数理論理学

— その研究の前線と計算機科学との関係

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

神戸大学大学院 システム情報学研究科
情報科学専攻
情報数理 (Group of Logic, Statistics & Informatics)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(June 1, 2011 (00:58 JST) version)

a lecture in the omnibus lecture series
情報知能工学総論及び安全工学
June 1, 2011

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

数理論理学とは:

- 数理論理学 (mathematical logic)

  形式的論理学 (あるいは記号論理学) を積極的に応用する数学の分野.

  後で説明する 数学基礎論, （一般）論理学, 証明論, モデル理論, 集合論 などが数理論理学の研究分野.

- 形式的論理学 (formal logic)
  記号論理学 (symbolic logic)

  (論理的な) 命題を記号列で表わし（論理式）, 命題から別の命題の演繹や, 数学的な証明を記号列の機械的な操作（演繹規則）として定式化する.

  そのような体系の考察を通して「論理」を研究する.

数理論理学の研究分野

- 数理論理学には，以下のような研究分野がある:
  - 数学基礎論 (foundation of mathematics)
    数学の基礎付けについて研究する
  - （一般）論理学 (general logic)
    論理体系のバリエーションの研究や不完全性定理（後出）に関連する研究など
  - 証明論 (proof theory)
    （形式化された）数学的な証明に関する研究
  - 計算論（帰納的関数論）(theory of computability)
    “計算可能” な関数の理論
  - モデル理論 (model theory)
    代数的構造を論理式による定義可能性を用いて研究する
  - 集合論 (set theory)
    数学的な無限の研究

数理論理学の研究分野

- ▷ 数学基礎論
  - ▷ （一般）論理学　(菊池)
  - ▷ 証明論
  - ▷ 計算論（帰納的関数論）
  - ▷ モデル理論　(桔梗)
  - ▷ 集合論　(酒井，Brendle, 渕野)
- ▶ 隣接分野には:
  - ▷ 数理論理学の理論計算機科学への応用　(田村，番原)
  - ▷ 哲学的な論理学

▷: 私のグループと田村直之先生のグループで，(active に) 研究されている分野.

形式論理 (formal logic)

- 数理論理学の諸分野はいずれも 形式論理を応用する，という点が他の数学の研究分野と大きく異なる.
- 以下で，形式論理で基本となる （１階の）述語論理 に関連したことの説明をする.
- １階の述語論理とそれに関連する基礎的な事柄については，私の
  - 「数理論理学」 学部２年の講義
  - 「数理論理学特論」 大学院の講義

  で勉強できる.

述語論理の導入のモティヴェーション

- 述語論理の導入の大きなモティヴェーションズの一つ:
  - 数学を形式的に（記号の操作の体系として）展開できるような枠組が何かを調べる (論理的体系 (logical system))

この方向での研究の先駆者としては

- ギリシャ古典論理学
- Gottfried Wilhelm von Leibniz
  (1646(寛永 23 年) - 1716(享保 1 年)) (Leibniz の "夢")
- Ernst Schröder (1841(天保 12 年) - 1902(明治 35 年))
- Friedrich Ludwig Gottlob Frege
  (1848(嘉永 1 年) - 1925(大正 14 年))

などがあげられる.

- 20 世紀の前半に,（1 階の）述語論理で公理的に展開される集合論の中で，すべての数学的理論が遂行できることが明かになっている.

述語論理の論理式の例

- 述語論理の 論理式 （文章に相当する記号列）は，基本的な関係をあらわす表現（原子論理式）から出発して，それらを
  - $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\neg$ (not), $\rightarrow$ (then), $\leftrightarrow$ (if and only if),
  - $\forall x$ (for all x), $\exists x$ (there exists x)

  などの論理記号や量化子記号で（きめられた文法にそって）つなぎあわせることで得られる．

- 次の論理式は，関数記号 f を実数の全体 $\mathbb{R}$ から実数の全体 $\mathbb{R}$ への関数をあらわすものと解釈して，変数記号の動く領域は実数の全体と解釈したとき，「f は連続関数である」という主張と解釈できるものになっている:

$$\forall x \forall y \forall z (y > 0 \rightarrow (z > 0 \wedge \forall u (|x - u| < z \rightarrow |f(x) - f(u)| < y)))$$

述語論理の推論

- 述語論理での証明は，有限個のパターンの公理（論理的に常に正しい形の論理式の集まり）と，有限個のパターンの推論を導入して，公理から出発して推論を有限回重ねるようなものとして定義される
- 公理の一つ:
  φ を任意の論理式とするときの，$(\varphi \to \varphi)$
- 推論規則の一つ: φ, ψ を任意の論理式とするとき，

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

（線の上の論理式から線の下の論理式を導く — 三段論法）

述語論理の理論の発展

- 述語論理について少なくとも以下の点を明らかにする必要がある:
  - 述語論理の体系が矛盾を含まないことを調べる.

O.K. Gerhard Genzen (1909(明治 42 年) – 1945(昭和 20 年))
カット除去定理 (Cut-elimination Theorem, 1934 (昭和 9 年))

  - そのような体系での形式的証明に，すべての数学的な証明が翻訳できるか？

Yes. Kurt Gödel (1906(明治 39 年) – 1978(昭和 53 年))
完全性定理 (Completeness Theorem, 1929 (昭和 4 年))

  - すべての数学理論がそのような体系上で本当に展開できるか？

Yes: 述語論理上の集合論ですべての数学が展開できる.

述語論理の理論の発展 (2)

▷ 述語論理上で展開された数学が矛盾を含まないことを調べる．

David Hilbert (1862- 1943, 文久 2 年 – 昭和 18 年)
("Hilbert のプログラム")

▷ ヒルベルトのプログラムは（厳密な意味では），(完全には) 実行不可能である:

Kurt Gödel (1906 - 1978)
不完全性定理 (Incompleteness Theorems, I931)

▷ ヒルベルトのプログラムの部分的な実現:

▶ たとえば，初等幾何や古典的な解析学は，前出の Genzen や，David Hilbert, Paul Bernays, Wilhelm Ackerman, Alfred Tarski らの研究結果から矛盾を含まないことの保証ができる集合論の部分体系に含まれることが示せる．この意味では，19 世紀くらいまでに発展した数学については（工学部で普通に使う数学は大体これでカバーできる）矛盾を含まないことの厳密な証明が得られていると言える．

集合論

- 集合論 は数学的な無限を研究する研究分野である．
- 数学では，自然数の全体 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ や実数（数直線の上の点に対応する数）の全体 $\mathbb{R}$ など，無限に要素を持つ “集合” を考える必要がある．このような無限を，集合論では数学的な研究対象する．
- 集合論の特徴的な手法として，数学的帰納法を無限の「数」にも一般化した 超限帰納法 を縦横に用いる，ということがあげられる．
- 無限についての研究を厳密に行なうためには記号論理学の使用が不可欠だが，記号論理学やモデル論的な手法も，集合論の研究での強力なツールである．

集合論の始まり

- 1873 年（明治 6 年）12 月 7 日に G. カントル (Georg Cantor, 1845 – 1918（弘化 2 年 – 大正 7 年）は実数の全体 $\mathbb{R}$ を自然数を使って数え上げることができないことを証明した.

定理 1 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない.

- このことは，実数の全体 $\mathbb{R}$ は自然数 $\mathbb{N}$ より本質的に “大きな” 無限になっている，と解釈できる.
- これを (1873 年 12 月 7 日) を集合論の始まりの瞬間と解釈する数学史の研究者も少なくない.

集合論の始まり (2)

定理 1 (カントル，1873年（明治6年）12月7日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない.

証明.　背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば,

$$
\begin{array}{rl}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.00117822429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

集合論の始まり (3)

$$
\begin{array}{rl}
r_0: & 2.416107382550335 6\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.946268656716417 8\cdots \\
r_3: & 0.0011782242 9 \\
r_4: & -1.549000 1 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

集合論の始まり (3)

$$
\begin{array}{rl}
r_0: & 2.\color{red}{4}161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4\color{red}{3}2835820895225\cdots \\
r_2: & 1.94\color{red}{6}268656716 4178\cdots \\
r_3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
r_4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば：　$0.54721\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である．　□ **(定理 1)**

最後に

- このスライドの印刷用 pdf ファイルは,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/misc/math-logic-pf.pdf

としてダウンロードできます.

- 「数理論理学」「数理論理学特論」のレクチャーノート（まだ最終版ではありません）は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

としてダウンロードできます.