Transfer property としてのコンパクト性

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

(本スライドの pdf ファイルは上の web page にリンクされている／予定)

2009 年 1 月 9 日（金）

(January 16, 2009 (16:04) 版)

於 神戸大学

計算による数理科学の展開 2009

本スライドは pLaTeX + beamer class で作成されたものです.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある.

> 述語論理のコンパクト性定理 は有限と無限の間の
> 移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある.

述語論理のコンパクト性定理 は有限と無限の間の 移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある.

> 述語論理のコンパクト性定理は有限と無限の間の移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

"有限" と "無限" との間には（多層的に）密接な関係がある.

述語論理のコンパクト性定理 は有限と無限の間の 移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある.

述語論理のコンパクト性定理は有限と無限の間の移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある.

> 述語論理のコンパクト性定理 は有限と無限の間の
> 移行原理 (transfer principle) の一つでもある.

計算による数理科学の展開

有限のオブジェクト（+ 潜在的無限）の理論

（公理的）集合論

無限（集合）の理論

“有限” と “無限” との間には（多層的に）密接な関係がある．

述語論理のコンパクト性定理は有限と無限の間の移行原理 (transfer principle) の一つでもある．

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする.

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら, T 自身もモデルを持つ.

あるいは,（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら, T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する.

以下で, コンパクト性定理の応用の一つとして,（有限版）Ramsey 定理の, 無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする.

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする.

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら, T 自身もモデルを持つ.

あるいは,（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら, T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する.

以下で, コンパクト性定理の応用の一つとして, （有限版）Ramsey 定理の, 無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする.

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする．

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら， T 自身もモデルを持つ．

あるいは,（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら, T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する．

以下で，コンパクト性定理の応用の一つとして，（有限版）Ramsey 定理の， 無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする．

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする．

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら，T 自身もモデルを持つ．

あるいは,（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら，T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する．

以下で，コンパクト性定理の応用の一つとして，（有限版）Ramsey 定理の，無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする．

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする.

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら，T 自身もモデルを持つ.

あるいは,（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら，T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する.

以下で，コンパクト性定理の応用の一つとして，（有限版）Ramsey 定理の，無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする.

述語論理のコンパクト性定理

定理 1 (述語論理のコンパクト性定理)

T を述語論理での文（閉論理式）の集合とする．

T のすべての有限部分集合がモデルを持つなら，T 自身もモデルを持つ．

あるいは，（この対偶をとって）もし T がモデルを持たないなら，T の有限部分集合でモデルを持たないものが存在する．

以下で，コンパクト性定理の応用の一つとして，（有限版）Ramsey 定理の，無限版 Ramsey 定理からの導出 を見てみることにする．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (f に関する**一様集合** (*homogeneous set*)) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる}\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (f に関する**一様集合** *(homogeneous set)*) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの *(f* に関する**一様集合** *(homogeneous set))* が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (*f* に関する**一様集合** *(homogeneous set)*) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (*f* に関する**一様集合** *(homogeneous set)*) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (*f* に関する**一様集合** (*homogeneous set*)) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

有限版と無限版の Ramsey の定理

Notation: (1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ と同一視する．たとえば，$0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ である．

(2) X を集合とするとき，

$$[X]^2 = \{\{x_0, x_1\} : x_0, x_1 \in X \text{ で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ は異なる }\}$$

とする．$(X, [X]^2)$ は，X を頂点の集合，$[X]^2$ を辺の集合とする complete graph と見ることができる．

定理 2 (Ramsey の定理（有限版）)

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$r(n) \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する: すべての $m \geq r(n)$ と $f : [m]^2 \to 2$ に対し，サイズが n 以上の $X \subseteq m$ で，f が $[X]^2$ 上で *constant* になるもの (f に関する**一様集合** (*homogeneous set*)) が存在する．

定理 3 (Ramsey の定理（無限版）)

すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 *constant* になるものが存在する．

対偶命題を示す．有限版の Ramsey の定理が成り立たないとする．
このとき，$n \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する:

(*) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$f_m : [m]^2 \to 2$ で，すべてのサイズ n の $X \subseteq m$ に対し，f_m は $[X]^2$ で constant でないものが存在する．

ここで次のような閉論理式からなる T を考える．

$$\forall x \forall y (C(x,y) = 0 \vee C(x,y) = 1), \quad \forall x \forall y (C(x,y) = C(y,x)),$$

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \Big(\bigwedge_{i \neq j,\, i,j<n} x_i \neq x_j \ \to \ \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i,x_j) = 0 \wedge \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i,x_j) = 1 \Big),$$

$$c_i \neq c_j \quad (i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$$

T の任意の有限部分集合は，十分に大きな m と (*) でのような f_m によって解釈できるから，コンパクト性定理により，T はモデルを持つが，T のモデルを c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈に制限したものは，無限版の Ramsey の定理の反例となっている．$\square$

無限版の Ramsey の定理からの有限版の証明

対偶命題を示す．有限版の Ramsey の定理が成り立たないとする．
このとき，$n \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する:

(*) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$f_m : [m]^2 \to 2$ で，すべてのサイズ n の $X \subseteq m$ に対し，f_m は $[X]^2$ で constant でないものが存在する．

ここで次のような閉論理式からなる T を考える．

$$\forall x \forall y (C(x,y) = 0 \vee C(x,y) = 1), \quad \forall x \forall y (C(x,y) = C(y,x)),$$

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \Big(\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i \neq j,\, i,j<n} x_i \neq x_j \ \to \ \bigvee\!\!\!\bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 0 \wedge \bigvee\!\!\!\bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 1 \Big),$$

$$c_i \neq c_j \quad (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$$

T の任意の有限部分集合は，十分に大きな m と (*) でのような f_m によって解釈できるから，コンパクト性定理により，T はモデルを持つが，T のモデルを c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈に制限したものは，無限版の Ramsey の定理の反例となっている．□

無限版の Ramsey の定理からの有限版の証明

対偶命題を示す．有限版の Ramsey の定理が成り立たないとする．このとき，$n \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する:

(*) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$f_m : [m]^2 \to 2$ で，すべてのサイズ n の $X \subseteq m$ に対し，f_m は $[X]^2$ で constant でないものが存在する．

ここで次のような閉論理式からなる T を考える．

$$\forall x \forall y (C(x,y) = 0 \vee C(x,y) = 1), \quad \forall x \forall y (C(x,y) = C(y,x)),$$

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \Big(\bigwedge_{i \neq j,\, i,j<n} x_i \neq x_j \;\to\; \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 0 \wedge \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 1 \Big),$$

$$c_i \neq c_j \quad (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$$

T の任意の有限部分集合は，十分に大きな m と (*) でのような f_m によって解釈できるから，コンパクト性定理により，T はモデルを持つが，T のモデルを c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈に制限したものは，無限版の Ramsey の定理の反例となっている． □

対偶命題を示す．有限版の Ramsey の定理が成り立たないとする．このとき，$n \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する:

(*) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$f_m : [m]^2 \to 2$ で，すべてのサイズ n の $X \subseteq m$ に対し，f_m は $[X]^2$ で constant でないものが存在する．

ここで次のような閉論理式からなる T を考える．

$$\forall x \forall y (C(x,y) = 0 \vee C(x,y) = 1), \quad \forall x \forall y (C(x,y) = C(y,x)),$$

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \Big(\bigwedge_{i \neq j,\, i,j<n} x_i \neq x_j \;\; \rightarrow \\ \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 0 \wedge \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 1 \Big),$$

$$c_i \neq c_j \;\; (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$$

T の任意の有限部分集合は，十分に大きな m と (*) でのような f_m によって解釈できるから，コンパクト性定理により，T はモデルを持つが，T のモデルを c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈に制限したものは，無限版の Ramsey の定理の反例となっている． □

無限版の Ramsey の定理からの有限版の証明

対偶命題を示す．有限版の Ramsey の定理が成り立たないとする．このとき，$n \in \mathbb{N}$ で，次を満たすものが存在する:

(*) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$f_m : [m]^2 \to 2$ で，すべてのサイズ n の $X \subseteq m$ に対し，f_m は $[X]^2$ で constant でないものが存在する．

ここで次のような閉論理式からなる T を考える．

$$\forall x \forall y (C(x,y) = 0 \vee C(x,y) = 1), \quad \forall x \forall y (C(x,y) = C(y,x)),$$

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \Big(\bigwedge_{i \neq j,\, i,j < n} x_i \neq x_j \ \to \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 0 \wedge \bigvee_{i \neq j,\, i,j<n} C(x_i, x_j) = 1 \Big),$$

$$c_i \neq c_j \quad (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$$

T の任意の有限部分集合は，十分に大きな m と (*) でのような f_m によって解釈できるから，コンパクト性定理により，T はモデルを持つが，T のモデルを c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈に制限したものは，無限版の Ramsey の定理の反例となっている． $\square$

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f:[\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明． $f:[\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0,\ S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n,\ n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N},\ f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． $\square$

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明． $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明. $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている．□

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明. $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明. $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0,\ S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n,\ n' \in S_{k+1}$ に対し，$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N},\ f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明． $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明． $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N},\ f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明. $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0,\ S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N},\ f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明. $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

無限版 Ramsey の定理の証明

Ramsey の定理（無限版） すべての $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ に対し，無限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ で，f が $[X]^2$ 上 constant になるものが存在する．

証明． $f : [\mathbb{N}]^2 \to 2$ が与えられたとき，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) \in \mathbb{N}$ と無限集合 $S_k \subseteq \mathbb{N}$ を以下を満たすように inductive にとる:

(1) $h(0) = 0$, $S_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(2) $h(0) < h(1) < h(2) < \cdots$;

(3) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$;

(4) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k) < \min S_k$;

(5) すべての $m \leq k$ と $n, n' \in S_{k+1}$ に対し，
$f(h(m), n) = f(h(m), n')$;

(6) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$h(k+1) \in S_{k+1}$.

ここで，$i_0 \in 2$ を $\{k \in \mathbb{N} : f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ が無限集合になるように選ぶと，$X = \{h(k) : k \in \mathbb{N}, f(h(k), h(k-1)) = i_0\}$ は求めるようなものとなっている． □

注意

- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明には，実は 命題論理のコンパクト性定理 で十分である．
- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明と本質的に同じ議論で，Paris と Harrington による有限版の Ramsey の定理の拡張も証明できる．

  有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系から証明できるのに対し，Paris と Harrington による Ramsey の定理の拡張では，対応する関数 $r(n)$ の存在がペアノの公理系からは証明できない．

- 有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系で $n \in \mathbb{N}$ に対し最小の $r(n)$ を与える関数の値は $n = 5$ のとき何になるか未解決である．($43 \leq r(n) \leq 49$)

注意

- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明には，実は **命題論理のコンパクト性定理** で十分である．
- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明と本質的に同じ議論で，Paris と Harrington による有限版の Ramsey の定理の拡張も証明できる．

  有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系から証明できるのに対し，Paris と Harrington による Ramsey の定理の拡張では，対応する関数 $r(n)$ の存在がペアノの公理系からは証明できない．
- 有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系で $n \in \mathbb{N}$ に対し最小の $r(n)$ を与える関数の値は $n = 5$ のとき何になるか未解決である．$(43 \leq r(n) \leq 49)$

注意

- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明には，実は **命題論理のコンパクト性定理** で十分である．
- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明と本質的に同じ議論で，Paris と Harrington による有限版の Ramsey の定理の拡張も証明できる．

  有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系から証明できるのに対し，Paris と Harrington による Ramsey の定理の拡張では，対応する関数 $r(n)$ の存在がペアノの公理系からは証明できない．

- 有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系で $n \in \mathbb{N}$ に対し最小の $r(n)$ を与える関数の値は $n = 5$ のとき何になるか未解決である．$(43 \leq r(n) \leq 49)$

注意

- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明には，実は 命題論理のコンパクト性定理 で十分である．
- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明と本質的に同じ議論で，Paris と Harrington による有限版の Ramsey の定理の拡張も証明できる．

  有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系から証明できるのに対し，Paris と Harrington による Ramsey の定理の拡張では，対応する関数 $r(n)$ の存在がペアノの公理系からは証明できない．

- 有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系で $n \in \mathbb{N}$ に対し最小の $r(n)$ を与える関数の値は $n = 5$ のとき何になるか未解決である．$(43 \leq r(n) \leq 49)$

注意

- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明には，実は **命題論理のコンパクト性定理** で十分である．
- 有限版の Ramsey の定理の無限版からの証明と本質的に同じ議論で，Paris と Harrington による有限版の Ramsey の定理の拡張も証明できる．

  有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系から証明できるのに対し，Paris と Harrington による Ramsey の定理の拡張では，対応する関数 $r(n)$ の存在がペアノの公理系からは証明できない．

- 有限版の Ramsey の定理がペアノの公理系で $n \in \mathbb{N}$ に対し最小の $r(n)$ を与える関数の値は $n = 5$ のとき何になるか未解決である．$(43 \leq r(n) \leq 49)$

非可算無限へ

有限と無限の間に成り立っているものと類似のコントラストや移行原理は，異なる無限の大きさ（濃度）の間でも成り立つのだろうか？

以下で，位相空間の 距離付け可能性 (metrizability) に関する移行原理の成立／非成立 に関して，異なる無限の大きさ（濃度）の間で起っている状況を見てみることにする．

非可算無限へ

有限と無限の間に成り立っているものと類似のコントラストや移行原理は，異なる無限の大きさ（濃度）の間でも成り立つのだろうか？

以下で，位相空間の **距離付け可能性 (metrizability) に関する移行原理の成立／非成立** に関して，異なる無限の大きさ（濃度）の間で起っている状況を見てみることにする．

非可算無限へ

有限と無限の間に成り立っているものと類似のコントラストや移行原理は，異なる無限の大きさ（濃度）の間でも成り立つのだろうか？

以下で，位相空間の **距離付け可能性 (metrizability) に関する移行原理の成立／非成立** に関して，異なる無限の大きさ（濃度）の間で起っている状況を見てみることにする．

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数 非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度 ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数 正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で正則基数となるものの存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1$, $\aleph_2$,... より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数 非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度 ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数 正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で正則基数となるものの存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数
正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数 非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度 ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数 正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で正則基数となるものの存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数 非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度 ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数 正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数 ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で正則基数となるものの存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数

非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度

($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数

正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数

($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で

正則基数となるものの

存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1$, $\aleph_2$,... より大きい基数のうち最小のもの ← 極限基数 非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの ← 非極限基数 正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

無限基数

$\vdots$

$\aleph_{\omega+1}$:$\aleph_\omega$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_\omega$:$\aleph_1$, $\aleph_2$, . . . より大きい基数のうち最小のもの

← 極限基数
非正則基数

$\vdots$

$2^{\aleph_0}$: 連続体濃度
($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. の濃度)

$\aleph_2$:$\aleph_1$ より大きい基数のうち最小のもの

← 非極限基数
正則基数

$\aleph_1$:$\aleph_0$ より大きい基数のうち最小のもの

$\aleph_0$:可算集合の基数
($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の濃度)

極限基数で
正則基数となるものの
存在は集合論から独立である

距離付け可能性の移行原理

定理 4 (A. Hajnal and I. Juhász, 1976)

すべての正則基数 κ に対し，濃度が κ の距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 5 (A. Dow, 1988)

countably compact な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

定理 6 (Z. Balogh, 2002)

Axiom R を仮定する．このとき *locally countably compact* な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

距離付け可能性の移行原理

定理 4 (A. Hajnal and I. Juhász, 1976)

すべての正則基数 κ に対し，濃度が κ の距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 5 (A. Dow, 1988)

countably compact な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

定理 6 (Z. Balogh, 2002)

Axiom R を仮定する．このとき *locally countably compact* な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

距離付け可能性の移行原理

定理 4 (A. Hajnal and I. Juhász, 1976)

すべての正則基数 κ に対し，濃度が κ の距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 5 (A. Dow, 1988)

countably compact な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の 部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

定理 6 (Z. Balogh, 2002)

Axiom R を仮定する．このとき *locally countably compact* な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

距離付け可能性の移行原理

定理 4 (A. Hajnal and I. Juhász, 1976)

すべての正則基数 κ に対し，濃度が κ の距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 5 (A. Dow, 1988)

countably compact な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

定理 6 (Z. Balogh, 2002)

Axiom R を仮定する．このとき *locally countably compact* な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

距離付け可能性の移行原理

定理 4 (A. Hajnal and I. Juhász, 1976)

すべての正則基数 κ に対し，濃度が κ の距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する.

定理 5 (A. Dow, 1988)

countably compact な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である.

定理 6 (Z. Balogh, 2002)

Axiom R を仮定する．このとき *locally countably compact* な位相空間 X について，濃度が $\leq \aleph_1$ のすべての X の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である.

距離付け可能性の移行原理（最近の結果）

定理 7 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

ゲーデルの構成的宇宙で成り立つ組み合せ論的原理の一つを仮定すると，すべての非極限基数 κ に対し，濃度が κ の *locally compact* な距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 8 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

Balogh の結果での *Axiom R* の仮定は，本質的に弱めることができる．特に，*Balogh* の結果での命題は，連続体のサイズに対して何の制約も果さないことが示せる（これに対して *Axiom R* は $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ を導くことが知られている）．

距離付け可能性の移行原理（最近の結果）

定理 7 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

ゲーデルの構成的宇宙で成り立つ組み合せ論的原理の一つを仮定すると，すべての非極限基数 κ に対し，濃度が κ の *locally compact* な距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 8 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

Balogh の結果での *Axiom R* の仮定は，本質的に弱めることができる．特に，*Balogh* の結果での命題は，連続体のサイズに対して何の制約も果さないことが示せる（これに対して *Axiom R* は $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ を導くことが知られている）．

距離付け可能性の移行原理（最近の結果）

定理 7 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

ゲーデルの構成的宇宙で成り立つ組み合せ論的原理の一つを仮定すると，すべての非極限基数 κ に対し，濃度が κ の *locally compact* な距離付け可能でない位相空間 X で，X の濃度が κ 未満のすべての部分空間は距離付け可能であるようなものが存在する．

定理 8 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

Balogh の結果での *Axiom R* の仮定は，本質的に弱めることができる．特に，*Balogh* の結果での命題は，連続体のサイズに対して何の制約も果さないことが示せる（これに対して *Axiom R* は $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ を導くことが知られている）．

距離付け可能性の移行原理（最近の結果 (2)）

定理 9 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

通常の集合論の公理系のみから以下が証明できる: κ を特異基数（例えば $\aleph_\omega$）とするとき，濃度が κ の *locally countably compact* な位相空間 X に対し，X の濃度が κ 未満の部分空間が常に距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

注意． 群（アーベル群）は，“自由群である”（“自由アーベル群である”），という性質に関して，上と同じような移行原理を満たすことが知られている

（$\rightarrow$ Shelah Singular Compactness Theorem (1975)）．

距離付け可能性の移行原理（最近の結果 (2)）

定理 9 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

通常の集合論の公理系のみから以下が証明できる: κ を特異基数（例えば $\aleph_\omega$）とするとき，濃度が κ の *locally countably compact* な位相空間 X に対し，X の濃度が κ 未満の部分空間が常に距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である.

注意. 群（アーベル群）は，“自由群である”（“自由アーベル群である”），という性質に関して，上と同じような移行原理を満たすことが知られている

（→ Shelah Singular Compactness Theorem (1975)）.

距離付け可能性の移行原理（最近の結果 (2)）

定理 9 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

通常の集合論の公理系のみから以下が証明できる: κ を特異基数（例えば $\aleph_\omega$）とするとき，濃度が κ の *locally countably compact* な位相空間 X に対し，X の濃度が κ 未満の部分空間が常に距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である.

注意. 群（アーベル群）は，“自由群である”（“ 自由アーベル群である”），という性質に関して，上と同じような移行原理を満たすことが知られている

（$\rightarrow$ Shelah Singular Compactness Theorem (1975)）.

距離付け可能性の移行原理（最近の結果 (2)）

定理 9 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, 200?)

通常の集合論の公理系のみから以下が証明できる: κ を特異基数（例えば $\aleph_\omega$）とするとき，濃度が κ の *locally countably compact* な位相空間 X に対し，X の濃度が κ 未満の部分空間が常に距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である.

注意. 群（アーベル群）は，“自由群である”（“自由アーベル群である”），という性質に関して，上と同じような移行原理を満たすことが知られている

（$\rightarrow$ Shelah Singular Compactness Theorem (1975)）.

まとめ

- 述語論理（あるいは命題論理）のコンパクト性定理が有限と無限の間の移行原理としてとらえられることを見た．
- 位相空間の距離付け可能性に関して，異なる無限の大きさの間で同様の移行原理の成立／非成立を示す結果を俯瞰した．
- いくつかの結果では，集合論の通常の公理系から独立した命題が得られ，この種の移行原理の成立／非成立が集合論的に非常にデリケートな問題であることが窺われた．
- 特異基数では，群やアーベル群の自由性に関して知られているのと同種の移行原理が locally countably compact な位相空間の距離付け可能性に対して成り立つことが示せた．

まとめ

- 述語論理（あるいは命題論理）のコンパクト性定理が有限と無限の間の移行原理としてとらえられることを見た．
- 位相空間の距離付け可能性に関して，異なる無限の大きさの間で同様の移行原理の成立／非成立を示す結果を俯瞰した．
- いくつかの結果では，集合論の通常の公理系から独立した命題が得られ，この種の移行原理の成立／非成立が集合論的に非常にデリケートな問題であることが窺われた．
- 特異基数では，群やアーベル群の自由性に関して知られているのと同種の移行原理が locally countably compact な位相空間の距離付け可能性に対して成り立つことが示せた．

まとめ

- 述語論理（あるいは命題論理）のコンパクト性定理が有限と無限の間の移行原理としてとらえられることを見た.
- 位相空間の距離付け可能性に関して，異なる無限の大きさの間で同様の移行原理の成立／非成立を示す結果を俯瞰した.
- いくつかの結果では，集合論の通常の公理系から独立した命題が得られ，この種の移行原理の成立／非成立が集合論的に非常にデリケートな問題であることが窺われた.
- 特異基数では，群やアーベル群の自由性に関して知られているのと同種の移行原理が locally countably compact な位相空間の距離付け可能性に対して成り立つことが示せた.

まとめ

- 述語論理（あるいは命題論理）のコンパクト性定理が有限と無限の間の移行原理としてとらえられることを見た．
- 位相空間の距離付け可能性に関して，異なる無限の大きさの間で同様の移行原理の成立／非成立を示す結果を俯瞰した．
- いくつかの結果では，集合論の通常の公理系から独立した命題が得られ，この種の移行原理の成立／非成立が集合論的に非常にデリケートな問題であることが窺われた．
- 特異基数では，群やアーベル群の自由性に関して知られているのと同種の移行原理が locally countably compact な位相空間の距離付け可能性に対して成り立つことが示せた．

まとめ

- 述語論理（あるいは命題論理）のコンパクト性定理が有限と無限の間の移行原理としてとらえられることを見た．
- 位相空間の距離付け可能性に関して，異なる無限の大きさの間で同様の移行原理の成立／非成立を示す結果を俯瞰した．
- いくつかの結果では，集合論の通常の公理系から独立した命題が得られ，この種の移行原理の成立／非成立が集合論的に非常にデリケートな問題であることが窺われた．
- 特異基数では，群やアーベル群の自由性に関して知られているのと同種の移行原理が locally countably compact な位相空間の距離付け可能性に対して成り立つことが示せた．

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は，以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,

Zoltán Szentmiklóssy

Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は，以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,

Zoltán Szentmiklóssy

Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は，以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,
Zoltán Szentmiklóssy
Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は, 以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,
Zoltán Szentmiklóssy
Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は，以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,
Zoltán Szentmiklóssy
Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

共著者と出典

ここで述べた新しい結果は，以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász,
Lajos Soukup,

Zoltán Szentmiklóssy

Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

[1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness*, submitted.

[2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所講究録.

[3] S. Fuchino, H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

一つまえのスライドの文献表での [1] の研究は，2008 年 6 月シシリア島のエリチェで開催された国際学会 “Advances in Set-Theoretic Topology” での，Lajos Soukup とのディスカッションが発端となって始められた．[1] はこの学会の proceedings に投稿中である．この写真は，エリチェの街並と雲の下に垣間見える下界を，学会会場の建物のバルコニーからとったものである．

想定内の質問が出た場合の番外ページ

- 位相空間 X のすべての有限部分空間が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は T_1
- X が first countable で，X のすべての可算な部分空間が距離付け可能 $\Rightarrow$ X は Hausdorff
- compact で first countable な 位相空間 X で，すべての可算な部分空間が距離付け可能だが，それ自身は距離付け可能でないようなものが存在する（たとえば，$\omega_1 + 1$ を順序位相で考えたもの）

このことから，Dow の定理や Balogh の定理で，“濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間は常に距離付け可能” は最良の条件となっていることがわかる．

想定内の質問が出た場合の番外ページ

- 位相空間 X のすべての有限部分空間が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は T_1
- X が first countable で，X のすべての可算な部分空間が距離付け可能 $\Rightarrow$ X は Hausdorff
- compact で first countable な 位相空間 X で，すべての可算な部分空間が距離付け可能だが，それ自身は距離付け可能でないようなものが存在する（たとえば，$\omega_1 + 1$ を順序位相で考えたもの）

このことから，Dow の定理や Balogh の定理で，“濃度 $\le \aleph_1$ の部分空間は常に距離付け可能” は最良の条件となっていることがわかる．

想定内の質問が出た場合の番外ページ

- 位相空間 X のすべての有限部分空間が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は T_1
- X が first countable で，X のすべての可算な部分空間が距離付け可能 $\Rightarrow$ X は Hausdorff
- compact で first countable な 位相空間 X で，すべての可算な部分空間が距離付け可能だが，それ自身は距離付け可能でないようなものが存在する（たとえば，$\omega_1 + 1$ を順序位相で考えたもの）

このことから，Dow の定理や Balogh の定理で，"濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間は常に距離付け可能" は最良の条件となっていることがわかる．

想定内の質問が出た場合の番外ページ

- 位相空間 X のすべての有限部分空間が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は T_1
- X が first countable で，X のすべての可算な部分空間が距離付け可能 $\Rightarrow$ X は Hausdorff
- compact で first countable な 位相空間 X で，すべての可算な部分空間が距離付け可能だが，それ自身は距離付け可能でないようなものが存在する（たとえば，$\omega_1 + 1$ を順序位相で考えたもの）

このことから，Dow の定理や Balogh の定理で，“濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間は常に距離付け可能” は最良の条件となっていることがわかる．

想定内の質問が出た場合の番外ページ

- 位相空間 X のすべての有限部分空間が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は T_1
- X が first countable で，X のすべての可算な部分空間が距離付け可能 $\Rightarrow$ X は Hausdorff
- compact で first countable な 位相空間 X で，すべての可算な部分空間が距離付け可能だが，それ自身は距離付け可能でないようなものが存在する（たとえば，$\omega_1 + 1$ を順序位相で考えたもの）

このことから，Dow の定理や Balogh の定理で，“濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間は常に距離付け可能” は最良の条件となっていることがわかる．

想定内の質問が出た場合の番外ページ (2)

Lemma 10

すべての κ に対して，濃度 $< \kappa$ の部分空間がすべて距離付け可能だが，*countably tight* でない（したがって *first countable* でなく，距離付け可能でもない）ような空間が存在する．

定理 11 (A. Dow, F. Tall and W. Weiss, 1990)

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $< 2^{\aleph_0}$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しない．

Open Problem 1

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しないか？

想定内の質問が出た場合の番外ページ (2)

Lemma 10

すべての κ に対して，濃度 $< \kappa$ の部分空間がすべて距離付け可能だが，*countably tight* でない（したがって *first countable* でなく，距離付け可能でもない）ような空間が存在する．

定理 11 (A. Dow, F. Tall and W. Weiss, 1990)

"*first countable* な位相空間 X の濃度 $< 2^{\aleph_0}$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である" は集合論と矛盾しない．

Open Problem 1

"*first countable* な位相空間 X の濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である" は集合論と矛盾しないか？

想定内の質問が出た場合の番外ページ (2)

Lemma 10

すべての κ に対して，濃度 $< \kappa$ の部分空間がすべて距離付け可能だが，*countably tight* でない（したがって *first countable* でなく，距離付け可能でもない）ような空間が存在する．

定理 11 (A. Dow, F. Tall and W. Weiss, 1990)

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $< 2^{\aleph_0}$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しない．

Open Problem 1

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しないか？

想定内の質問が出た場合の番外ページ (2)

Lemma 10

すべての κ に対して，濃度 $< \kappa$ の部分空間がすべて距離付け可能だが，*countably tight* でない（したがって *first countable* でなく，距離付け可能でもない）ような空間が存在する．

定理 11 (A. Dow, F. Tall and W. Weiss, 1990)

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $< 2^{\aleph_0}$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しない．

Open Problem 1

“*first countable* な位相空間 X の濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間がすべて距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である” は集合論と矛盾しないか？