想定外の数学 — 不完全性定理以降の数学 (続) †

神戸大学大学院・システム情報学研究科 渕野 昌 (Sakaé Fuchino) *

Graduate School of System Informatics
Kobe University
Rokko-dai 1-1, Nada, Kobe 657-8501 Japan

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

1 数学の無矛盾性

本文で述べたように，不完全性定理によって，数学全体の (つまり，現行の，あるいは何らかの拡張のほどこされた公理的集合論の)，無矛盾性の証明は不可能になったと言ってよい．無矛盾性を証明する立場として用いられるべき推論の体系は，それが数学の体系 (したがって集合論) 自身に含まれてしまうほかはないからである(1).

2012 年 01 月 15 日 (12:55JST) 版.

† Incompleteness Theorem — An unexpectect result and the mathematics hereafter

* Supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 21540150 of the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology Japan.

本稿は,『数学セミナー』 2012 年 1 月号に掲載予定の同名の記事の続編です.『数学セミナー』誌の記事 (ここでは「本文」として引用されている*) に書いたことは重複しては書きませんが，続編の文章だけで，ある程度は self contained なものになるようにする予定ではいます．またネット上の文書ということで，internet 上で可能な reference はできるだけ clickable link をはるようにするようにします.

本稿は，現在 (2012 年 01 月 15 日) まだ書きかけです．途中段階のテキストを読まれて思いついたコメントなどがあれば，ぜひお知らせください.

(1)本文でも書いたように，現行の通常の (集合論を積極的に用いない) 数学は，公理的集合論の公理系 ZFC (のある拡張(2)の比較的小さなフラグメントの) で展開できる理論である．したがって，公理的集合論が無矛盾なら，通常の数学も無矛盾ということになる．一方，公理的集合論の研究をしている者としては，公理的集合論で展開される数学理論もすべて数学とみなしたいのであるが,

しかし，もちろん無矛盾性の証明がない，ということは，矛盾している，ということではないし，無矛盾性の保証がないから，研究に値しない，と短絡的に結論できるわけでもない．また，仮に，数学から導かれる矛盾が実際に見つかってしまう，という最悪の事態が起こったとしても，何らかの修正が可能なら，それまでの研究結果がこれによって全部無意味になってしまう，ということも起こらないはずである．このことについては次の節で更に補足することにする．

一方，通常の数学の議論については，近世，近代前期くらいまでの数学は，本文で述べた Gentzen の定理のような意味で，ある程度の無矛盾性の保証がついている体系の中におさまってしまうので，もし矛盾が見つかったとすると，それは古い数学研究のタイプの議論による矛盾ということはまずないと考えてよく，したがってもし万が一そのようなものが見付かったとすると，それは近代以降の数学の議論を含むものでなくてはならない．しかし，他の科学の分野の研究でも同様と思うが，近代以降の数学の研究量は爆発的で，人類のそれまでの数学研究の全体と比較できる，と言っても言いすぎではないかもしれない．そのような研究の中で，これまでの研究で何の矛盾も明らかにされなかった，ということは，もし矛盾が将来見つかるとしても，それは，見落されていた簡単な議論，というようなものではありにくい，ということを示唆している，と考えてよい．

いずれにしても，“日常的な” 数学が無矛盾であることを疑う数学者は，まずいないと思っていいだろう．一方で，研究者が他の分野の数学者たちから隔離されている傾向が強く，その研究の規模や実態が一般の数学者たちに殆ど知られていない集合論に関しては，非専門家が分野の深さを見くびってしまう隙があるためか,「集合論の矛盾の発見」に類する想定外の結果を主張する，おかしな「数学者」が一定の頻度で出現する傾向がある．

もちろん，たとえば「角の三等分」の証明を主張する人は常に出現するようなので，病理学的に見れば，この「集合論の矛盾」も，その流れなのだろうが，角の三等分の定理が， 問題をとり違えているか，証明が間違っているかのどちらかでしかありえないのに対し(3),「集合論の矛盾」は，絶対にないとも言いきれないわけなので，その意味では，そして，この主張が現代の集合論を全く知らないことの多

そのような視点からは，ZFC の公理系ないしは，それを拡張するどれかの公理系で展開される理論を 「全数学」 だと思う，という解釈は自然なものである，と言えるだろう．

(2)たとえば，グロタンディエク・ユニヴァースを用いる理論が，ZFC に inaccessible cardinal の存在公理を付け加えた集合論に対応する，という指摘がある (しかし，これは，[2] で述べたような方法で巨大基数を用いずに回避できるように思える)．

(3)第 3 節で述べるように初等平面幾何は完全で無矛盾なので，ここで記述できる命題については不完全性定理の呪縛は適用できない！ ただし，角の三等分定理の非存在の証明には体の拡大の理論を用いるので，そこのところに矛盾が入りこむ可能性もあるが，この部分の証明もペアノ算術の無矛盾性の強さくらいでは抑えられているだろうと思う (reverse mathematics の専門家の方々！ 教えてください！)．

い集合論の非専門家の盲点をついている，という意味でも，この主張に注目した，「おかしな」数学者の目のつけどころは，ある意味 “悪くない” と言うべきであろう．実際に，日本だけに限っても，現在，この「集合論の矛盾を発見した」の，何らかのバリエーションを主張している人 (集合論や数理論理学の専門家ではない!) で，ちょっと変った数学者 (?) として，アカデミックなポジションに安住している人が私の知っている限りでも複数いる（しかもそのうちの何人かのポジションは数学のそれである！）．これに対して,「角の三等分」の主張とアカデミックなポジションとはなかなか共存しにくいのではないだろうか.

2　集合論の無矛盾性

前の節でも述べたように，第 2 不完全性定理により，(集合論が矛盾しない限り) 集合論の無矛盾性を証明する数学的な手立ては存在しないのだが，だからといって，集合論に対して 「無矛盾性の保証がないから，研究に値しない」という議論が成り立つわけではない．しかも，もし，万が一，未来に集合論に矛盾が見つかるようなことがあったとしても，そのことで集合論のそれまでの研究が全く無に来してしまう，というわけではないはずである．このことは，例えば，後で述べることになる Reinhard cardinal に関して起きた展開の検証でも理解することができる．

そういうわけで，集合論の無矛盾性を証明する数学的な手立ては存在しないのだが，集合論の無矛盾性を支持するプラグマティックな議論は存在する． このことを述べるために，まず，公理的集合論の研究分野の 1 つである，巨大基数の理論についてのごくかいつまんだ概説をしておく必要がある．

一般に巨大基数公理と呼ばれる様々な公理の 1 つを ZFC に付け加えてできる集合論が，20 世紀の後半以降大変活発に研究されてきている．これらの公理はいずれも，ある意味での超越性を持つ基数が存在することを主張するものであり,「巨大基数公理」という名称はそのことにちなむ[4]．

これらの公理を付け加えることによって得られる ZFC の拡張はどれも，ZFC より次の意味での無矛盾性の強さ (consistency strength) の真に強いものになる．

[4] ZFC の公理の 1 つである無限公理 (この公理をここでは (Inf) と略することにする) は，基数 ω (自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対応する順序数) の存在と同値であるが，ω は，それが，可算，乗算，冪乗などの通常の数学的演算のすべてで閉じている，という意味での，その下にある順序数 (つまりすべての自然数) に対する超越性を持つ．この超越性は，たとえば， 累積的階層での ω より下の部分 V_ω は，(要素関係をそこに制限したものと組で考えたとき) すべての自然数を含む，無限公理以外の集合論の公理 (これを ZFC − (Inf) とあらわすことにする) をすべて満たすような構造になっている，という形でも表現される．また特に，このことから，ZFC $\vdash$ $consis$(ZFC − (Inf)) となることがわかる．したがって，第 2 不完全性定理から，ZFC は ZFC − (Inf) より真に強い理論となっていることが帰結できる．

巨大基数公理は，このような ω の存在の ZFC − (Inf) 上の超越性と類似の ZFC 上の超越性を持つ基数の存在を主張するものとなっている．

つまり，A をこれらの公理の 1 つとすると，ZFC + A $\vdash$ *consis*(ZFC) が成り立つ[(5)]．第 2 不完全性定理により，ZFC が無矛盾なら，ZFC $\nvdash$ *consis*(ZFC) だから，特にこのことから ZFC + A は，ZFC より真に強い公理系になっていることがわかる．さらに，これらの公理の 2 つ A, B について，

(2.1) ZFC $\vdash$ *consis*(ZFC + A) $\leftrightarrow$ *consis*(ZFC + B), または,

(2.2) ZFC + A $\vdash$ *consis*(ZFC + B) または,

(2.3) ZFC + B $\vdash$ *consis*(ZFC + A)

のどれかが，多くの場合成立する．つまり，これらの巨大基数公理は全体として，無矛盾性の強さに関して，(ほぼ) 線形に並べることができ，全体として 1 つの統合的な理論体系 (の体系) を形成する．ただし第 1 不完全性定理により，ZFC に巨大基数公理のどれを付け加えたものについても，それが無矛盾だとすると，完全ではありえないので，ここで言った理論体系の体系も，(その創造が) 終結したものではありえず，常に，さらに強い公理をいくらでも付け加えられる可能性を持つ，開かれた体系となっている．

ちなみに，たとえば (2.2) から，

(2.4) ZFC $\vdash$ *consis*(ZFC + A) $\rightarrow$ *consis*(ZFC + B)

が導けるから，(ZFC+B が無矛盾で) (2.2) が成り立つなら，ZFC+B $\nvdash$ *consis*(ZFC+A) である[(6)]．(2.1) が成り立つとき，公理 A と公理 B は **無矛盾等価** (*equiconsistent*) である，といい．(2.2) が成り立つとき，公理 A は公理 B より **無矛盾性の強さ** (*consistency strength*) が (真に) 強い，という．

具体的な例として，ここでは，2 つの種類の巨大基数公理について，考察してみることにする．

1 つは，巨大基数のうちで最も小さいもので，到達不可能基数と呼ばれるものである．基数 κ が **到達不可能** (*inaccessible*) であるとは，κ は正則な極限基数で，基数の冪乗に関して閉じている[(7)]ことである．κ が到達不可能なら，V_κ は ZFC の

---

(5) 無矛盾性の強さが強いということは，より矛盾する "度合" が高い，ということなので，正しい用語としてはむしろ「矛盾性の強さ」と言うべきであろう．この言い方にならなかったのは，欧米の言葉では日本語とは逆に，矛盾という単語が無矛盾という単語の派生語になっていること以外にも,「矛盾性の強さ」と言ったときの否定的な含意をさけたかったという理由もあったのではないかと思う．実際，無矛盾性の強さが強い理論は，数学的には,「より矛盾の度合が高い理論」として扱かってしまわず,「よりパワフルな理論」として扱かう方がはるかに生産的であろう．

(6) もし ZFC + B $\vdash$ *consis*(ZFC + A) だとすると，(2.4) から，ZFC + B $\vdash$ *consis*(ZFC + B) が言えてしまい，第 2 不完全性定理に矛盾するからである．

(7) つまり,

(2.5) 任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対し，$2^\lambda < \kappa$ が成り立つ

モデルになるから，ZFC + ∃到達不可能基数 ⊢ $consis$(ZFC) が成り立つ．到達不可能基数の定義から (2.5) を落とした条件で定義される基数は，今日では**弱到達不可能基数** (*weakly inaccessible cardinal*) とよばれているが，この基数の存在公理はすでに 1908 年 (明治 41 年) にハウスドルフによって導入されている．到達不可能基数は，シェルピンスキーとタルスキー，ツェルメロらによって 1930 年 (昭和 5 年) に独立に導入されている．

ここで考察するもう 1 つの巨大基数は可測基数と呼ばれるものである．基数 κ が**可測基数** (*measurable caridnal*) であるとは，$\mathcal{P}(\kappa)$ 上の non trivial な $< \kappa$-加法的な二値測度が存在することである[8]．この基数の定義は Stanisław Ulam の 1930 年 (昭和 5 年) の論文で導入されたもので，Ulam のはこのような基数が到達不可能基数になることを示している[9]．したがって，到達不可能基数の存在公理 (これをここでは (IAC) と略することにする) は，ZFC で，可測基数の存在公理 (これをここでは (MC) と略すことにする) から帰結できるが，実は，可測基数の下に cofinally many に[10]到達不可能基数が存在することが，可測基数の初等的埋め込みによる特徴付けから直ちに証明できる[11]．したがって，ZFC + (MC) から，$consis$(ZFC + (IAC)) (したがって， (MC) は (IAC) より無矛盾性の強さが真に大きい) あるいはもっと強い，$consis$(ZFC + “到達不可能基数が class many に存在する”) などが証明できることになる．

到達不可能基数が “小さな” 巨大基数だとすると，可測基数は “中程度の” 巨大基数である，と言うことができる．ただし，この “小さな” や “中程度の” は基数の大きさの比較ではなく[12]，無矛盾性の強さに関する “大きさ” である．これに対して，巨大基数の理論では，強コンパクト基数や，超コンパクト基数のような，“大きな” 巨大基数も考察されることが多い．

以上の準備は,「集合論の無矛盾性を支持するプラグマティックな議論」と私が述べたところの状況を説明するためであった．それはつまり，こういうことである．上でも見たように巨大基数の公理は 20 世紀の初めから集中的に研究されてきた．これらの巨大基数公理では，最初はむしろそのような基数が存在しないことの証明

---

[8] ここでは述べないが，可測基数には，集合論のユニヴァースの内部モデルへの初等的埋め込みによる特徴付けが存在して，他の巨大基数の同様な特徴付けとの関連を見ることで，可測基数の存在公理がある意味で「自然な」ものであることを結論とする議論が可能である．

[9] Ulam の証明したこと (に対応するの) は，もう少し正確には，最小の可測基数が到達不可能基数になる，という，ここで述べた (それ自身は) 正しい主張より弱い命題である．

[10] 実は 「stationarily many に」など，もっと強い主張が成り立つ．

[11] stationarily many など，もっと強い意味で沢山の到達不可能基数が可測基数の下に存在することが示せる．

[12] たとえば，ある可測基数より大きな到達不可能基数が存在する可能性もある．ただし,「ある可測基数より大きな到達不能基数が存在する」は，ZFC + (MC) より無矛盾性の強さが真に強い公理である．

が試みられていた場合も多く，したがって，これらの公理から矛盾を導く努力さえされていたのにもかかわらず，巨大基数の理論の大きな展開，発展を経た今日まで，これらの公理から (つまり ZFC にこれらの公理を付け加えた体系から) 矛盾が導かれることはなかった．

ZFC を強めた理論から矛盾が導かれていない，ということは，もちろん ZFC だけからも (もっと?) 矛盾が導かれていない，ということであるから，このことは，ZFC のみからの矛盾が，少なくとも巨大基数の理論がこれまでの一世紀に経験したような精密な議論とは比較にならないような，単純な議論から導けることはまずないと考えてよい，という種類の保証になっていると解釈できるわけである．

巨大基数の集合論の無矛盾性に対する別の観点からの保証は，この理論が体現しているように思える整合性であろう．しかし，これは，巨大基数の理論をある程度積極的に学んだ／研究した，という体験ある人のみに共有される感覚にすぎないかもしれない．

「集合論は矛盾しているかもしれないから無意味だ」とか,「矛盾しているかもしれない巨大基数の理論を研究するのは無意味だ」というような発言を好んでする人たちの多くは，この一世紀の間に集合論でいかに深くエキサイティングな数学的研究がされてきたかについてまったく無知であるように思える．また，多少は知っている場合には，かつて，難しすぎて集合論研究からドロップアウトしたというような類の経歴と，そのことからくる深いトラウマをかかえている人だったりするので，そういった人々に対しては，ここで言ったような「保証」は，馬耳東風と言って失礼なら，馬の耳に念仏でしかないかもしれない．

もちろん強すぎる超越性を要求する公理を採用すると，矛盾の証明できる体系ができあがってしまうこともありえる．実際，そのような例として，N. Reinhardt の導入した，今日 Reinhardt 基数と呼ばれている基数の存在を主張する公理がある．この基数公理は，普通の集合論の公理系 ZFC ではうまく表現できなくて，例えば，真のクラスを理論でのオブジェクトとして扱うことのできる[(13)] ZFC の拡張を考える必要があるが[(14)]，基数 κ が Reinhardt 基数であるとは，ある集合論のユニヴァースの自分自身への初等的な写像[(15)] j で，κ が $j(\kappa) \neq \kappa$ となる最小の順

[(13)]ZFC でも (真の) クラスは扱えるが，そこでは,「すべてのクラスに対して … が成り立つ」という形の主張は，クラスを定義する各論理式 φ に対して「(φ に含まれるパラメタを任意に固定したとき) $\{x : \varphi(x)\}$ に対し … が成り立つ」 という論理式を考え，これらの論理式がすべて正しいことを主張する ZFC の meta-theorem と考えることになる．これに対して,「あるクラスが存在して … が成り立つ」というタイプの主張は一般には ZFC で扱かうことがけいない．

[(14)]以下で述べる Reinhardt 基数の定義での j の存在の主張が記述できるためにそのような拡張が必要である．

[(15)]ある言語 L に対し，L-構造 M から L-構造 N への写像 f が初等的 (elementary) であるとは，すべての M の要素の組 $a_0, ..., a_{n-1}$ とすべての述語論理での L-論理式 $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し，$M \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \leftrightarrow N \models \varphi(f(a_0), ..., f(a_{n-1}))$ が成り立つことである．

序数になっているもの存在することである．この基数の概念が導入されてからしばらくして，このような基数の存在が集合論の拡張と矛盾する (つまり，ZFC のこのような拡張と Reinhardt 基数の存在を主張する公理を合せた体系は矛盾する，あるいは，ZFC のこのような拡張で Reinhardt 基数の非存在が定理として証明できる) ことが示されている．

しかし，Reinhardt 基数の存在公理の，ZFC での矛盾が示されたことで，Reinhardt 基数に対してそれまでに行なわれた考察が全く無駄になってしまったわけではなかった．Reinhardt 基数の超越性をできるだけ保存し，一方で，矛盾を導くことの判明した性質をうまく取りのぞくことによって，超コンパクト基数の概念が見出され，Reinhardt 基数に対しての基礎的なアイデアは，この基数の存在公理の考察に再利用できているからである．

その後，超コンパクト基数は，“大きな” 巨大基数のうちで最も重要なものとなって，この基数に関連する多くの興味深い結果が得られてきている．

この，Reinhardt 基数の存在公理の矛盾の発見から超コンパクト基数の導入とその理論の発展に到る経緯は，数学が矛盾していることが示されてしまう，という想定外の状況が万が一にも起こったときの，可能なシナリオを示唆しているように思える．つまり，そのようなことが万が一に起こった場合でも，Reinhardt 基数の存在公理のときと同じように，そこで示された矛盾を回避するような修正を数学に対して行なうことで，これまでに数学の長い歴史の中で積上げてきた数学的結果をすべて失なってしまう，というような壊滅状態は回避することができるのではないか，と考えることができる，ということである．

3　完全で無矛盾な理論

多くの人は，不完全性定理の内容を,「数学は不完全である」 というように理解しているように思われる．そして，この「多くの人」は「多くの数学者」すらも含んでいるように思える．このような理解の仕方に，色々な点で問題があることは，本文でもすでに述べた．

同じように不正確な，巷の言葉での表現にしても，少なくとも数学者の視点からは，不完全性定理の内容をもっと肯定的に「数学の世界は無尽蔵である」と捉えてほしいと思う．数学の全体の体系はどれだけ拡張しても (本文で述べたような数理論理学での意味で) 不完全なので，さらに大きな体系に拡張される可能性をひめている，からである．この意味での無尽蔵性は既に述べた巨大基数の理論での展開でも明らかであるが，もっと “通常の” 数学に近いところでの無尽蔵性については，第 5 節でさらに見ることにする．

しかし，不完全性定理の内容を 「不完全」 と把握するか 「無尽蔵」 と把握するかの違いは措くことにしても，不完全性定理が，数学全体，あるいはもっと正確には，数論のある部分体系を含むような数学の部分体系全体に対する定理であるこ

とを見逃してしまっているための誤解や思い込みが，ある一連の重要な事実を想定の外に置いてしまいがちになっているように思える．それは，数学の，トリヴィアルでない部分体系で，完全で無矛盾なものが存在する，という事実である．

無矛盾で完全であることが有限の立場から証明できる体系のうち，重要なものの 1 つに，実閉体の理論をあげることができる．この理論の無矛盾性と完全性の重要性の理由の 1 つは，うまく定式化すると，初等的な幾何学の理論が，この理論と双方向に解釈できるようになるからである — たとえばタルスキーの [7] を参照されたい．したがって，このタルスキーの定式化したような初等幾何は，無矛盾で完全でしたがって決定可能ですらある．

一方，幾何学の公理の無矛盾性というテーマでは，日本ではヒルベルトの 20 世紀初頭の議論 (幾何は $\mathbb{R}$ で解釈できるので無矛盾だ，というもの) を頭にうかべる数学者が多いようで，このことはドイツから日本に移住した初めのころに非常に奇異な印象を受けたことを憶えている．ちょうどそのころ，日本に滞在していた，故 Peter Slodowy 教授に初等幾何の無矛盾性についての話をしたときに,「ああタルスキーのあれね」というような反応が帰ってきたので，やはり今更ヒルベルトの「幾何学の基礎」を持ちだすのはさすがに日本だけで(16)，ドイツの幾何学者はタルスキーの結果までちゃんと知っていることが確認できて，少し安心したのだった．

4 自動証明の (悪) 夢

上の初等幾何学の例は,「不完全性定理のために，数学は人間にはできるがコンピュータがやることはできない」 というような議論が全くナンセンスであることの証明ともなっている．もし不完全性定理が数学をコンピュータで実行することの不可能性の本質的な要因なのだとすると，初等幾何は完全にコンピュータで実行可能ということになってしまうわけだが，実際にはそうはなっていないからである．

コンピュータで数学を実行することの困難は，むしろ数学の自動証明に必要となる計算量の理論的な下限の大きさと，それに輪をかけての，証明の体系をナイーヴにコンピュータに乗せたときの効率の悪さであろう．しかし，数学が (あるいはもう少し譲って数学の証明が) 人間にはできてコンピュータにできないことの理由はどこにもないように思える．むしろ，チェスや将棋でコンピュータがプロの (人間の) プレイヤーを敗るようになってきているように，数学の証明も人間よりコンピュータの方がうまくやってのけられるようになる日が来るのは時間の問題なのではないかと思う．

日本の将棋界では，プロ棋士が公の場でコンピュータと対局することが禁止されているということだが，数学に関しては,「数学の証明はコンピュータにはでき

---

(16) もっとも，後に [6] でヒルベルトとベルナイスは，[6] で，代数閉体の理論の無矛盾性，完全性の完全に有限な立場からの証明を与えている．

ず人間しかできなくてはいけない」というような願望があって，それに対する無理やりの理由付けとして不完全性定理が引合いに出されているのではないだろうか？そうだとしたら，これは本文の初めにも書いたような，想定が思考をブロックしてしまっている最悪のパターンの一例であろう．

しかし，もしコンピュータが人間よりうまく証明ができるようになったとしても，それで数学者が不必要になるというわけではないだろう(17)．そうなったときには，数学者は，コンピュータと共同で数学の新しい結果を探求して，(人間が) 数学の結果をより深く理解するための，“人間が読める” (別) 証明は依然として数学者が工夫する，というような形での数学の研究のスタイルがスタンダードになってゆくのではないだろうか(18)．

実は，自動証明や，数学的計算(19)のプログラムはかなり実用的なものが，いくつかすでに我々の身近に揃っている．そのようなものを積極的に使うことで，上に述べたような研究のスタイルの先取り（の真似事？）は現在でも可能なように思える．これについて，現在，postdoctoral fellow として神戸大学の私の研究グループに属している Andrew Brooke-Taylor 氏と考察を初めているところである [1].

5　連続体問題は解決できる？

連続体仮説 (CH) の集合論からの (相対的) 独立性は，不完全性定理と直接関係するわけではないが，不完全性定理を背景としなければ，得られていなかった結果ではないかと思う．連続体仮説の解説は，日本に移住してからいやというほど色々なところに書いた (書かされた) ので，ここでは繰り返さないことにする(20)．

日本語版 wikipedia の「未解決問題」の 2012 年 1 月 4 日 (水) 版では，連続体仮説は,「近年解かれた問題」のリストの中に入っている(21)．連続体仮説が

(17) もちろん電卓がそろばんや計算尺を駆逐したのと同じような種類の淘汰はあるだろうが.

(18) 関係がないかもしれないが，もう 30 年近くも前に，私が最初の本格的な数学の論文を書いたとき，レフェリーに「証明はコンピュータが読むのではなく人間が読むことを頭において書くべきだ」という意味の御叱りを受けたことがあった．幸，書き直した次の版では，ずっと読みやすくなったことを同じレフェリーにほめてもらえたのだが.

(19)「数学」と「計算」がある場合には相反する概念でありえることは，強調しておく必要があるかもしれない．これは,「理学」と「工学」が相反する概念でありえる，ということの認識が一般になされていないように見えることと，相似の関係にあるようにも思える．

(20) たとえば，[3],[4],[5] を参照.

(21) 間違った理解の例として，度々日本語版の wikipedia を引用することになる，というのはちょっとやりきれない気もするのだが ⋯．ちなみに日本語版 wikipedia の「連続体仮説」2011 年 11 月 25 日 (金) 版の項目も，数学的内容はある程度の水準をクリアしているとは言えるかもしれないが，日本語がおかしいし，数学史，思想史的な記述には沢山間違いが含まれている．

参考文献

[1] アンドリュー ブルーク・テイラー，渕野 昌，既存のソフトウエアによる computer-assisted な数学の可能性について，in preparation.

[2] Sy David Friedman, Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On the set-generic multiverse, preprint.

[3] 渕野 昌，ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説，数学セミナー，Vol.37, No.05 (1998), 50–53. (この文章の改訂版は，日本評論社編: 20 世紀の予想，現代数学の軌跡 (2000) に再録されている．)

[4] 渕野 昌，ゲーデル以降の数学と数学基礎論，数学のたのしみ Vol.10, 2006 年秋号 (2006), 38–59.

[5] 渕野 昌，続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙(ユニヴァース), 現代思想，2007 年 2 月臨時増刊号 (2007), 94–116.

[6] David Hilbert and Paul Bernays, Grundlagen der Mathematik. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 50, Berlin, New York: Springer-Verlag (1939). (このテキストで問題にした箇所は，渕野と吉田の共訳による [6] の抄訳: 「数学の基礎」， シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1993/2007) にも訳出されている．)

[7] Alfred Tarski, What is elementary geometry?, in: Leon Henkin, Patrick Suppes and Alfred Tarski (eds.), The axiomatic method. With special reference to geometry and physics. Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland, (1959), 16–29.