Is naive set theory so naïve?

Sakaé Fuchino (**渕野 昌**)
神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報科学専攻
http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(26. August 2011 (11:05 JST) version)

RIMS 研究集会「数学史の研究」での講演
於　京都大学 数理解析研究所
August 25, 2011

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

“naive set theory” の名称の由来

Paul Halmos,

Naive Set Theory

Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.

- **Naive set theory （素朴集合論？）という学術用語があるわけではない！**
- popular science の用語としての “naive set theory” がネット上で独り歩きをしている感がある.
- しかも，これらのネット上の記事は，歴史 かつ／あるいは 集合論の観点から見て，決定的に間違った指摘を含んでいることも多いように思える.

“naive set theory” の名称の由来

Paul Halmos,

Naive Set Theory

Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.

- **Naive set theory （素朴集合論？）という学術用語があるわけではない！**
- popular science の用語としての “naive set theory” がネット上で独り歩きをしている感がある.
- しかも，これらのネット上の記事は，歴史 かつ／あるいは 集合論の観点から見て，決定的に間違った指摘を含んでいることも多いように思える.

“naive set theory” の名称の由来

Paul Halmos,

Naive Set Theory

Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.

- **Naive set theory （素朴集合論？）という学術用語があるわけではない！**
- popular science の用語としての “naive set theory” がネット上で独り歩きをしている感がある．
- しかも，これらのネット上の記事は，歴史 かつ／あるいは 集合論の観点から見て，決定的に間違った指摘を含んでいることも多いように思える．

“naive set theory” の名称の由来

Paul Halmos,

Naive Set Theory

Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.

- **Naive set theory （素朴集合論？）という学術用語があるわけではない！**
- popular science の用語としての “naive set theory” がネット上で独り歩きをしている感がある．
- しかも，これらのネット上の記事は，歴史 かつ／あるいは集合論の観点から見て，決定的に間違った指摘を含んでいることも多いように思える．

“naive set theory” の名称の由来

Paul Halmos,

Naive Set Theory

Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.

- **Naive set theory （素朴集合論？）という学術用語があるわけではない！**
- popular science の用語としての “naive set theory” がネット上で独り歩きをしている感がある．
- しかも，これらのネット上の記事は，歴史 かつ／あるいは 集合論の観点から見て，決定的に間違った指摘を含んでいることも多いように思える．

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」とも言える

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」とも言える

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」ともいえる

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」とも言える

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」ともいえる

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」ともいえる

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

“naive set theory” の可能な解釈

(a) **naive set theory = 1908 年より前の集合論**

Zermelo の 1908 年の論文で集合論の公理系の議論がされる前の集合論

— 本質的には，これは「Cantor の集合論」とも言える

(b) **naive set theory = 1930 年頃より前の集合論**

1920 年代の終りに，公理系を 1 階の論理の上に構築することで Zermelo の 1908 年の論文での “definit” が厳密に定義された公理系が確立されるが，このことがなされる前の集合論 — つまり「公理的集合論」の確立以前の集合論

— Halmos の教科書の題の意味はおそらくこれである

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (1/2)

(a) 意味での naive set theory に関して,「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」という主張が流布している.

- この主張は,（文脈によっては必ずしも間違いではないかもしれないが） 以下の事実に対して **misleading** であり, 初学者に対しても間違った印象を与える恐れがある.
- 初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのない研究テーマも多いが, **これらの研究は矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく，現代の研究に継承されている.**
- 特に日本では, このような主張が, 日本の数学で伝統的に (logic での例外を除くと) 全く研究されていない超限帰納法を用いる数学に対する, 誤解 (さらには誤解からの差別) の助長の原因にもなりかねないように思える.

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (1/2)

(a) 意味での naive set theory に関して,「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」という主張が流布している.

- この主張は, (文脈によっては必ずしも間違いではないかもしれないが） 以下の事実に対して **misleading** であり, 初学者に対しても間違った印象を与える恐れがある.
  - 初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのない研究テーマも多いが, **これらの研究は矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく, 現代の研究に継承されている.**
  - 特に日本では, このような主張が, 日本の数学で伝統的に (logic での例外を除くと) 全く研究されていない超限帰納法を用いる数学に対する, 誤解 (さらには誤解からの差別) の助長の原因にもなりかねないように思える.

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (1/2)

(a) 意味での naive set theory に関して,「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」という主張が流布している.

- この主張は,（文脈によっては必ずしも間違いではないかもしれないが） 以下の事実に対して **misleading** であり，初学者に対しても間違った印象を与える恐れがある.
- 初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのない研究テーマも多いが，**これらの研究は矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく，現代の研究に継承されている.**
- 特に日本では，このような主張が，日本の数学で伝統的に (logic での例外を除くと) 全く研究されていない超限帰納法を用いる数学に対する，誤解 (さらには誤解からの差別) の助長の原因にもなりかねないように思える.

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (1/2)

(a) 意味での naive set theory に関して,「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」という主張が流布している.

- この主張は,（文脈によっては必ずしも間違いではないかもしれないが） 以下の事実に対して **misleading** であり, 初学者に対しても間違った印象を与える恐れがある.
- 初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのない研究テーマも多いが, **これらの研究は矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく, 現代の研究に継承されている.**
- 特に日本では, このような主張が, 日本の数学で伝統的に (logic での例外を除くと) 全く研究されていない超限帰納法を用いる数学に対する, 誤解 (さらには誤解からの差別) の助長の原因にもなりかねないように思える.

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (1/2)

(a) 意味での naive set theory に関して,「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」という主張が流布している.

- この主張は,（文脈によっては必ずしも間違いではないかもしれないが） 以下の事実に対して **misleading** であり, 初学者に対しても間違った印象を与える恐れがある.
  - 初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのない研究テーマも多いが, **これらの研究は矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく, 現代の研究に継承されている.**
  - 特に日本では, このような主張が, 日本の数学で伝統的に (logic での例外を除くと) 全く研究されていない超限帰納法を用いる数学に対する, 誤解 (さらには誤解からの差別) の助長の原因にもなりかねないように思える.

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (2/2)

- 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない**: 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて「… のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は，「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (2/2)

- 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない:** 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて 「… のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は，「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(a) naive set theory = 1908年より前の集合論 (2/2)

- 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない:** 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて 「… のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は，「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (2/2)

- 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない:** 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて 「··· のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は,「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (2/2)

- ▷ 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない:** 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- ▷ 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて 「··· のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- ▷ カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- ▶ **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は，「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(a) naive set theory = 1908 年より前の集合論 (2/2)

- 「カントルが彼の集合論が矛盾することを知って困惑／絶望した」というような記述も見られるが，**これは事実ではない:** 晩年のカントルは連続体仮説については，ある種の混乱が認識できるが，集合論の整合性については (パラドックスについては正しく認識していたが) 全く問題を感じていなかったように見える．
- 1899 年の Hilbert への手紙でカントルは，これらのパラドックスに触れて 「… のような生成方法のみで本来の集合を考えていればパラドックスは現れない」と言っているが，これは Zermelo の公理系の議論の正確な先見となっている．
- カントルはパラドックスはパラドクシカルな集合が consistent (fertig) な集合でないことの証明にすぎないと考えていた．(consistent でない集合を proper class と読み替えると現代の集合論の見方と一致する)
- **このような意味で，カントルの集合論としての naive set theory は，「矛盾している」というような naïve なものではなかった．**

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (1/4)

(b) の立場で問題となる naivety は，Zermelo の 1908 年の論文での „definit“ (確定的) の概念であろう．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

(渕野 昌訳『数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，近刊に収録予定の翻訳の一部: ただし記号は現代のもので置き換えてある)

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (1/4)

(b) の立場で問題となる naivety は，Zermelo の 1908 年の論文での „definit“ (確定的) の概念であろう．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

(渕野 昌訳 『数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，近刊に収録予定の翻訳の一部: ただし記号は現代のもので置き換えてある)

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

(b) naive set theory = 1930年頃より前の集合論 (1/4)

(b) の立場で問題となる naivety は，Zermelo の 1908 年の論文での „definit“ (確定的) の概念であろう．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

(渕野 昌訳『数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，近刊に収録予定の翻訳の一部: ただし記号は現代のもので置き換えてある)

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

(b) naive set theory = 1930年頃より前の集合論 (1/4)

(b) の立場で問題となる naivety は，Zermelo の 1908 年の論文での „definit“ (確定的) の概念であろう．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

(渕野 昌訳 『数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，近刊に収録予定の翻訳の一部: ただし記号は現代のもので置き換えてある)

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (1/4)

(b) の立場で問題となる naivety は，Zermelo の 1908 年の論文での „definit“ (確定的) の概念であろう．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

(渕野 昌訳 『数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，近刊に収録予定の翻訳の一部: ただし記号は現代のもので置き換えてある)

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (2/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

公理 III. クラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ がある集合 M の要素のすべてに対して確定的なら，M の部分集合 $M_{\mathfrak{E}}$ で，$\mathfrak{E}(x)$ が真になるような M の要素のすべて，しかもそれらのみを要素として含むようなものが存在する．

(分出公理)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

公理 III. クラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ がある集合 M の要素のすべてに対して確定的なら，M の部分集合 $M_{\mathfrak{E}}$ で，$\mathfrak{E}(x)$ が真になるような M の要素のすべて，しかもそれらのみを要素として含むようなものが存在する．

(分出公理)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

4. 領域の基本関係が，公理と論理規則により，その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い，あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は,「確定的」であるという．同様に，変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も，$\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し，それが確定的であるとき,「確定的」であるという．たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし，$M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである．

公理 III. クラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ がある集合 M の要素のすべてに対して確定的なら，M の部分集合 $M_{\mathfrak{E}}$ で，$\mathfrak{E}(x)$ が真になるような M の要素のすべて，しかもそれらのみを要素として含むようなものが存在する．

(分出公理)

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (3/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

▶ „definit“（確定的）な性質による分出公理の応用の例:

9. 同様に 2 つ以上の集合 M, N, R, ... に対し,「平均」$D = [M, N, R, ...]$ をとることができる．なぜなら T を要素も集合であるような集合とすると，III により，すべての事物 a に対し，ある部分集合 $T_a \subseteq T$ で，T の要素で a を要素として含むもの全体となっているものを対応させることができる．したがって，すべての a に対して $T_a = T$ かどうか，つまり，a がすべての T の要素の共通の要素になっているかどうかは確定的である．A を T の任意の要素とするとき，A の要素 a で $T_a = T$ となるようなもの全体は，このような共通の要素の全体となるようないるようなもの全体となっている A の部分集合 D となる．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (3/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **„definit“（確定的）な性質による分出公理の応用の例:**

9. 同様に 2 つ以上の集合 $M, N, R, \ldots$ に対し，「平均」$D = [M, N, R, \ldots]$ をとることができる．なぜなら T を要素も集合であるような集合とすると，III により，すべての事物 a に対し，ある部分集合 $T_a \subseteq T$ で，T の要素で a を要素として含むもの全体となっているものを対応させることができる．したがって，すべての a に対して $T_a = T$ かどうか，つまり，a がすべての T の要素の共通の要素になっているかどうかは確定的である．A を T の任意の要素とするとき，A の要素 a で $T_a = T$ となるようなもの全体は，このような共通の要素の全体となるようないるようなもの全体となっている A の部分集合 D となる．

(b) naive set theory = 1930年頃より前の集合論 (3/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **„definit“（確定的）な性質による分出公理の応用の例:**

9. 同様に 2 つ以上の集合 M, N, R, ... に対し,「平均」$D = [M, N, R, ...]$ をとることができる. なぜなら T を要素も集合であるような集合とすると, III により, すべての事物 a に対し, ある部分集合 $T_a \subseteq T$ で, T の要素で a を要素として含むもの全体となっているものを対応させることができる. したがって, すべての a に対して $T_a = T$ かどうか, つまり, a がすべての T の要素の共通の要素になっているかどうかは確定的である. A を T の任意の要素とするとき, A の要素 a で $T_a = T$ となるようなもの全体は, このような共通の要素の全体となるようないるようなもの全体となっている A の部分集合 D となる.

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (4/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」：**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，(分出公理により) $T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる．
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる．
- この集合が $\bigcap T$ である．

確定的な性質の分割が，(現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (4/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」:**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，（分出公理により）$T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる．
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる．
- この集合が $\bigcap T$ である．

確定的な性質の分割が，（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している．

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (4/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」:**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，（分出公理により）$T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる．
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる．
- この集合が $\bigcap T$ である．

確定的な性質の分割が，（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」：**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し,（分出公理により）$T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる.
- $A \in T$ を 1 つ固定すると, 分出公理から, $\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる.
- この集合が $\bigcap T$ である.

確定的な性質の分割が,（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している.

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (4/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」:**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，(分出公理により) $T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる．
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる．
- この集合が $\bigcap T$ である．

確定的な性質の分割が，（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している．

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」：**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，(分出公理により) $T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる.
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる.
- この集合が $\bigcap T$ である.

確定的な性質の分割が,（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している.

(b) naive set theory = 1930 年頃より前の集合論 (4/4)

E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65, (1908), 261-281.

- **前出の訳文の「現代語訳」：**

$T = \{M, N, R, \cdots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が（集合として）存在する:

- 各事物 a に対し，(分出公理により) $T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる．
- $A \in T$ を 1 つ固定すると，分出公理から，
$\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T\,(a \in B)\}$ がとれる．
- この集合が $\bigcap T$ である．

確定的な性質の分割が,（現代語訳したときに）分出公理で用いられる論理式の部分論理式への分割と正確に対応している．

なぜ公理的集合論なのか？

- **公理的集合論以前の naive な集合論でも，通常の数学を展開する上では十分な精度が得られる．そのことは，Zermelo の 1908 年の論文でも窺える．**

ではなぜ公理的集合論なのか？

相対的無矛盾性，や相対的独立性の証明を厳密に行なうのために，集合論の公理系が first order logic の上にきちんと定式化される必要がある．

集合論の公理系が frist order logic 上定式化されるのは 1920 年代の終りから 1930 年代初頭にかけて (Zermelo, Bernays etc.) だが，上のような公理的集合論の意味が本当に理解されるようになるには， Gödel の 1930 年代末の仕事や，Cohen の 1960 年代の仕事を待たなくてはならない．

なぜ公理的集合論なのか？

- **公理的集合論以前の naive な集合論でも，通常の数学を展開する上では十分な精度が得られる．そのことは，Zermelo の 1908 年の論文でも窺える．**

ではなぜ公理的集合論なのか？

相対的無矛盾性，や相対的独立性の証明を厳密に行なうのために，集合論の公理系が first order logic の上にきちんと定式化される必要がある．

集合論の公理系が frist order logic 上定式化されるのは 1920 年代の終りから 1930 年代初頭にかけて (Zermelo, Bernays etc.) だが，上のような公理的集合論の意味が本当に理解されるようになるには， Gödel の 1930 年代末の仕事や， Cohen の 1960 年代の仕事を待たなくてはならない．

なぜ公理的集合論なのか？

- **公理的集合論以前の naive な集合論でも，通常の数学を展開する上では十分な精度が得られる．そのことは，Zermelo の 1908 年の論文でも窺える．**

ではなぜ公理的集合論なのか？

相対的無矛盾性，や相対的独立性の証明を厳密に行なうのために，集合論の公理系が first order logic の上にきちんと定式化される必要がある．

集合論の公理系が frist order logic 上定式化されるのは 1920 年代の終りから 1930 年代初頭にかけて (Zermelo, Bernays etc.) だが，上のような公理的集合論の意味が本当に理解されるようになるには， Gödel の 1930 年代末の仕事や，Cohen の 1960 年代の仕事を待たなくてはならない．

なぜ公理的集合論なのか？

- **公理的集合論以前の naive な集合論でも，通常の数学を展開する上では十分な精度が得られる．そのことは，Zermelo の 1908 年の論文でも窺える．**

ではなぜ公理的集合論なのか？

相対的無矛盾性，や相対的独立性の証明を厳密に行なうのために，集合論の公理系が first order logic の上にきちんと定式化される必要がある．

集合論の公理系が frist order logic 上定式化されるのは 1920 年代の終りから 1930 年代初頭にかけて (Zermelo, Bernays etc.) だが，上のような公理的集合論の意味が本当に理解されるようになるには， Gödel の 1930 年代末の仕事や，Cohen の 1960 年代の仕事を待たなくてはならない．

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾えある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という.
- 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である.
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること.
- K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である.
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである.
- **ごく "日常的" な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる.**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾えある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という．
- 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である．
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること．
- K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である．
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである．
- **ごく “日常的” な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる．**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾である」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という．
  - 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である．
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること．
  - K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である．
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである．
  - **ごく "日常的" な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる．**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾えある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という．
  - 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である．
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること．
  - K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である．
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである．
  - **ごく "日常的" な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる．**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾えある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という．
- 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である．
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること．
- K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である．
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの１つである．
- **ごく "日常的" な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる．**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾さえある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という.
  - 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である.
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること.
  - K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である.
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである.
  - **ごく "日常的" な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありえる.**

相対的無矛盾性

- 「理論 T が無矛盾とすると，T にある公理 φ を加えて得られる体系も無矛盾ええある」という形の主張を φ の T 上の **相対的無矛盾性** という．
- 不完全性定理により，T がそこで初等数論の fragment が展開できる (つまり記述できて体系からある程度の範囲の命題が証明できる) 程度の記述力を持つ理論のときには，絶対的な無矛盾性の証明は不可能である．
- φ が T 上 **相対的独立** (あるいは単に **独立**) とは，φ も $\neg\varphi$ も T 上相対的無矛盾となること．
- K. Gödel (1938) と P. Cohen (1963) の結果により連続体仮説は集合論の公理系上独立である．
- 相対的無矛盾性，相対的独立性の証明は現代の公理的集合論でも中心テーマの 1 つである．
- **ごく“日常的”な数学命題の集合論の公理系上の独立性が証明されることもありうる．**

“日常的” な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす．
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている．
- $Auto(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす．
  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが，

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 (+ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾．

(S. Fuchino, 1992) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる．「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 + 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である．

“日常的” な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす.
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている.
- $Auto(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす.
  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが,

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 (+ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾.

(S. Fuchino, 1992) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる.「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 + 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である.

“日常的” な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす.
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている.
- $Auto(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす.
  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが，

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 (+ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾.

(S. Fuchino, 1992) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる.「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 + 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である.

“日常的” な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす.
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている.
- $\mathit{Auto}(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす.

  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$\mathit{Auto}(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが，

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?) 「$\mathit{Auto}(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 (+ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾.

(S. Fuchino, 1992) 「$\mathit{Auto}(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる.「$\mathit{Auto}(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 + 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である.

“日常的” な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす．
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている．
- $Auto(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす．
  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが，

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 ($+$ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾．

(S. Fuchino, 1992) 「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる．「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 $+$ 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である．

“日常的”な数学命題の独立性の例

- 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を離散位相による位相空間と見て，$\beta\mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ の Stone-Cech コンパクト化を表わす．
- $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ と見られるが，$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は連続体の構造と密接に関連する位相空間で，一般位相空間論ではよく研究されている．
- $Auto(\mathbb{N}^*)$ で $\mathbb{N}^*$ 上の 自己同相写像の全体の作る群をあらわす．
  $\mathbb{N}^*$ は homogeneous な構造を持っていると考えられるので，$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群になることが期待される．ところが，

定理． (S. Shelah, 1991, van Douwen 199?)「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群でない」は集合論の公理系 ($+$ large cardinal axiom) 上相対的無矛盾．

(S. Fuchino, 1992)「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は連続体仮説から証明できる．「$Auto(\mathbb{N}^*)$ は単純群」は集合論の公理系 $+$ 連続体仮説の否定上相対的無矛盾である．

Ich danke Ihnen für die Aufmerksamkeit.

Saharon Shelah (1945 –)
pcf theory を含む彼の集合論の研究は，Cantor の集合論の精神の継承発展とみなすことができる．