ミステリー・トレイン[*1]

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)[*2]

1　銀河鉄道の夜

2010 年の夏にメキシコのコリマという街で開かれた “International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications V” という国際学会に参加しました．次の問題（パズル）は，やはりこの学会に参加していた，プラハ大学の Petr Simon 先生の学生で，現在は visiting student （客員学生?）としてヴィーン大学のゲーデル研究センターにいる Jonathan Verner 君から，大勢の参加者と一緒に郊外のレストランで昼食を食べた時に教わったものです．

> **問題 1** ω_1 個の駅のある路線の 0 番目の駅を（お客さんの乗っていない）列車が出発した．1 番目，2 番目，⋯ の各駅に停車したとき列車に客が一人でも乗っているときにはそのうちの一人が降車し，ω 人の（つまり可算人の）新しい客が列車に乗りこむとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

Verner 君は，ヴィーンからプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から，この問題を聞き，Chodounský 君は，ブダペスト工科経済大学の Barnabás Farkas 君からこの問題を聞いたということです[*3]．

この問題は，そこで出てくる ω_1 と ω の意味を知っていて — これについては次の節で説明します — 答が何かを教えてもらえれば，それに証明をつけることはそれほど難しくないはずなのですが，同じテーブルで食事をしていた集合論の研究者は僕を含めて全員すぐに正しい答を出すことができませんでした．

ω や ω_1 に関する直観がある程度働くと，すぐに思いつくことの一つは,「この問題の答は各駅で列車を降りる人の選び方によって違ってくるのではないか」，という疑問ではないかと思うのですが，しかし，いったんそう思い込んでしまうと，

[*1]「ミステリー・トレイン」はエルビス・プレスリーの持ち歌の一つだった曲の題名で，Jim Jarmusch 監督の，エルビスにちなむ同名の映画があります．神戸大学での筆者の同僚の菊池誠氏と酒井拓史氏から，このテキストの草稿に対する有益なコメントと誤殖の指摘をいただきました．感謝の意を表します．
2011 年 08 月 10 日 (22:45 JST) 版（本稿は数学セミナー 2011 年 7 月号に掲載された文章 (数学セミナー Vol.50 no.7 598 (2011), 33–39) に若干筆を加えたものです.）.

[*2] 神戸大学大学院システム情報学研究科 fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

[*3] 後日，Farkas 君の指導教官の Lajos Soukup 教授（ハンガリー科学アカデミー）が神戸に遊びに (つまり数学の研究をしに) 来ました．そのときこの問題を知っているかどうか尋ねてみると,「それは ⋯ だろう」という答と，後で応用問題として述べるジョークが即座に返ってきました．

その考えに囚われて，うまく正しい答にたどりつけなくなってしまう，というのが，どうもこの問題の「ひっかけ」のようです．

上で出てきた ω_1 や ω は（超限）順序数とよばれるものの例となっています．超限順序数と，超限順序数上の帰納法（超限帰納法）や，それによって得られる再帰的定義の手法は集合論やその応用で縦横に駆使されることになるものですが，逆にこの手法を用いることのほとんどない数学の分野も少なくないので,「名前はどこかで聞いたことがあるような気がするけれど …」 というような感想を持つプロの数学者だって沢山いるかもしれません．本稿では，上の問題の答の証明などを例にとって，超限順序数や超限帰納法を用いる数学への入門（の入門）のような話をしてみようと思います．

筆者は，2010 年 11 月に「数学基礎論若手の会」で，本稿と同じ Mystery Train という題で，やはりここで述べた問題を枕にした講演をしましたが，この講演は無限基数や超限順序数などについての基礎知識を仮定した tutorial でした — [4] は，このときの講演をもとに書いた，より本格的なテキストです．本稿は，この講演で話したことや， [4] での，この講演の話題に関連する，もっと上級者向けの議論への導入のようなものにもなっています．

2　超限帰納法と順序数

[2] のカバーのデザインの一部

（数学的）帰納法[*4] は色々な記述のしかたが可能ですが，一番一般的な形の一つは次のものでしょう．

$\Phi(x)$ を自然数 x に関する命題とする．ただし，ここでは，自然数は 0 から始まるものとします（つまり $x = 0, 1, 2, \ldots$ です）．たとえば，“x は 0 であるか，または，ある自然数 y の次の数（つまり $x = y + 1$）であるかのいずれかである” という命題が，$\Phi(x)$ の一つの例です（もちろん，もっと複雑で，各 x に対して正しいかどうかがすぐにはわからないような命題でもいいわけですが).

[*4] わざわざ「数学的」とことわりをつけているのは，哲学で，類推から一般論を導くことを指す「帰納」という概念があり，これとの混同をさけるためですが，ここでは数学的な帰納法しか扱わないので，以降は単に帰納法と言うことにします．

帰納法は，上のような任意の $\Phi(x)$ に対し，以下が成り立つという主張である:

(*) 任意の自然数 x に対し，

(2.1) “すべての $y < x$ に対し，$\Phi(y)$ が成り立つなら $\Phi(x)$ が成り立つ” が成り立つなら，$\Phi(x)$ が成り立つ

が成り立つなら，すべての自然数 x に対し $\Phi(x)$ が成り立つ．

こう書くと,「でも，それだと帰納法の初めはどこにいっちゃったの？」と思う人がいるかもしれません．いい質問です．実は，(2.1) で x を 0 と置くと，0 より小さい自然数は存在しないので,「すべての $y < x$ に対し，$\Phi(y)$ が成り立つ」という前提は無条件に成立してしまいます．したがって，$x = 0$ に対する (2.1) は「$\Phi(0)$ が成り立つ」ということと同値になるので，これが帰納法の初めになっているわけです．

自然数の任意の集合 A に対して，“$x \in A$” という性質を自然数 x の性質 $\Phi(x)$ として考えてよい，という立場での，強い帰納法の原理は，自然数の全体 $\mathbb{N}$ 上の通常の数の大小関係 $<$ が次の性質を持つことと同値になります:

(2.2) すべての $A \subseteq \mathbb{N}$ に対し，A が空でなければ，その最小元が存在する．

もうすこし細かく言うと，$\Phi(x)$ に対する (*) から，$A = \{x \in \mathbb{N} : \Phi(x)$ でない $\}$ の最小元の存在が示せ，$A \subseteq \mathbb{N}$ の最小元の存在から，“$x \notin A$” として定義される性質 $\Phi(x)$ に対する (*) が示せます（演習問題）．

実は，全順序集合 $(X, <)$ が (2.2) に対応する

(2.3) すべての $A \subseteq X$ に対し，A が空でなければ，$<$ に関する A の最小元が存在する．

を満たすことと，すべての，X の要素に関する命題 $\Psi(x)$ に対し，

$(*)_{X,\Psi}$ 任意の $x \in X$ に対し，

(2.4) “すべての $y < x$ に対し，$\Psi(y)$ が成り立つなら $\Psi(x)$ が成り立つ” が成り立つなら，$\Psi(x)$ が成り立つ

が成り立つなら，すべての $x \in X$ に対し $\Psi(x)$ が成り立つ

が成立する，という帰納法の原理を X が満たすことは同値になります．ここでは試しに，$X = (X, <)$ が (2.3) を満たすなら，すべての X の要素に関する命題 $\Psi(x)$ に対し，$(*)_{X,\Psi}$ が成立することを証明してみましょう．命題の対偶を示します:

ある，X の要素に関する命題 $\Psi(x)$ が $(*)_{X,\Psi}$ の反例になっているとする．つまり $\Psi(x)$ は，(2.4) を満たすが，$\Psi(a)$ でないような $a \in X$ が存在する，と仮定する．このとき $A = \{a \in X : \Psi(a)$ でない $\}$ とすると，仮定から A は空集合ではない．しかし，A は $<$ に関して最小元を持たない集合になっている．つまり，A は，(2.3) の反例になっている: もし A に $<$ に関する最小元 a があったとすると，す

べての $b < a$ は A の要素ではないので，$\Psi(b)$ が成り立つ．したがって，(2.4) により，a も $\Psi(x)$ を満たすことになってしまい，$a \in A$ に矛盾である．

ここで，すぐに分ることは，

(2.5) $X = (X, <)$ が (2.3) を満たすなら，X に新しい最大元を付け加えて得られる全順序集合も (2.3) を満たす.

(2.6) X_i, $i \in I$ がすべて (2.3) を満たすような全順序集合の列で，I も全順序 $<_I$ が入っていて，$i, j \in I$, $i <_I j$ に対して X_j は X_i を（X_i の順序に関して）大きい方にのばした拡張になっているときには，それらの和集合[*5] $\bigcup_{i \in I} X_i$ も（自然に導入される全順序に関して）(2.3) を満たす.

この二つの性質を使うと，自然数の全体を，“帰納法の議論を行なうことができる” という性質を保存して，どんどん先に延長してゆくことができます[*6]．

自然数の全体を四則演算を伴った算術の体系とみるときには通常これを $\mathbb{N}$ で表わしますが，$\mathbb{N}$ を特に帰納法の議論を行なうことのできる全順序構造として見るときには，これを ω （ギリシャ文字の小文字のオメガ）で表わします．ω に新しい最大元を一つ付け加えてできる全順序構造を $\omega + 1$ とあらわすことにします．ただし，付け加える最大元を特定しないと $\omega + 1$ を特定できないので，集合 ω に ω 自身を最大元として付け加えることにします．つまり $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ です．$\omega + 1$ に新しい最大元を付け加えて，$\omega + 2$ を得ます．ここでも，付け加える新しい最大元は $\omega + 1$ 自身とすることにして $\omega + 2$ を一つに特定します．このようにして $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\cdots$ と作ってゆき，それらの和集合（極限）を $\omega + \omega$ とします．さらに，$\omega + \omega$ に最大元を付け加えて，$\omega + \omega + 1$ とします $\cdots$.

こうやって作っていった $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \ldots$ は（超限）順序数とよばれますが，これらの順序数は，最初のうちは全部可算です．つまり，ω と one to one onto（全単射的）に対応をつけることがでます．たとえば，$f : \omega \to \omega + 1$ を $f(0) = \omega$, $f(n + 1) = n$ として定義すると，f は ω から $\omega + 1$ への one to one onto な写像となります．また，$g : \omega \to \omega + \omega$ を $g(2n) = n$, $g(2n + 1) = \omega + n$ で定義すると，g は ω から $\omega + \omega$ への one to one onto な写像となります．しかし，このプロセスを続けてゆくと，どこかで，可算でない（つまり ω との間に one to one onto な対応をつけることのできない）順序数が現れます．そのようなもののうちの最初のものを ω_1 と表記することにします．ω_1 をさらに拡張して $\omega_1 + 1$,

---

[*5] これは，$X_i, i \in I$ の “極限” として見ることができます.

[*6] 解析学で，“変数 x が a にどんどん近づくとき $\cdots$” というような言い方は厳密ではなくて，たとえば $\varepsilon\delta$-論法を使って厳密に表現しなくてはならないように，ここでの「どんどん先に延長して」も，本当は別のやりかたで厳密化する必要があります．解析学では，微積分がニュートンやライプニッツによって導入されてから，収束や極限の厳密な定義の仕方がある程度確立するまでに 150 年くらいの時間がかかりましたが，超限順序数の理論も 1880 年代ごろにカントルが導入してから，1920 年代初頭に，当時まだ teenager だったフォン・ノイマンがその厳密な基礎付けを確立するまでに 40 年近くの時間がかかっています．超限順序数の厳密な理論展開については，たとえば，[3] の第 2 章をごらんください.

$\omega_1+2,\ldots$ を作ってゆくと，どこかで，ω_1 と one to one onto に対応づけのできない順序数が現れますが，その最初のものを ω_2 とよぶことにします．等々[*7]．

上で，ω 以上の超限順序数を作ってゆくときに，それまでに作った順序数の全体を “点” としてそれまでに作った順序数の上に乗せる，という構成法をとりましたが，実は，ひとつひとつの有限の順序数（つまり自然数）も，同じ構成法により一意に定まる集合として導入することで，順序数全体の統一的な扱いができるようになります．つまり，0 は “nothing” を集めてできる空集合 $\emptyset$ のことだとし，1 は，0, つまり $\emptyset$ （だけ）を集めてできる集合 $\{\emptyset\}$ とし，2 は，0 と 1, つまり，$\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ を集めてできる $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ とし，⋯ とするわけです．

この構成により，順序数 α と α より前の順序数の全体 $\{\beta : \beta<\alpha\}$ は常に同じものになります．集合論の研究者は，たとえば，$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ と書くかわりに，$\bigcup_{i<\omega} X_i$ と書いたり，$\bigcup_{i\in\omega} X_i$ と書いたりすることも多いのですが，これらの表現がすべて同じものをあらわすのは，ここで述べたような自然数の構成法を仮定しているからです．また，これはもっと悪乗りのように見えるかもしれませんが，$X_m\cup X_{m+1}\cup\cdots\cup X_{n-1}$ を $\bigcup_{i\in n\setminus m} X_i$ と書いたりするのも，上のような自然数の全体の構成を仮定してのことです.「悪乗り」とは言いましたが，実際にはこの記法は，時に表記をたいへんすっきりさせることのある便利な書き方でもあります．

上の ω, ω_1, ω_2,... のように，それより小さいどの順序数とも one to one onto な対応をつけることのできないような順序数は基数とよばれます．基数は集合のサイズをはかる秤のようなものになっていると考えることができて，実際,（選択公理を仮定すると）すべての無限集合は，無限基数 ω, ω_1, ω_2,... のうちのどれか一つと one to one onto に対応づけることができます．あるいは，このことは，すべての無限集合 X に対して，ある基数 κ があって，X の要素のすべてを x_α, $\alpha<\kappa$ と整列することができる，と表現することもできます．このような κ は，集合 X の濃度と呼ばれています[*8]．また，順序数 ω, ω_1, ω_2,... を基数として見るということを強調して表わすときには，これらの基数は $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... などと表記されることもあります．‘$\aleph$’ (aleph) はヘブライ語のアルファベットの最初の文字です．

3　問題の答えと証明

実は，この文章の初めで述べた列車の問題の答えは，

(3.1)　各駅で列車を降りる人の選び方によらず，列車が ω_1 番目の駅に着いたときの乗客の数は 0 人である

です．以下でこの主張の証明を見てみることにします．

[*7] ω （あるいは，集合としては同じものですが $\mathbb{N}$）が集合として扱えることは集合論の公理として明示的に保証する必要があります．しかし，いったん ω の（集合としての）存在を保証してしまうと，$\omega_1,\omega_2,\ldots$ の存在は，集合論の通常の公理系の中で証明することができます．

[*8] “濃度” というのは日本語としてはこなれていると言えますが，英語でこの概念にあてられているのは，“基数度” とでも直訳できそうな cardinality という単語です．

(3.1) の証明: α 番目の駅 $(0 < \alpha < \omega_1)$ で列車に乗りこむ ω 人の乗客を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とよぶことにする.

関数 $f : \omega_1 \times \omega \to \omega_1$ を,

$$f(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき} \\ 0, & t_{\alpha,n} \text{ がどの駅でも降りないとき} \\ 0, & \alpha = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.2}$$

として定義することにする. 背理法で示すことにして, ある $0 < \alpha_0 < \omega_1$ と $n_0 < \omega$ に対し, $f(\alpha_0, n_0) = 0$ となっていると仮定する. つまり乗客 t_{α_0,n_0} は α_0 番目の駅で乗車した後, ω_1 番目の駅までの間にどの駅でも降りないものとする.

(†) $\alpha_0 < \alpha^* < \omega_1$ を f に関して閉じているようなものとする. つまり, すべての $\beta < \alpha^*$ と $n < \omega$ に対し, $f(\beta, n) < \alpha^*$ が成り立つようなものとする.

列車が α^* 番目の駅についたときには, 少なくとも t_{α_0,n_0} は列車に乗っているので, 誰かは列車から降りなくてはいけないが, α^* の選び方から, このとき列車に乗っているのは ω_1 番目の駅まで列車を降りない乗客ばかりなので, これは不可能である. □

上の証明でのポイントは, (†) で印をつけた部分の議論です. α^* の標準的な作り方は, $\alpha(0) = \alpha_0$ として, $\alpha(0) < \cdots < \alpha(k) < \omega_1$ が構成できたときに, $\alpha(k) < \alpha(k+1) < \omega_1$ を, すべての $\beta < \alpha(k)$ と $n < \omega$ に対して, $f(\beta, n) < \alpha(k+1)$ となるようにとり, $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$,... の極限を α^* とする, というものです. ここで, $\alpha(k)$ から $\alpha(k+1)$ を作るときに, $\alpha(k+1) < \omega_1$ とできるのは, $\{f(\beta, n) : \beta < \alpha(k), n < \omega\}$ が可算で, ω_1 が, その定義から, "すべての可算な部分集合 $X \subseteq \omega_1$ に対して X のすべての要素より大きな可算順序数 $< \omega_1$ が存在する", という性質を持つからで, $\alpha^* < \omega_1$ となるのも同じ性質からです.

応用問題 2 100 円を入れると 200 円出てくる自動販売機がある. この自動販売機に ω_1 回 100 円玉を入れ続けたとき, 儲けはどれだけになるか?

もうわかったと思いますが, これは,「儲け」どころか (無限の) 大損です. 上の証明のように, f を, 手持ちの 100 円玉一つ一つに関して定義すると, 各 $\alpha < \omega_1$ に対して, f に関して閉じている $\alpha < \alpha^* < \omega_1$ がとれるわけですが. 上の証明から α^* 回目には, それまでに自販機に入れたり自販機から出てきたりした 100 円玉は全部自販機の中に戻っているので, 新しい 100 円玉を自分のお財布から出して自販機に入れなくてはならなくなるからです.

4　順序数上の再帰的定義

順序数はもともとそれら上で帰納法の議論が行なえるようなものとして導入したのでしたが, (3.1) の証明の中で (明示的に) 使ったのは, ω_1 が可算でない最初の順

序数だという性質だけでした．超限順序数上の帰納法（超限帰納法）から導かれる再帰的定義は，選択公理と組み合わせて用いると大変に強力な構成法になります．

再帰的定義の議論のうちのいくつかはツォルンの補題の応用で置き換えられるため,「超限帰納法は必要ない」と誤解している人が非常に多くいるようです．

しかし，ツォルンの補題の応用としてはうまく証明が得られないか，あるいは得られたとしても複雑すぎてとても人間の理解できないような証明になってしまうような数学的命題は沢山あって，そのような命題を扱かう数学の研究では，超限帰納法が縦横に用いられることになります．そういった数学の一つの究極の姿は，[6] で見ることができます．ただし，この本は初心者には絶対に歯がたたないので，もしどうしてもこの本に書いてあることの勉強をしたいなら，もっとやさしく書いてある他の入門書 (たとえば [5]) を最初に読むことをおすすめします．

ツォルンの補題の応用で置き換えられることがわかっているような命題についても，再帰的定義を用いた証明の方を吟味することで，ツォルンの補題を用いた証明では見えてこないような面白い現象が色々と見えてくることも少なくありせん．

ここでは，そのような “面白い現象” の一つの例として Vitali 集合の構成を考えてみたいと思います．第 2 節 の最後で注意したように，ある無限基数 κ をとると 0 と 1 の間の実数区間 $[0,1]$ （の要素）を $r_\alpha, \alpha < \kappa$ と（1 対 1 に）整列することができます．これは本質的なことではなく，後で表記を若干簡略化するための手立てですが，必要なら，この列 $r_\alpha, \alpha < \kappa$ に変更を加えて，$r_0 = 0$ となっているようにします．ここで，$s_\alpha, \alpha < \kappa$ を次のように再帰的に定義します．

$$s_\alpha = \begin{cases} r_\alpha, & \text{どの } \beta < \alpha \text{ に対しても } s_\beta - r_\alpha \text{ が無理数のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \tag{4.1}$$

ここでも，第 2 節 の数学的帰納法の一般形の帰納法の初めに関して注意したのと同じような理由で，$s_0 = 0$ となることに注意してください．$X = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$ とすると，$s_\alpha, \alpha < \kappa$ の構成法 (4.1) により，

(4.2) すべての $y \in [0,1] \setminus X$ に対し，$y - x$ が有理数になるような $x \in X$ が存在する

ことがわかります: ある $\alpha < \kappa$ に対して $y = r_\alpha$ とすると，$y \notin X$ により，$s_\alpha = 0$ でなくてはならず，したがって $s_\beta, \beta < \alpha$ の中に $s_\beta - r_\alpha$ （あるいは $r_\alpha - s_\beta$）が有理数になっているものが存在する，からです．今 $q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ に対し，$X + q$ で，X の要素をすべて q だけシフトして得られる集合を表すことにします．ただし，q だけシフトして $[0,1]$ をはみ出てしまったものについては，原点に戻ってシフトする（もとの位置から $q-1$ だけシフトする）ものとします．つまり，

$$X + q = \{x + q : x \in X \cap [0, 1-q]\} \cup \{x + q - 1 : x \in X \cap (1-q, 1]\}$$

です．このとき，(4.2) により，

$$[0,1] = \bigcup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} X + q \tag{4.3}$$

となることがわかります．しかも，これは互いに共通部分を持たない集合の和になっています．

さて μ を，$[0,1]$ 上の測度で，区間 $[a,b]$ に対しては $\mu([a,b]) = b - a$ となり，集合のシフト (translation) に関して不変なものとします．つまり任意の μ で可測な集合 A と任意の $r \in [0,1)$ に対し，$\mu(A) = \mu(A + r)$ が成り立つものとします．たとえば，$[0,1]$ 上のルベーグ測度はそのようなものです．このとき，

(4.4)　X は μ で可測でない

が成り立ちます: もしも，X が可測だとして $0 \leq \mu(X) \leq 1$ が決まったとすると，すべての $q \in [0,1)$ に対して $\mu(X + q) = \mu(X)$ となるので，(4.3) での可算和から，$\mu(X)$ が 0 であるかそうでないかによって $\mu([0,1]) = 0$ か $\mu([0,1]) = \infty$ となってしまうが，これは，$\mu([0,1]) = 1 - 0 = 1$ に矛盾である，からです．

上のような $X \subseteq [0,1]$ は Vitali 集合と呼ばれていて，多くの測度論の教科書では，Zorn の補題を用いる構成法によって述べられています．しかし，上のような再帰的な定義を用いることで，Zorn の補題を使って Vitali 集合を作ったのでは見えてこない，次のような興味深い現象が観察できるようになります．

$\mathbb{R}$ の部分集合，あるいはもっと一般的に，ある $n \in \mathbb{N} \setminus 1$ に対する $\mathbb{R}^n$ の部分集合が射影的である，というのを，ある $m \geq n$ をとって，$\mathbb{R}^m$ のある開集合から出発して，集合の射影をとることと補集合をとることの操作の繰り返しで得られるような集合になっていること，とします[*9]．射影的な集合（射影集合ということもあります）は，開集合という素性の知れた集合から出発して非常に具体的な操作で得られた集合である，といえるでしょう．ここで，ゲーデルによる次の結果を考えてみましょう．

定理 3 (K. Gödel, 1938) “$\mathbb{R}$ の全要素の並べあげ r_α, $\alpha < \kappa$ で，これに対応する $\mathbb{R}$ 上の全順序 $\{(r_\alpha, r_\beta) : \alpha < \beta < \kappa\} \subseteq \mathbb{R}^2$ が射影的であるようなもの[*10]が存在する”，という主張は，集合論の公理系と矛盾しない．

上で与えた Vitali 集合 $X \subseteq [0,1]$ の構成を思いだしてみましょう．$\mathbb{R}$ の要素の射影的な並べあげ r_α, $\alpha < \kappa$ が与えられると，これから，$[0,1]$ の要素の並べあげでやはり射影的であるようなものが自然に作れますが，それを用いれば，上のようにして “構成的” に Vitali 集合 $X \subseteq [0,1]$ を作ることができるのでした．特に，そうやって作られた集合の複雑さを分析してみると，もとの並べあげが射影的なら，X も射影的であることがわかります．このことから，

系 4 “ルベーク可測でない射影的な集合が存在する” は集合論の公理系と矛盾しない．

[*9] 厳密に言うと，ここでは開集合より若干複雑なものになっている可能性のあるボレル集合を出発点にとらなくてはいけないのですが，集合の可測性に関する話では，開集合を出発点にとると考えても同じです．

[*10] 以下では，このようなとき，並べあげ r_α, $\alpha < \kappa$ は射影的である，と言うことにします．

ということが結論できます．

一方，現在では，たとえば Proper Forcing Axiom と呼ばれる公理など，新しい公理を集合論の公理系に付け加えることで得られる，集合論の自然な拡張のうちのいくつかでは，Projective Determinacy と呼ばれる無限組合せ論の原理が成立し，そのことから，すべての射影的な集合がルベーク可測になることが証明できます[*11]．上で述べたことから，このような集合論の拡張された公理系では，$\mathbb{R}$ の整列 r_α, $\alpha < \kappa$ で射影的なものは存在しないことが証明できることになります．

上で引用した結果（ゲーデルの定理の系と Projective Determinacy による結果）から，“ルベーク可測でない射影的な集合が存在する” という命題は，連続体仮説などと同じように，通常の集合論の公理系から独立である (つまり正しいとも正しくないとも証明できない) ことがわかります．ちなみに，“ルベーク可測でない射影的な集合が存在する” は連続体仮説とも完全に独立であることも知られています．つまり連続体仮説が正しいと仮定しても間違っていると仮定しても，依然として，この命題が正しい可能性も正しくない可能性もあることを示す結果が知られています．

> 濃度や順序型の一般論はその後[*12]それほど利用されることもなく，進展もなかった．([1], p.38)

というような言明が日本語で書かれた啓蒙書類に散見されるため，間違った印象を持ってしまっている人も少なくないのではないかと思いますが，実際には，超限順序数や超限帰納法を積極的に使用する，という方向に一歩踏み出すと，広大な数学の平野が目前に開けてきます．しかも，この平野は未踏であるどころか，特に 20 世紀の後半以降に深く探査されていて，地平線近くの研究の前線では，あなたへの挑戦の光がまぶしく輝いているのが見えます．

References

[1] 彌永 昌吉，ガロアの時代ガロアの数学，第 II 部 数学編，シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002).

[2] 渕野 昌，Emacs Lisp でつくる，日本評論社 (2003).

[3] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，in: “ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007).

[*11] これらの，ごく最近の研究でのキーワードは Wikipedia の英語版で参照できます．英語版のこれらのページはかなり正確と言えますが，日本語版を含む Wikipedia の他の言語の集合論に関連する項目には決定的に間違ったことが書かれていることもあるので注意が必要です．

[*12] [渕野 註] カントルやヒルベルトの時代の後．

[4] 渕野 昌，Mystery Train,
http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/misc/wakatenokai10-text.pdf, (2010).

[5] Michael Holz, Karsten Steffens, E. Weitz, Introduction to Cardinal Arithmetic, Birkhauser (1999).

[6] Saharon Shelah, Cardinal Arithmetic, Oxford University Press (1994).