶ （代数，幾何，等々と並置される）数学の一部としての数学史
- 
- ▷ 数学としての数学史
    - 数学は難しくついていけないが歴史なら分るだろう  
(cf. 純粋数学は難しくついていけないが応用数学ならなんとかなりそうだしやれば純粋数学より金ももうかりそうだ)
    - 数学の歴史を学ぶ / 研究することによって数学の真の深い理解が得られるだろう
    - 現代の書物 / 論文を読むのではなくそれを発明発見した人たちの原著を読むのが本質的な理解につながる (Einstein)

## 数学者による「数学史の研究」の（私の / 可能な）スタンスについて (2)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (6/30)

### ▷ 数学教育としての数学史

- 学生は数学は難しく理解できないが歴史なら分った気になってくれるだろう
- 歴史を教えることで、数学の理解のさまたげになっている心理的なバリアをはずすことができることもあるかもしれない
- 国粹主義

### ▷ 数学の（前線での）研究のための数学史

- 現在の自分の研究（研究分野，研究テーマ）の権威づけ
- 自分が研究していることが何かを凝視めなおすための数学史
- 未来の数学にむけての指針を得るための試みとしての数学史
- 「数学としての数学史」では前線での研究をしている人だけが見えている数学史の文脈があるだろう 特に、20世紀の後半に大きな動きのあった数理論理学や数学の基礎に関する歴史の研究では、前線で研究をしていない人には正しい全体像の把握は不可能ではないだろうか？

以下で Dedekind "Was sind und was sollen die Zahlen"のいくつかの細部を検討してみる。

- ▶ 河野訳では Dedekind の著作は「現代（当時の）に読み継がれるべき古典」というスタンスの扱いがされている。
- ▶ しかし、現代の視点から見ると（河野訳のなされた 1960 年代の視点から見たとしても）、19 世紀末の当時の時代背景をはるかに越えていると思われる画期的な点と、当時の数学的な認識の可能性の壁を越えられないでいる点が混在しているという印象を強く受ける。
- ▶ この点に対して、新訳（とその脚注 / 解説）でどう対応するかは検討中。
- ▶ 訳文はいずれも、現在進行中の新訳（の下書き）によるものである。



## ”Was sind ...”の前書きからの引用 (1)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (8/30)

… 幾何学に関する文献では，連続性については，話の序でにその言葉が出てはくるが，それについて明確に説明されることはなく，証明で用いられることもないのである．このことをさらに詳しく説明するために，次のような例をあげてみたい．一直線上にない3点  $A, B, C$  を，それらの距離  $AB, AC, BC$  の比が代数的数になるように，しかしそれ以外は全く任意に選び，空間の点  $M$  として  $AM, BM, CM$  の比がやはり代数的数になるようなものだけを見ることにする．これらの  $M$  からなる空間は，容易に分るように，いたるところで不連続である．しかし，この空間のこのような不連続性，不完全さにもかかわらず，私の理解する限りにおいて，ユークリッド原論に現れるすべての構成が完全に連続な空間と同じように遂行できる．つまりこの空間のこのような不連続性については，ユークリッドの幾何学は全く気がつかないし，認識することもできないわけである．

## ”Was sind ...”の前書きからの引用 (1) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (9/30)

- ▶ この前書きの部分はユークリッド幾何学の無矛盾性証明にむけての本質的なアイデアの1つを含んでいる。
- ▶ ユークリッド幾何の無矛盾性証明:
  - ▷ ヒルベルトによるユークリッド幾何の実数論への翻訳 (1899)
  - ▷ 実閉体の理論の完全性 (タルスキー, 1931) これから, ユークリッド幾何 (の first order logic で formulate できる部分) の無矛盾性が導かれる。ただし, 証明には model theoretic な議論が用いられている。
  - ▷ ヒルベルト=ベルナイス: 上の有限の立場からの証明 (1939)。
- ▶ 前ページに引用したデデキント幾何学に対する考察と類似のアイデアを用いると, 無限集合の存在公理が集合論の他の公理から導かれないことが (当時使うことができた数学的手法の範囲で) 容易に証明できる。しかし:

## ”Was sind ...”本文からの引用 (1)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (10/30)

66. 定理．無限なシステムが存在する．

証明．私の思惟の世界，つまり，私の思惟の対象になりうる物のすべて  $S$  は無限である．なぜなら， $s$  で  $S$  の要素を表すことにすると，「 $s$  は私の思惟の対象となりうる」という思惟  $s'$  も  $S$  の要素である．これを  $s$  の像  $\varphi(s)$  と見なすと，これによって定められた  $S$  の写像  $\varphi$  では，像  $S'$  は  $S$  の部分である，しかも  $S'$  は  $S$  の真の部分である，という性質を有する： $S$  には（たとえば，私の自我のような）これらの  $s'$  のどれとも等しくないような，したがって  $S'$  に属さないようなものが存在するからである．最後に， $a$  と  $b$  が  $S$  の異なる要素のときには， $a'$  と  $b'$  も異なることは明らかだから，写像  $\varphi$  は明確（相似）である (26). よって  $S$  は無限であるが，これが示したいことであった．

[訳注]:

- 「システム」は「集合」に相当するデデキントの用語である．
- 「物」とは，Urelement または集合のことである．
- 写像が「相似」とは one to one であることである．

## ”Was sind ...”本文からの引用 (1) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (11/30)

▶ デデキントの無限の存在証明は、「すべての集合からなる集合」に対応するシステムの存在を仮定したところで破綻している。よく知られているように、このような集合は存在しないことが（素朴）集合論で証明できる:

**定理** . すべての集合からなる集合は存在しない .

**証明** . そのような集合が存在したとして、これを  $V$  と呼ぶことにする . このとき、 $V' = \{x \in V : x \notin x\}$  も集合である . したがって、 $V' \in V'$  か  $V' \notin V'$  のいずれかが成り立つが、 $V' \in V'$  なら、 $V'$  の定義から  $V' \notin V'$  となり矛盾である . しかし  $V' \notin V'$  だったとしても  $V'$  の定義から、このときには  $V' \in V'$  となってしまうやはり矛盾である . □

## ”Was sind ...”本文からの引用 (1) へのコメント ( 続 )

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (12/30)

無限集合の存在公理が集合論の他の公理からは証明できないことは ( 多少の直観的推論を交えれば ) デデキントの使うことのできた ( 素朴 ) 集合論のテクニクのみを用いて示せる:

**定理 .** 無限集合の存在公理は , 集合論の他の公理から証明できない .

**証明 .**  $W = \{x : x \text{ は hereditarily finite}\}$  とする . 集合  $x$  が hereditarily finite とは  $x$  も  $x$  のどの要素も ,  $x$  のどの要素の要素も ... すべて有限であるか , Urelement であるかのどちらかであることである (ここでは  $W$  が集合になるかどうかは明らかでないが , それはここでは問題にはならない)

このとき ,  $W$  ( と  $W$  の要素に要素関係を制限したもののペア ) は集合論の無限公理以外の公理を全部満たすことが確かめられるが , これは無限集合の存在公理を満たさない .

もし , 無限集合の存在公理が他の公理から導かれるとすると ,  $W$  は無限公理も満たさなくてはならないがこれは矛盾である .

## ”Was sind ...”本文からの引用 (1) へのコメント (続々)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (13/30)

前ページの証明での, hereditarily finite の概念の扱いは, デテキントの集合論の範囲を越えているように見えるかもしれないが, ”Was sind ...”の自然数の全体の定義では, 次のような closure argument を用いる「単純無限」の定義が用いられている.

## ”Was sind ...”本文からの引用 (2)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (14/30)

71. 定義 . システム  $N$  が単純無限であるとは ,  $N$  からそれ自身への相似写像  $\varphi$  で ,  $N$  が  $\varphi(N)$  に含まれない 1 つの要素の連鎖として表わせるときのことを言う . このような要素を以下では 1 であらわすことにし ,  $N$  の基礎要素と呼ぶことにする . またこのとき , 単純無限システム  $N$  はこの写像  $\varphi$  で順序付けられる , とする . 像と連鎖に関する (§ 4) での記号をここでも用いることにすると , 単純無限システム  $N$  は ,  $N$  の写像  $\varphi$  と  $N$  の要素 1 で次の条件  $\alpha$  ,  $\beta$  ,  $\gamma$  ,  $\delta$  を満たすものの存在によって規定される :

$$\alpha. N' \ni N.$$

$$\beta. N = 1_0.$$

$\gamma$ . 要素 1 は  $N'$  に含まれない.

$\delta$ . 写像  $\varphi$  は相似である.

$\alpha$  ,  $\gamma$  ,  $\delta$  により ,  $N$  はその真の部分  $N'$  と相似になるから , すべての単純無限システム  $N$  は実際に無限システムとなる ( 64 を参照 ).

## ”Was sind ...”本文からの引用 (2) の内容の現代語訳とコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (15/30)

$N$  を集合として,  $\varphi$  を写像  $\varphi: N \rightarrow N$  とする.  $X \subseteq N$  に対し  $cl_\varphi(X)$  で  $X$  の  $\varphi$  による closure をあらわすことにする.

$cl_\varphi(X) = \bigcap \{ Y \subseteq N : X \subseteq Y, \varphi[Y] \subseteq Y \}$  である.

$(N, \varphi)$  が単純無限とは,  $N$  のある要素  $1$  に対し, 次が成り立つことである

( $\alpha$ .  $\varphi[N] \subseteq N$ .)

( $\beta$ .  $N = cl_\varphi(\{1\})$ .)

( $\gamma$ . 要素  $1$  は  $\varphi[N]$  に含まれない.)

( $\delta$ . 写像  $\varphi$  は 1-1 である.)

▶ デデキントのテキストでは,  $1$  と  $\{1\}$  (singleton  $1$ ) が混同されている. ただし, singletons については, 「システム」の定義の際, 注意を促している (Was sind ...”本文からの引用 (3b)).

▶ この定義の後, 単純無限な  $(N, \varphi)$  は互いに同型で自然数の全体の持つべき性質を有することが示され, 帰納法や再帰的構成がこの構造の上で実行できることも示される.



## ”Was sind ...”本文からの引用 (2) に関連するコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (16/30)

- ▶ デデキントの知っていた技術的な道具の全体は，彼が「無限集合は存在する」という主張が公理として採用されなくてはならないことを認識できたとしてもおかしくないことを示唆する．
- ▶ 彼がその認識に至ることのできなかつた大きな理由として，彼の「システム」(集合や Urelement)を集めたときにそれがふたたびシステムになるとは限らない，という認識がかけていたことがあげられるのではないかと想像される．
- ▶ 一方カントルは，この点に関してはずっと深い認識を持っていたように思える (cf. 1897 年のヒルベルトに宛た手紙 / 1899 年のデデキントに宛た手紙) ．
- ▶ 他方，カントルは，集合論の公理的な把握に対しては否定的だったので，『「無限集合は存在する」という主張を公理として採用』するべきかどうか，という設問は彼の問題意識の外だった可能性は小さくない．

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3a)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (17/30)

1. 以下では，物と言ったときには我々の思惟の対象になるすべてを指すことにする．物について議論しやすいように，記号，たとえばアルファベットでこれらの物をあらわすことにして，手みじかに，物  $a$ ，あるいは単に  $a$  などと言うことにする．ただし，ここで， $a$  で表わされる物と言ったときには，記号  $a$  自身のことを言っているわけではない．1つの物はそれについて言えることあるいは考えられることのすべてから一意に定まる．物  $a$  について考えられることがすべて  $b$  についても考えられ， $b$  について成り立つことがすべて  $a$  についても考えられるとき， $a$  は  $b$  と同じものとなり ( $b$  と等しくなり)  $b$  は  $a$  と同じものになる． $a$  と  $b$  が同一の物をあらわす記号あるいは名前するとき，これを  $a = b$  あるいは同じく  $b = a$  であらわす．さらに  $b = c$  のとき， $c$  は  $a$  と同様に  $b$  であらわされる物をあらわすのだから， $a = c$  でもある．上でのような  $a$  であらわされた物と  $b$  であらわされた物の同等性が成立しないとき，物  $a$  と  $b$  は等しくない， $a$  は  $b$  と異なる物である， $b$  は  $a$  と異なる物である，と言う．このときには，何等かの性質で，片方には成り立ちもう片方には成り立たないものが存在する．

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3a) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (18/30)

- ▶ 同等性が与えられたものではなく，定義されるべきものだ，という認識は，ここで初めて表明されたのではないかと思われる．
- ▶ 同等性の基本性質として，対称律と推移律が抽出されている．
- ▶ 物 (Ding (Urelement)) に対する（一種の）外延性が同等性の判定条件として述べられている．

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3b)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (19/30)

2. 異なる物  $a, b, c \dots$  が, ある共通の視点からとらえる何らかの必要から, 思考の中で1つにまとめられる, ということが頻繁に起るが, このとき, これらは1つのシステム  $S$  をなすといい, 物  $a, b, c \dots$  はシステム  $S$  の要素である, それらは  $S$  に含まれる, 逆に  $S$  はこれらの要素からなると言う. このようなシステム  $S$  (あるいは表象, 多様体, 総体) は我々の思惟の対象として再び物となる. したがって, システム  $S$  がシステム  $T$  と等しくなる, 記号で表すと  $S = T$  となるのは,  $S$  のどの要素も  $T$  の要素となり, どの  $T$  の要素も  $S$  の要素となるときである. 表現の一様性のために, システム  $S$  がただ1つの (ちょうど1つの) 要素  $a$  だけから成り立っている場合, つまり物  $a$  が  $S$  の要素だが,  $a$  と異なるどの物も  $S$  の要素とはなっていない場合も考えることにする. これに対し, 空なシステム, つまり, どの要素も含まないようなシステムは, 他の研究では, 考えることが便利であるかもしれないが, ここでは都合上考えないことにする.

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3b) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (20/30)

- ▶ システムの同等性が外延性によって説明されている .
- ▶ システムが再び物として扱えることの表明がなされているので ,  
ここでのシステムの理論上で累積的 (cumulative) な集合観による  
構成が可能になっている .
- ▶ ここでは explicit に書かれていないが , (3a) の物の同等性は ,  
ここでのシステムの同等性と抵触しない .
- ▶ singleton をシステムと考える考え方が explicit に表明されてい  
るが ,  $a$  と singleton  $a$  が異なるものであることについて明確な注意  
がない .
- ▶ 空集合を考えないことにする , というのは不自然に思える .

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3c)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (21/30)

21. 定義 . あるシステム  $S$  の写像  $\varphi$  とは ,  $S$  の各要素  $s$  に対して , 確定したある物を属させるような規則のことである . このような物は  $s$  の像とよばれ ,  $\varphi(s)$  であらわされる . このとき ,  $\varphi(s)$  は  $s$  に対応する ,  $\varphi(s)$  は写像  $\varphi$  により  $s$  から生じる , あるいは生成される ,  $s$  は写像  $\varphi$  により ,  $\varphi(s)$  に移される , などともいう .

## ”Was sind ...”本文からの引用 (3c) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (21/30)

▶ 写像は、ほぼ一般的な定義がなされている。これは後出のクロネッカーの立場と対比をなす。

▶ しかし、「規則 (Gesetz)」として写像が定義されていることは、ここでは問題である:

特に、ここでの議論では、前に引用した単純無限の定義のように写像に対して quantification を行なう必要が出てくるので「規則」の存在について議論しなくてはならなくなる。

▶ cf.: モダンな集合論では、写像は特別な性質を持った集合として定義されるので、写像の存在は、集合の存在の特別な場合にすぎなくなる。

## ”Was sind ...”の前書きからの引用 (2)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (22/30)

私を知りえた文献のうちでは，高い評価をすべき E. シュロウダー (E. Schröder) による算術と代数の教科書 (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1873) — この本には，文献表も含まれている — および (E. Zeller に捧げられた哲学的論文集 (Philosophische Aufsätze, Leipzig 1887) に収録された) クロネッカーとヘルムホルツによる，数の概念と数え上げと測定に関する論考を挙げておきたい．これらの論考が出版されたことが，色々な意味でこれらに似てはいるが，その論拠においては，これらと本質的に異なるところの私の見解を，公表することを促したのである．ただし，ここでの私の見解は，私が，他のどの立場からも影響を受けることなく，長年をかけて形成したものである．



## ”Was sind ...”前書きからの引用 (2) へのコメント

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (23/30)

- ▶ 「クロネカーとヘルムホルツによる，数の概念と数え上げと測定に関する論考」とあるもののうちクロネカーのものは，文献表で挙げたものと同一の論文である．
- ▶ クロネカーの数論のデデキントのそれと大きな違いは，次の2点に見ることができる：
  - ▷ デデキントの自然数（の全体）は単純無限システムの同値類として超越的な無限を介して導入されるが，クロネカーの（個々の）自然数は，具体的な数表記に対応するもの，あるいは数表記そのものにすぎない．クロネカーは自然数の全体を無限の対象として積極的にとらえることもしない．
  - ▷ デデキントの関数は，前ページの意味で定義に不透明さが残るものの quantify することが可能な対象として扱われている．これに対してクロネカーの議論での関数は具体的な関数の一般形としての略記にすぎない：

# クロネカーの ”Über den Zahlbegriff”からの引用

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (24/30)

「一般算術理論」あるいは、「未知数を持つ整数値関数の算術的理論」の結果は、未知数に整数値を代入したときの結果の要約を見ているにすぎない。その意味では、一般算術理論の結果も、通常の特異算術に属するものである。このように、奥の深い数学研究のすべての結果でも、最終的には、整数の性質の単純な形式で表現可能なはずである。

## ”Was sind ...”の前書きからの引用 (3)

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (25/30)

代数や高等な解析学の彼方にあるようなものも含め命題のすべては自然数に関する命題に対応している，という見解は，ディリクレから何度も聞いたものでもあったが，上のような見方からは，これは全く自明で何も目新しいところもない主張であることがわかる．しかし，この骨の折れる書きかえを実際に行ない，自然数のみを使うことにして他は全く認めない，という態度は何の役にたつものでもないように思われるし，ディリクレとも関係がない．逆に，数学や他の科学での最も大きな，そして最も実りの多い進歩は，むしろ，古い概念だけを用いたのでは表現が困難な組み合わせられた現象が何度も現れたところで，新しい概念を創造してそれを導入することが余儀なくなったことによってもたらされたものなのである．

## Hilbert: "Grundlegung ... (1931)"からの引用

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (26/30)

... それと同じころ，ということはいち世代以上前のことだが，クロネカーは多くの例をあげて，今日では，大筋では我々の有限の立場と対応するような見解を，高らかに表明した．当時の我々若い数学者たち，私講師や学生たちは，数学定理の超限的な道筋で行なわれた証明をクロネカーに習って有限的なもの<sup>(51)</sup>に書きかえる，というスポーツに耽ったものであった．しかしここでクロネカーの犯した過ちは，超限的な推論を許されないものであると宣言したことであった．彼は超限的な推論の禁止を宣告したが，特に，この禁止によれば，命題  $\mathfrak{A}(n)$  がすべての整数  $n$  に対して成り立たないときに，この命題が正しくなくなるような  $n$  の存在を推論してはいけないことになる． ...

たとえば，代数体の理論は，精妙に組み立てられた，天に向ってそびえ立つ建造物であり，解析学の先端の理論とともに，その他の人類の知性の成果を，その美においても完全性においてもはるかに凌駕するものであり，これらの理論では，排中律をはじめ，クロネカーの禁じたような超限的な推論がいたるところで用いられる． ...

クロネカーと何人かの数学者に変装した哲学者たちの御目にかなうように，まったく気紛れな，そして正確に記述することすらできないような理由のために，この禁止を受け入れてしまっているのだろうか？ もし，排中律の正しさに対しては多少の迷いが残るにしてもである．

- ▶ 「公理主義」とは，公理から出発して理論を構築することを強調する立場，と規定してよいだろう．
- ▶ しかし，こう規定したとしても「公理主義」は，その主張の意図から，いくつかの全く異なる意味を持ちうる：
  - ▷ 0 ドグマとしての公理主義
  - ▷ 1 教育的手法としての公理主義 (cf. ブルバキ)
  - ▷ 2 数学研究の手法としての公理主義 (cf. 初期のヒルベルト)
  - ▷ 3 厳密性のための公理主義
  - ▷ 4 「数学」の研究の枠組としての公理主義 (cf. 数学基礎論)
  - ▷ 5 数学的に自然な / 必然的な枠組 (cf. 公理的集合論)
- ▶ 従来の「公理主義」の議論では，このような意味付けの区別が必ずしも明確になされていないことが多いように思える．
- ▶ 特にブルバキは，▷ 4 や ▷ 5 を徹底的に無視したので / (参考文献表中の Mathias の論文を参照)，ブルバキの原論だけを頭に置いて「公理主義」を論ずるとアンバランスな議論が展開されてしまう危険が大である．

# ヒルベルトの数論の基礎と「公理主義」

Foundation of Arithmetic: Kronecker, Dedekind, Hilbert (28/30)

- ▶ ヒルベルトの「公理主義」は ▶ 3 と ▶ 4 に出発して、晩年は数学基礎論としての ▶ 5 の立場に重点を移行させたと言えるだろう。
- ▶ 文献表であげたヒルベルトの2つの論文は ▶ 3 と ▶ 4 の立場と ▶ 5 の立場をそれぞれ代表するようなものになっている。

## Hilbert: "Über den Zahlbegriff"(1900)からの引用:

... このような数の概念の導入の方法では、もっとも一般的な実数の概念がもっと簡単な数の概念の段階的な拡張によって得られるので、これを生成的方法と呼ぶことができるであろう。 ...

私の意見は次のものである: 生成的方法に、教育的、発見法的な高い価値を認めるとしても、我々の知見の最終的な記述と完全な論理的な内容の保証のためには、公理的な手法に利がある。

数の概念の理論での公理的な手法は次のように形成することができる:

以下は、2010年数学会年会の予稿集に載った文章からの抜粋である。公の場で発表された talk なので、名前をふせる必要はないと思うが、とんでも学者は、不用意に名前を出すと「自分の結果はここでも引用された」と言って自己宣伝の材料にしたりすることもあるので、その手に乗らないためにも、あえてこの文章の執筆者の名前は出さないことにする。

... また、自然数の概念の定義は数学にとって最も大切な問題の一つであるが、ヒルベルトの公理的方法によって自然数の定義を行おうとすると、公理系の無矛盾性の証明問題において、ゲーデルの不完全性定理のために、自然数の定義を矛盾なく行うことができないという限界に行き当たってしまう。

それ故、自然数の定義を合理的に行うようにするためには、これまでの公理的方法の見直しが必要であるとわかった。

そこで、私は新しい公理的方法を提出したい。

私の公理的方法においては、ある数学理論の中の基本的な数学概念を規定する条件としての命題を公理という。...

# Thank you for your attention!

My preprints and papers connected to this talk will be available at:

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/preprints.html>

This slide will be linked to:

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

