Woodin の不完全性定理の証明

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

主な更新日: 14.01.15(水 23:34(JST)) 14.01.06(月 18:09(JST)) 13.12.27(金 19:47(JST))

2016 年 05 月 16 日 (14:36) 版

以下のノートは，2013 年 12 月 25 日の神戸ロジックコロキウムと，2013 年 12 月 26 日の神戸集合論セミナーでの講演と議論を整理したものである．特に，ここでの命題 3 の formulation は，25 日のコロキウムでの菊池誠氏のコメントに対する答になっている．以下の議論の大筋は Caisedo [1] が下敷になっているが，ここでの記述は意識的に Caisedo のそれよりずっと syntactical なものにしている．命題 6 は 26 日のセミナーで David Asperó 氏に教わったものである．

まず，Diagonal Lemma を ZFC での枠組で引用する．この補題の証明はここでは省略するが，最近 [2], pp.225–227 にかなり丁寧に書いたので，証明の細部を復習されたい方は参照されたい．$\mathcal{L}_\in$ で集合論の言語をあらわす．$\mathcal{L}_\in$ は二変数係記号 $\in$ のみからなる言語である．

diagonal-lemma

補題 1 (Diagonal Lemma) 任意の $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\psi = \psi(x)$ に対し，$\mathcal{L}_\in$-文 φ で，

(1) $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ diag-a-0

となるものが存在する. ❏

この補題は，(本物の) 各論理式 ψ に対する meta-theorem となっていることに注意する．また，この補題の証明では，ψ に対して (1) の性質を持つ φ を求めるためのアルゴリズムが与えられている．

論理のコーディングは，論理式 φ に対し $\ulcorner\varphi\urcorner$ は，“自然な” コーディングによる (自然数をあらわす) numeral となるように，選ばれているものとする．後で (ZFC の中で) $\langle M, E\rangle$ が ZFC のモデルになっている，という状況を考察することになるが，このとき，M の中での $\ulcorner\varphi\urcorner$ は ZFC での $\ulcorner\varphi\urcorner$ とは集合として異る可能性がある．しかし，各 $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ に対し，$\ulcorner\varphi\urcorner$ と M での $\ulcorner\varphi\urcorner$ とは一意に対応するので，同一視して使っても問題は起こらない．そこで，ここでは，明らかな場合には特に記号として区別しないことにする．これに対して，meta-mathematics での $\mathcal{L}_\in$-論理式の全体，ZFC などと ZFC の中での (自然数の集合としての) $\mathcal{L}_\in$-論理式 (に対応するゲーデル数) の全体，ZFC (の論理式に対応するゲーデル数の全体) などは，明確に区別する必要がある．そこで後者を，$\ulcorner\ulcorner Fml_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner$, $\ulcorner\ulcorner\mathsf{ZFC}\urcorner\urcorner$ などと表すことにする．

ZFC で，$M = \langle M, E\rangle$ が $M \models \ulcorner\ulcorner\mathsf{ZFC}\urcorner\urcorner$ を満たすとして，$m, e \in M$ を，

$$M \models \text{“}\langle m, e\rangle \text{ is a } \mathcal{L}_\in\text{-structure”}$$

となるものとする．このとき，

$$\text{(2)}\qquad m^* = \{x \in M : x\, E\, m\},$$
$$e^* = \{\langle x, y\rangle \in (m^*)^2 : M \models x\, e\, y\}$$

として $\mathcal{L}_\in$-構造 $m^* = \langle m^*, e^*\rangle$ を考える．このとき，次は ZFC の中での論理式 $\varphi \in \ulcorner\ulcorner Fml_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner$ の構成に関する帰納法で容易に示せる(1)：

star

補題 2 次の主張が ZFC で証明できる: $M = \langle M, E\rangle$ を $\mathcal{L}_\in$-構造で，$M \models \ulcorner\ulcorner\mathsf{ZFC}\urcorner\urcorner$ となるものとし，$m, e \in M$ を，$M \models$ “$\langle m, e\rangle$ is a $\mathcal{L}_\in$-structure” となるものとする．このとき任意の $\varphi \in \ulcorner\ulcorner Fml_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner$, $\varphi = \varphi(x_0, ...x_{n-1})$ と $a_0,..., a_{n-1} \in M$ で $M \models a_0, ..., a_{n-1} \in m$ となるものに対し，

$$\text{(3)}\qquad M \models \langle m, e\rangle \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \;\Leftrightarrow\; \langle m^*, e^*\rangle \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$

が成り立つ． ❑

任意の性質 $P(\cdot)$ に対し(2)，$P(\cdot)$ が hereditary である，ということを，

$$\text{(4)}\qquad \mathsf{ZFC} \vdash \forall M\,(P(M) \to M \models \ulcorner\ulcorner\mathsf{ZFC}\urcorner\urcorner)$$
$$\land\, \forall M \forall m\,((P(M) \land m \in M \land M \models P(m)) \to P(m^*))$$

が成り立つこと，と定義する．補題 2 により，すべての first order property $P(\cdot)$ で $\cdot \models \ulcorner\ulcorner\mathsf{ZFC}\urcorner\urcorner$ を imply するようなものはすべて hereditary である．

woodin

命題 3 (H. Woodin) $P(\cdot)$ を hereditary な性質とするとき，

$$\mathsf{ZFC} \vdash \forall M\,(P(M)$$
$$\to (M \models \forall m \neg P(m) \lor \exists m \in M(P(m^*) \land m^* \models \forall n \neg P(n))))$$

が成り立つ．

証明．

$$\text{(5)}\qquad \mathrm{Th}_P = \{\varphi \in \ulcorner\ulcorner Sent_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner : \forall N\,(P(N) \to N \models \varphi)\}$$ diag-a

とする．ここで Diagonal Lemma を用いて，$\mathcal{L}_\in$-文 η_P を，

$$\text{(6)}\qquad \mathsf{ZFC} \vdash \eta_P \leftrightarrow (\ulcorner\neg\eta_P\urcorner \in \mathrm{Th}_P)$$ diag-0

となるようにとる．

c-woodin-1

Claim 3.1 $\mathsf{ZFC} \vdash \exists N\, P(N) \to \exists N\,(P(N) \land N \models \eta_P)$.

(1) ここで，“ZFC の中での論理式 $\varphi \in \ulcorner\ulcorner Fml_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner$ の…” と断っているのは，φ は meta-mathematics でのオブジェクトとしての論理式ではなく，ZFC での自然数の集合 $\ulcorner\ulcorner Fml_{\mathcal{L}_\in}\urcorner\urcorner$ の要素としての論理式 (のゲーデル数) である，ということを強調するためである．特に，以下の 補題 2 は meta-theorem ではなく，ZFC の命題である．

(2) ここで，P が「性質」とは，P が meta-mathematics での (本物の) 1 変数論理式として表わせていることである．

$\vdash$ ZFC の中で議論する．$P(N)$ となる N をとる，もし $N \models \eta_P$ ならよい．もし $N \models \neg\eta_P$ なら，$N \not\models \eta_P$ である．したがって，$N \models$ ZFC となることと (6) から，$N \models \ulcorner\neg\eta_P\urcorner \notin \mathrm{Th}_P$ である．よって，(5) から，$n \in N$ で $N \models P(n) \wedge n \models \eta_P$ となるものが存在する．この n に対し，P が hereditary であることと 補題 2 から，$P(n^*) \wedge n^* \models \eta_P$ となる．$\dashv$ (Claim 3.1)

c-woodin-2

Claim 3.2 ZFC $\vdash \forall N\,(P(N) \wedge N \models \eta_P \rightarrow N \models \forall n \neg P(n))$.

$\vdash$ ZFC の中で議論する．$P(N) \wedge N \models \eta_P$ とする．このとき，$N \models \eta_P$ だから，$P(N)$ より $N \models$ ZFC となることと (6) から，$N \models \ulcorner\neg\eta_P\urcorner \in \mathrm{Th}_P$ である．したがって，

(7) $\quad N \models \forall n(P(n) \rightarrow n \models \neg\eta_P)$ diag-1

である．もし $N \models \exists n P(n)$ だったとすると，Claim 3.1 から $N \models \exists n(P(n) \wedge n \models \eta_P)$ となり，(7) に矛盾である．したがって，$N \models \forall n \neg P(n)$ が成り立っている． $\dashv$ (Claim 3.2)

以下も ZFC の中で議論する: $P(N)$ とする．$N \models \forall n \neg P(n)$ ならよい．そこで，そうでない，つまり，$N \models \exists n P(n)$ と仮定する．このとき，Claim 3.2 により $N \models \neg\eta_P$ つまり，$N \not\models \eta_P$ である．したがって，$N \models \ulcorner\ulcorner$ZFC$\urcorner\urcorner$ であることと，(6) から，$N \models \ulcorner\neg\eta_P\urcorner \notin \mathrm{Th}_P$ となり，$m \in N$ で $N \models P(m) \wedge m \models \eta_P$ となるものがある．このとき，P が hereditary であることと補題 2 から，$P(m^*)$ かつ $m^* \models \eta_P$ である．特に，$m^* \models \ulcorner\ulcorner$ZFC$\urcorner\urcorner$ だから，Claim 3.2 により，$m^* \models \forall n \neg P(n)$ である． ❑ (命題 3)

ZFC では完全性定理が成り立つので，

(8) $\quad$ ZFC $\vdash$ $consis$(ZFC) $\leftrightarrow \exists M\, M \models$ ZFC

である．また，$P(M)$ を，“$M \models$ ZFC である”，のこととすると P は補題 2 から hereditary である．以上から，次が直ちに導ける:

c-insane

系 4 (a) ZFC $\vdash \forall M\,(M \models$ ZFC $\rightarrow (M \models \neg consis$(ZFC) $\vee \exists m \in M\,(m^* \models$ ZFC $\wedge\, m^* \models \neg consis$(ZFC)))).

(b) ZFC $\vdash consis$(ZFC) $\rightarrow \exists M\,(M \models$ ZFC $\wedge\, M \models \neg consis$(ZFC)).

証明． (a): 命題 3 での $P(M)$ を “$M \models$ ZFC” として 命題 3 をこれに適用すればよい．(b): ZFC $\vdash consis$(ZFC) $\rightarrow \exists M\,(M \models$ ZFC) だから，(a) よりよい． ❑ (系 4)

上の系 4, (a) は，(拡大解釈して) 警句風に言えば,「すべての人 (ZFC のモデル) は，insane であるか，そうではないとしても，その心の中には insane な核をひそめている」と表現できなくもない．

ZFC に対する通常の意味の第 2 不完全性定理は，上の系の (b) から直ちに導ける:

incompleteness-thm

系 5 ZFC が無矛盾とすると，ZFC $\not\vdash consis$(ZFC) である．

証明． もし ZFC $\vdash consis$(ZFC) とすると，系 4, (b) により，

(9) $\quad$ ZFC $\vdash \exists M\,(M \models$ ZFC $\wedge\, M \models \neg consis$(ZFC)) diag-2

が成り立つ．ところが，$\mathcal{P}$ を $consis(\mathsf{ZFC})$ の ZFC からの証明とすると，$\mathcal{P}$ (に対応する M でのオブジェクト) は M での $consis(\mathsf{ZFC})$ の ZFC からの証明になっているので，$\mathsf{ZFC} \vdash \forall M\,(M \models \mathsf{ZFC} \rightarrow M \models consis(\mathsf{ZFC}))$ となり，このことと，(9) から，ZFC からの矛盾の証明が得られるが，これは ZFC が無矛盾であるという仮定に矛盾である． □ (系 5)

次は，系 4, (a) との対比で見るとより興味深い:

david

命題 6 $\mathsf{ZFC} \vdash \forall M\,(M \models \mathsf{ZFC} \rightarrow \exists m \in M(m^* \models \mathsf{ZFC}))$.

証明． ZFC の中で議論する: $consis(\mathsf{ZFC})$ が成り立つと仮定すると，$M \models \mathsf{ZFC}$ で M が ω-モデル (つまり $\omega^M \cong \omega$) なら，$\mathsf{ZFC} = \mathsf{ZFC}^M$ だから[3]，$M \models consis(\mathsf{ZFC})$ が成り立つので，$M \models m \models \mathsf{ZFC}$ となる $m \in M$ が存在するが，補題 2 により $m^* \models \mathsf{ZFC}$ である．そうでなければ，ω^M は non-standard number $n^\dagger$ を持つが，M での Lévy's Reflection Principle から，$M \models \exists m(m \models \{\varphi \in \mathsf{ZFC} : \ulcorner\varphi\urcorner < n^\dagger\})$ である．$m \in M$ をそのようなものの一つとすると，すべての $\varphi \in \mathsf{ZFC}$ に対して，$M \models \varphi \in \{\varphi \in \mathsf{ZFC} : \ulcorner\varphi\urcorner < n^\dagger\}$ だから，補題 2 により，$m^* \models \mathsf{ZFC}$ である．

もし $\neg consis(\mathsf{ZFC})$ なら, $\neg\exists M\,(M \models \mathsf{ZFC})$ だから, $\forall M\,(M \models \mathsf{ZFC} \rightarrow \exists m \in M(m^* \models \mathsf{ZFC}))$ は vacuouly に成り立つ． □ (命題 6)

上の証明で，$m^* \models \mathsf{ZFC}$ となる $m \in M$ は $M \models m \models \mathsf{ZFC}$ を必ずしも満たさないが，系 4 により，実際にこれは一般には不可能である．

命題 3 での $P(M)$ として，“$M \models$ “$\mathsf{ZFC} + consis(\mathsf{ZFC})$” ”, “$M \models$ “ZFC” $+ M$ is an ω-model”, “$M \models$ “ZFC” $+ M$ is transitive” などをとることで，更に面白い議論が可能である．

上の議論では，可算な言語に対する完全性定理があればできるので，このためには AC は必要なく，ZFC はすべて ZF で置き換えられる．またすべての recursive な $T \supseteq \mathsf{ZF}$ に対しても同様に議論できる．以上で集合論での応用として現れる第 2 不完全性定理はほぼ上の議論でカバーできることがわかったが，(可算な) 完全性定理の証明できる PA の conservative extension で議論することで，PA の recursive な拡張に対する通常の第 2 不完全性定理も上での議論により復元できる．

References

[1] Andés Caisedo, Woodin's proof of the Second Incompleteness Theorem for Set Theory, (2010).
`http://andrescaicedo.files.wordpress.com/2010/11/2ndincompleteness1.pdf`

[2] 渕野 昌，現代の視点からの数学の基礎付け， 付録 C in: リヒャルト・デデキント著，渕野昌 翻訳／解説，数とは何かそして何であるべきか，ちくま学芸文庫，(2013).

---

(3) 厳密には，これは,「任意の ν に対し $M \models \nu \in \mathsf{ZFC}$ なら $\varphi \in \mathsf{ZFC}$ で $\varphi^M = \nu$ となるものがある」 という主張である．