Forcing Axioms と連続体問題

— 公理的集合論の最近の話題から

渕野 昌[*1]

本稿では公理的集合論の最近の動向の一端について forcing axioms とその特徴付けに焦点をあてて述べてみようと思う．読者としては，集合論を専門としない一般の数学者や数学科の学生を想定している．学部や大学院で公理的集合論が講義されることはほとんどない，という日本での特殊な状況を配慮して，できるだけ初等的で自己充足的な説明になるよう心掛けたつもりである．また，公理的集合論での集合に関する記法（の方言）は，他の数学での集合に関する記法と微妙に異なることがあるため，そのような場合，できるかぎり記号の意味を説明するよう心掛けた．公理的集合論の初歩の知識のある読者には，これは逆に煩雑に思えるかもしれない．

紙数の制約上，特に後半では証明はほとんど割愛せざるを得なかった．議論の細部に興味のある方は，文末の参考文献を参照されたい．

以下の第 1 節では，位相空間の概念を用いた定式化によりマルティンの公理を導入し，マルティンの公理と，マルティンの公理とは矛盾するような他の公理（ゲーデルの構成可能性公理など）による，数学的命題の集合論の公理系からの独立性の証明について述べる．

第 2 節で forcing （強制法）についての基礎的な事項について概観した後，第 3 節で forcing の概念を用いたマルティンの公理の定式化を与える．第 4 節では，forcing による generic 拡大に対するある種の絶対性を表明する命題としての，筆者によるマルティンの公理の特徴付けと，Bagaria による特徴付けについて考察する．最後の第 5 節では，マルティンの公理をさらに強めてできるいくつかの公理に関して知られている最近の結果について触れる．

本稿のサブタイトルについて一言.「数学」の編集部からの依頼は，公理的集合論の最近の動向についての概説，ということであったが，公理的集合論の前線は非常に活発で，研究テーマも多岐にわたるので，とても本稿のような規模の概説 1 つ

[*1] 中部大学 工学部 理学教室．fuchino@isc.chubu.ac.jp
「数学」，Vol.56, No.3 (2004) に掲載予定.

でカバーできるものではない．本誌の集合論に関する最近の論説には，松原 洋氏による [21] もあるが，実数の集合論に関する最近の研究結果や，無限組合せ論での様々な結果，内部モデルの理論や pcf 理論や巨大基数の集合論など，本稿と松原氏の論説の両方でカバーできていないテーマはまだ沢山ある[*2]．そういうわけで，サブタイトルの “公理的集合論の最近の話題から” は，あくまでも “そのような話題のうちの 1 つ” という意味に解釈していただきたい．公理的集合論の他の現代的なテーマについても，非専門家向けの日本語の解説が多く書かれることを望むものである．

なお非専門家向けの文章ということもあり，本稿の原稿は何人もの方に目を通していただいた．特に，高田 正之，阿部 吉弘，松原 洋，依岡 輝幸，宮元 忠敏の各氏，および，本稿のレフェリーからは，貴重な示唆や誤殖の指摘を多数いただいた．ここに感謝の意を表したい．

1 マルティンの公理

マルティンの公理には，互いに同値な定式化がいくつも知られているが，本節ではまず，位相空間に関する命題としての定式化を見てみることにする．

位相空間 $X = (X, \mathcal{O})$ が c.c.c. (countable chain condition) を満たすとは，互いに素な[*3]開集合の族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ が常に可算になることとする．$X = (X, \mathcal{O})$ が c.c.c. を満たすことは X が Lindelöf の性質を満たすことと一見酷似した次の性質を持つことと同値である：任意の $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ について $\bigcup \mathcal{F}$ が X で稠密なら，可算な $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ で $\bigcup \mathcal{F}'$ が X で稠密となるようなものが存在する[*4]．

これらの用語を用いると，マルティンの公理 (Martin's Axiom — 以下 MA と

[*2] 実数の集合論については，たとえば [3] を参照されたい．pcf 理論は Shelah [26] により導入された理論であるが，一般向きの教科書としては [13] がある．巨大基数の集合論については [16] を参照されたい．無限組合せ論は無数の結果があり，集合論の他の分野とのオーバーラップも大きいため一冊の教科書ではカバーできないが，その概要は [18] や [14] で見ることができる．内部モデルの理論は，古典的な理論については，[6] で学べる．内部モデルの理論の最近の発展については，[19], [30] などが参考になると思う．内部モデルの理論を含め集合論全般に関する記述は [17] や [15] でも見いだせることになるはずである．

[*3] $\mathcal{F}$ （の要素）が互いに素とは，異なる $O_0, O_1 \in \mathcal{F}$ に対し常に $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ が成り立つことである．

[*4] 集合族 $\mathcal{F}$ に対し，たとえば，$\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ のとき，$\bigcup \mathcal{F}$ で $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ を表し，$\bigcap \mathcal{F}$ で $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ を表す．たとえば，$\mathcal{F} = \{a, b\}$ のときには，$\bigcup \mathcal{F} = a \cup b$, $\bigcap \mathcal{F} = a \cap b$ である．

略す) は，次のように表すことができる：

(MA)　すべての c.c.c. を満たすコンパクト・ハウスドルフ空間 $X = (X, \mathcal{O})$ に対し，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ が X の稠密開集合の族で，$|\mathcal{F}| < 2^{\aleph_0}$ なら，$\mathcal{F}$ の共通部分 $\bigcap \mathcal{F}$ は空集合でない．

ここに，$|\mathcal{F}|$ は $\mathcal{F}$ の濃度（集合の大きさ）を表す．つまり，$\mathcal{F}$ を添字集合を用いて $\mathcal{F} = \{O_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ と重複を許さず枚挙したときの添字集合 Λ の大きさである．また，$2^{\aleph_0}$ は実数体の濃度である[*5]．つまり，$|\mathcal{F}| < 2^{\aleph_0}$ は $\mathcal{F}$ が実数の全体の個数より少ない "数" の要素からなる集合族であることを表している（$\bigcap \mathcal{F}$ については，脚注 *4 を参照されたい）．

連続体仮説 (CH) は $2^{\aleph_0}$ が $\aleph_1$ （最小の非可算の基数 — つまり非可算集合のサイズのうち最小のもの[*6]）と一致するという主張だったから，CH のもとでは，条件 "$|\mathcal{F}| < 2^{\aleph_0}$" は "$\mathcal{F}$ は可算である" ということと同値になる．したがって，ベールの定理により，このときには MA が成り立つことがわかる．次節でその概略を述べることになる forcing を用いると次が示せる：

定理 1 (Martin–Solovay [20], 現代的な記法による証明は，たとえば [18] を参照されたい) ZFC に連続体仮説の否定 ($\neg$CH) と MA を付け加えて得られる公理系[*7]は，ZFC と無矛盾等価である．

ここに ZFC は（選択公理を含む）集合論の公理系を表す．ある公理系 T と他の公理系 T' が無矛盾等価 (equiconsistent) とは，T の無矛盾性を仮定すると T' の無矛盾性が示せ，逆も成り立つことである．ここでは，ZFC + $\neg$CH + MA の無矛盾性から，その一部である ZFC の無矛盾性が導けることは明らかなので，ZFC の無矛盾性から ZFC + $\neg$CH + MA の無矛盾性が導けることがポイントで，この部分の証明に後述の forcing が用いられる．定理 1 の主張は，"$\neg$CH + MA は ZFC

---

*5 集合論では $\mathbb{N}$ を無限順序数として見るときに ω または ω_0 で表し，無限基数として見るとき $\aleph_0$ と書く．ω や ω_0 は他の分野では別の意味で固定して使われることも多いので，注意が必要であろう．ちなみに，一般に 2^κ は，基数 κ のべき集合 $\mathcal{P}(\kappa)$ の濃度を表す．したがって $2^{\aleph_0}$ は $\aleph_0$ のべき集合 $\mathcal{P}(\aleph_0)$ の濃度 $|\mathcal{P}(\aleph_0)|$ を表すが，$\mathcal{P}(\aleph_0)$ と $\mathbb{R}$ との間には自然な一対一対応を考えることができるので, $|\mathcal{P}(\aleph_0)| = |\mathbb{R}|$ である．

*6 同様に，$\aleph_2$ を $\aleph_1$ の次の無限基数，$\aleph_3$ をその次の無限基数， ... 等とする．

*7 以下ではこの公理系を ZFC + $\neg$CH + MA と書くことにする．

上無矛盾である”，と表現されることもある[*8]．

他方，MA は，ZFC からは導くことはできない．たとえば，後述のコーエン・モデルでは，マルティンの公理は成り立たないことが示せる．つまり，“MA は ZFC から独立である”．$\neg$CH + MA からの帰結である次の公理が用いられることも多い：

($\mathrm{MA}_{\aleph_1}$) すべての c.c.c. を満たすコンパクト・ハウスドルフ空間 $X = (X, \mathcal{O})$ に対し，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ が X の稠密開集合の族で，$|\mathcal{F}| \leq \aleph_1$ なら，$\mathcal{F}$ の共通部分 $\bigcap \mathcal{F}$ は空集合でない．

$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は $\neg$CH + MA より弱いことが示せるが，$\neg$CH は $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ から帰結される．

補題 2 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ から $\neg$CH が導かれる．

証明． 対偶命題を示す．CH が成り立つとすると，閉区間 $X = [0, 1]$ の枚挙 r_i, $i \in \Lambda$ で添字集合 Λ の濃度が $\aleph_1$ となるようなものがとれる．X は通常の位相で，コンパクト・ハウスドルフ空間となるが，X が c.c.c. を満たすことも容易に示せる．$i \in \Lambda$ に対し $D_i = X \setminus \{r_i\}$ とすると，D_i は X の稠密な部分集合となるが，$\bigcap_{i \in \Lambda} D_i = \emptyset$ である．したがって $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は成り立たない． **（証明終）**

応用上では，MA は，次の節の定理 9 (A) の形で用いるのが普通である[*9]．$\neg$CH + MA あるいは $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ と，これに背反する，ZFC と矛盾しないことが既に示されているような他の原理を用いることで，純粋に組合せ論的な論法のみによっても，多くの興味深い数学的命題の独立性を示すことができる[*10]．

スースリンの仮説の独立性はそのような例の 1 つである．実数の全体を全順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ と見たとき，これは可分な（つまり順序位相に関し稠密な可算部分集合

[*8] ここでは，心情的には “ZFC + $\neg$CH + MA は無矛盾である” と書きたいところなのであるが，ZFC 自身の無矛盾性の証明は（不完全性定理により理論的に）不可能なので，正確に書こうとするとこのような記述にならざるを得ないのである．このような場合，しばしば直観を重視して，“ZFC + $\neg$CH + MA は無矛盾である” と言いきってしまうこともあるのだが，そのときも実際に意味するところは，あくまでもここで述べたような主張である．また，ZFC の枠組の内側で仕事をしている，という直観的な立場から “ZFC +” も省略して，“$\neg$CH + MA は無矛盾である” と言ったり，ZFC + $\neg$CH + MA から証明できる命題について，“$\neg$CH + MA のもとで ... が成り立つ．” というような言い方をすることもある．

[*9] ここでは話の流れの都合上，位相空間に関する命題として MA を導入したが，通常は，これと同値であることが 定理 9 で示される命題 (A) がマルティンの公理と呼ばれる．

[*10] ただし，本格的な独立性証明には forcing や内部モデルの手法などを直接に用いることが不可欠である．

を持つ）両端点を持たない稠密で[*11]完備な全順序集合として特徴付けられる．スースリンの仮説 (1920) はここでの "可分な" を "（順序位相に関し）c.c.c. を満たす" で置き換えることができることを主張するものである．この仮説に関しては，（現代では古典となった）次のような結果が知られている[*12].

定理 3 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ を仮定すると，c.c.c. を満たし，稠密で完備な，両端点を持たない全順序集合は常に $(\mathbb{R}, \leq)$ と順序同型である．つまり $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ のもとではスースリンの仮説が成り立つ.

一方，すべての集合が構成的である（つまり，順序数上の超限帰納法により構成的に組み立てることができる）ことを主張するゲーデルの $V = L$ からの帰結である組合せ論的命題 $\diamondsuit_{\aleph_1}$ を用いると，定理 3 の主張の否定が証明できる：

定理 4 $\diamondsuit_{\aleph_1}$ を仮定すると，c.c.c. を満たし，稠密で完備な，両端点を持たない全順序集合 $(X, \leq)$ で，$(\mathbb{R}, \leq)$ と順序同型にならない（特に可分でない）ようなものの存在が示せる.

上の 2 つの結果と，$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ も $\diamondsuit_{\aleph_1}$ も ZFC と無矛盾であることから，次が結論できる：

系 5 スースリンの仮説は ZFC から独立である.

上の例以外にもマルティンの公理や $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ から導ける数学的命題は数多く知られている — これらについては，たとえば，[8] を参照されたい.

2 Forcing

Forcing（強制法）は，歴史的には連続体仮説の否定の集合論からの無矛盾性証明のために P. Cohen によって 1960 年代初めに導入された．この手法は R. Solovay らによって一般化され，前節で述べた MA + ¬CH などの様々な命題の集合論との無矛盾性の証明に威力を発揮する強力なツールとなった．筆者が集合論を日本で学び始めた 1970 年代には，forcing はまだほんのひとにぎりのエリートだけがマスターした秘法のような感があったが，その後，[18] や [14] のような標準的な教科

[*11] ここでの「稠密」は順序（位相）としての稠密 (dense in itself) であり，任意の異なる 2 点 a, b, $a < b$ に対し，常に $a < c < b$ となる c が存在する，ということである.

[*12] これらの証明の子細については，たとえば [18] を参照されたい.

書が書かれ，現在（少なくとも欧米では）学部の講義でも普通に取り上げられ，誰でもマスターできる標準的な数学的技法となっている*13.

前節では MA を位相空間に関する命題として与えた．その記述は，妥当であるとは言えるかもしれないが，その正しさ（あるいは間違っていること）に対する直観を与えるものではないように思える．しかし，forcing の言葉を用いると，その集合論的意味をより明確に見ることができるような MA のいくつかの特徴付けを与えることができる．しかも，それらの特徴付けは MA の “正しさ” に関する議論の可能性さえも示唆しているように思われる．そのような特徴付けを次節以降で考察するが，本節ではまず，forcing の理論の概略を見ておくことにする（以下の説明で省略した技術的な細部については，たとえば [18] を参照されたい）.

Forcing は，非形式的には，ZFC のモデル V が与えられたとき，V の外に generic フィルター（または generic 集合）と呼ばれる新しい集合 G をとり，V と G から定義される新しい ZFC のモデル（generic 拡大）$V[G] \supseteq V$ を構成する手法である，と言うことができる．後で見るように，ある数学的命題 φ が成り立つような $V[G]$ を構成することで ZFC + φ の無矛盾性を結論することができる.

これは，たとえば，環，つまり環論の公理系のモデル R が与えられたとき，(R の外にある）変数記号 x を使って多項式環 $R[x] \supseteq R$（これも環論の公理系のモデルになっている）を得る，という構成法と比較することができるであろう*14.

しかし，ZFC に関しては，上のように述べてしまうと，厳密には色々と問題が生じてくる．まず，環論のモデル $R[x]$ の構成の例でもそうだったが，このような構成自身は，集合論の中，あるいは，形式的には ZFC の公理系から演繹される命題の世界の中で行われることになる．ところが，不完全性定理により，ZFC の中では ZFC のモデルの存在は証明できないから，上のように議論するためには，議論の枠組としては，ZFC より強い何らかの公理系（たとえば，ZFC に巨大基数の公理を何か１つ付け加えたもの）の中で議論する必要がでてくる．しかし，forcing の目的は，それによって得られたモデル $V[G]$ で，ある数学的命題 φ が成り立つことを示し，そのことから ZFC + φ の無矛盾性の証明をすることであるから，そ

*13 私がベルリン自由大学の数学科で教えていたときには，可算サポート上の強制法の反復，という強制法の技法のうちでもかなり高度なテクニックについての学部生のゼミを集合論のモデルの講義に続けて行ったことさえあった.

*14 複数の変数記号 $x_1, x_2, \ldots$ を使って $R[x_1, x_2, \ldots]$ をとり，さらに適当なイデアル I で割って環 $R[x_1, x_2, \ldots]/I$ を得る，という構成法の方が，ある意味で，generic 拡大との，より密接なアナロジーを与えると言えるかもしれない.

のような議論を集合論より強い体系で行わなくてはいけない，という制約があるのは具合が悪い．V をすべての集合からなる“本物の”集合論のモデルとして議論することも考えられるが，この場合には，“すべての集合と異なる，新しい集合 G を V の外側からとる”ということの意味が不明になってしまう．

このような困難を回避するためには，たとえば次のように議論すればよい[*15]．ZFC' を ZFC の任意の（しかし具体的に与えられた）有限個の公理からなる（しかし後で必要となる ZFC の公理はすべて含むような）公理系とする[*16]．このようなものに対しては，“可算集合 M と，集合の帰属関係 $\in$ を M に制限したもの（簡単のためにこれも $\in$ と書くことにする）の組 $(M,\in)$ で ZFC' を満たすようなものが存在する”という命題が ZFC の中で証明できる．特に，M は（$\in$ に関し）推移的になるようにとれる．つまり，すべての $x \in M$ と $y \in x$ に対し $y \in M$ となるようにとれる（Lévy の反映定理と Löwenheim-Skolem 定理，および Mostowski の定理による）．

ある集合論的命題 φ に対し，このような M に対し，G をうまく選ぶと，$(M[G],\in)$ が ZFC' と φ を満たすようにとれるなら，φ の否定 $\neg\varphi$ は ZFC' から証明することができないことがわかる: $(M[G],\in)$ が ZFC' を満たすことから，もし $\neg\varphi$ が ZFC' から証明できたとすると $(M[G],\in)$ は $\neg\varphi$ も満たさなくてはならなくなり，矛盾となるからである．ここで ZFC' は“十分に大きい”ことを除くと任意の ZFC の有限部分だったから，$\neg\varphi$ が ZFC から証明できないことが証明できたことになる[*17]．

Forcing の理論の技術的な細部をもう少し詳しく見ることにする[*18]．（後の議論

[*15] ここでの問題は，第 4 節の始めで述べることになる，$p, \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ 上の関係 $p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$ を用いて議論することによっても解消できる．詳しくは [18] の Ch.VII §9 を参照されたい．

[*16] ごく厳密に言うと，以下の $M[G]$ の構成では，ZFC' にさらにいくつかの ZFC の公理を付け足して，以下で説明する forcing の議論もそこで展開できる程度の余裕を持った（しかし依然として有限な）公理系 ZFC'' に拡張しておき，ZFC'' の公理をすべて満たすような M をとる必要がある．

[*17] “証明できないことが証明できた”という言い回しを奇異なものに思う読者もあるかもしれない．この主張の前半の「証明できない」は「ZFC の体系から形式的な証明が存在しない」ということであるのに対し，後半の「証明できた」というのは「ZFC を含む形式的体系の理論（超数学）の中で証明できた」ということである．ここでの議論を検証してみると，これによって得られている結論は，厳密には,「$\neg\varphi$ の ZFC からの証明が存在すれば，それを用いて ZFC からの矛盾の証明が得られる（つまり ZFC が矛盾することが示せてしまう）」というものであることがわかる．あるいは，この対偶をとって,「ZFC が矛盾しなければ，$\neg\varphi$ の ZFC からの証明は存在しない（つまり $\mathrm{ZFC} + \varphi$ も矛盾しない）」がここでの帰結である．

[*18] 以下の議論は ZFC の公理系から演繹される命題の記述する世界（直観的には集合論の“宇宙”）で行われていることに注意する．

で必要となるようなすべての ZFC の公理を含んでいる，という意味で）十分に大きな，有限な ZFC の部分体系 ZFC$'$ に対し，M を上のようなものとする．M は ZFC$'$ を満たすので，ほとんど ZFC のモデルであるかのように扱うことができる．そこで，以下では煩雑をさけるために ZFC$'$ と書くかわりに ZFC と書いてしまうことにする．M の元 $\mathbb{P} = (P, \leq)$ が強制概念 (forcing notion) であるとは，$\mathbb{P}$ が最大元 $1_{\mathbb{P}}$ を持つ擬順序であることとする[*19]．$D \subseteq P$ が $\mathbb{P}$ で稠密 (dense) とは，すべての $p \in P$ に対し，$q \in D$ で $q \leq p$ となるものがとれることである．(必ずしも M に要素として属さない）$G \subseteq P$ が $\mathbb{P}$ 上のフィルター (filter) であるとは，G は上方向に閉じていて，任意の $p, q \in G$ に対し，$r \leq p, q$ となる $r \in G$ が存在することとする[*20]．$\mathbb{P}$ 上のフィルター G が M-generic フィルターであるとは，$\mathbb{P}$ で稠密な $D \in M$ に対し，$D \cap G \neq \emptyset$ が常に成り立つこととする（G は M 上の $\mathbb{P}$-generic フィルターである，という言い方をすることもある）．

補題 6 任意の強制概念 $\mathbb{P} \in M$ と $p \in P$ に対し $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターで p を含むものが（M の外で）構成できる．

証明. M は可算だったから，M の要素 D で $\mathbb{P}$ の稠密部分集合となっているものは（M の外で見ると）可算個しかない．したがって，これらを $D_0, D_1, D_2, \ldots$ と枚挙することができるから，P の元 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ を

(1) $p \geq p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots$,

(2) すべての $i \in \mathbb{N}$ に対し，$p_i \in D_i$

となるように帰納的にとることができる（(2) は 各 D_i が稠密であることから可能である）．このとき $G = \{q \in P : ある\ i \in \mathbb{N}\ に対し\ p_i \leq q\}$ とすれば，G は p を含む $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとなる．　**（証明終）**

上の証明では，$D_i \subseteq P$ で，$P \in M$ により M の推移性から $P \subseteq M$ となるから，各 p_i は M の元であるが，枚挙 $\langle D_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ は一般には M の中にとれないため（M は $\mathbb{P}$ の稠密部分集合が非可算個あると “思っている” かもしれない！），これを用いた $p_0, p_1, p_2, \ldots$ の帰納的構成も一般には M の外側で行われている．したがって，G が M の元であることは保証できない．実は，すべての $p \in M$ に対し，

[*19] $(P, \leq)$ が擬順序であるとは，$\leq$ が推移的関係で，$p \leq p$ がすべての $p \in P$ に対し成り立つことである．

[*20] $r \leq p, q$ となる r が存在するとき，p と q は共存可能 (compatible) であるという．またこのような r が存在しないときには，p と q は共存不可能 (incompatible) であるという．

$q, r \le p$ で共存不可能なものがとれる場合には，P 上の M-generic フィルターは M の元となり得ないことが示せる．

上のような M, P, G に対し，ZFC の可算で推移的なモデル N で，次を満たすものが構成できる：(a) $M \subseteq N$ で $G \in N$, (b) M の順序数の全体は N の順序数の全体と一致する，(c) N は (a) と (b) を満たす ZFC の可算推移的モデルのうち $\subseteq$ に関し最小のものである．

(c) により，上のような N は一意に決まるので，これを $M[G]$ と書き，M の G による P 上の generic 拡大 (generic extension) と呼ぶ．

ここで決定的なのは，N の性質が M の中で（かなりの程度まで）記述できる，ということである：$M[G]$ の各元の名称，あるいは P-名称（P-name）を G に依存しない形で定義できる．つまり，P-名称の全体 $M^P \subseteq M$ が（P をパラメタとして）M で定義可能なクラスとして導入でき，P 上の M-generic フィルター G を決めると，各 $\dot{x} \in M^P$ に対し，$\dot{x}$ の G による解釈 $\dot{x}^G$ が，$M[G] = \{\dot{x}^G | \dot{x} \in M^P\}$ となるよう（M の外で各 G に対し一様に）定義でき，M の各元 x については，その標準的名称 $\check{x} \in M^P$ が，すべての G に対し $\check{x}^G = x$ となるよう定義できる．$\check{x}$ は，混乱の生じる恐れのない場合には x と同一視して，x で表すことが多い．

さらに，$p \in P$ と，集合論での命題を表す論理式 φ および $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ を，“p を含むすべての P 上の M-generic フィルター G に対し，$\varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ が $M[G]$ で成り立つ” こと[*21]と定義すると，p と $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ を変数とする関係，“$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” は M で定義可能である．1_P を P の最大元とするとき，すべての P 上の M-generic フィルターは 1_P を含むから，$M \models$ “$1_P \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” なら $M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ がすべての P 上の generic 拡大で成り立つ．“$1_P \Vdash_P \cdots$” を “$\Vdash_P \cdots$” とも書く．

$\dot{G}^G = G$ がすべての P 上の M-generic フィルター G に対し成り立つような，標準的な名称 $\dot{G}$ も構成できる．これに対しては，次の同値が成り立つ：すべての $p, q \in P$ と p を含む generic な G に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P q \in \dot{G}$” $\Leftrightarrow$ すべての $r \le p$ に対し，$s \le r$ で $s \le q$ となるものが存在する．

次の性質も重要である：P 上の M-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ なら，$p \in G$ で，$M \models$ “$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” となるものが存在する．次の補題は，この性質から直ちに導ける：

[*21] 以下では “$\varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ が $M[G]$ で成り立つ” を $M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ と表す．より一般的には，構造 A と A の要素 $a_1, \ldots, a_n$ に対し，“A で $a_1, \ldots, a_n$ に対し命題 ψ が成り立つ” を $A \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ と表す．

補題 7 (1) すべての $p \in P$, 論理式 φ, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$q \leq p$ で $M \models$ "$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$" または，$M \models$ "$q \Vdash_P \neg\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$" となるものが存在する．

(2) すべての $p \in P$, 論理式 φ, $\dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$M \models$ "$p \Vdash_P \exists x\varphi(x, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$" なら，$q \leq p$ と $\dot{x}_1 \in M^P$ で，$M \models$ "$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$" となるものが存在する．

(3) すべての $p \in P$ と $X \in M$ と P-名称 $\dot{x}$ に対し，$M \models$ "$p \Vdash_P \dot{x} \in X$" なら，$q \leq p$ と $x \in X$ で， $M \models$ "$q \Vdash_P \dot{x} = x$" となるものが存在する．

強制概念 P が c.c.c. を満たすとは，非可算な $X \subseteq P$ は常に共存可能な異なる２元を持つことである．c.c.c. を満たす強制概念は forcing の理論で非常に重要な役割をはたすが，次の補題はその理由の一端を示している．

補題 8 $P \in M$ を M での強制概念で $M \models$ "P は c.c.c. を満たす" となるものとする．このとき任意の P 上の M-generic フィルター G に対して，κ が M での基数なら，κ は $M[G]$ でも基数となる[*22]．

証明. ここでは，M での $\aleph_1$ （これを $(\aleph_1)^M$ と書くことにする）が $M[G]$ でも $\aleph_1$ になっていることのみを示すことにする[*23]．$(\aleph_1)^M$ が $M[G]$ で基数になっていないとすると，$\mathbb{N}$ から，$(\aleph_1)^M$ への上射 $f \in M[G]$ が存在する．$\dot{f}$ を f の P-名称とする（つまり，$\dot{f}$ を $f = \dot{f}^G$ となるようなものとする）．このとき $p_0 \in G$ で $p_0 \Vdash_P$ "$\dot{f}$ は $\mathbb{N}$ から $(\aleph_1)^M$ への関数である " となるものがとれる．補題 7 (2), (3) により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $D_n \subseteq P$ で次を満たすものが存在する：(a) すべての $p \in D_n$ に対し，p は p_0 と共存不可能であるか，あるいは，$k_p \in \mathbb{N}$ で，$p \Vdash_P$ "$\dot{f}(n) = k_p$" となるものが存在する；(b) D_n の異なる元は，互いに共存不可能である；(c) D_n は (a), (b) を満たすもののうちで $\subseteq$ に関し最大である．このとき，D_n は (b) と P が c.c.c. を満たすことから可算である．したがって：(d) $E_n = \{k_p : p \in D_n\}$ も可算となる．また，D_n の極大性から，$\{p \in P : \text{ある } q \in D_n \text{ に対し } p \leq q\}$ は P の稠密な部分集合となることがわかる．このことから，(e) $f(n) = \dot{f}^G(n) \in E_n$ である．D_n も E_n も M で（一様に）定義可能だから（M が ZFC を満たすことから），$\{D_n : n \in \mathbb{N}\}, \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \in M$ である．したがって，$E = \bigcup\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ も M の可算な元となる．特に $E \subsetneq (\aleph_1)^M$ となるが，(e) により，$f[\mathbb{N}] \subseteq E$ である．

[*22] このようなとき P は基数 κ を保存するという．

[*23] 正則基数 κ に対しては $\aleph_1$ の場合とほとんど同一の証明ができる．このことから基数 κ が特異基数である場合も補題が成り立つことが導ける．

しかし，これは f が $(\aleph_1)^M$ への上射であることに矛盾である．　　　　**（証明終）**

P. Cohen が連続体仮説の独立性を証明したときに用いた強制概念は c.c.c. を満たす強制概念の典型的な例の 1 つとなっている．X と Y を集合とするとき，$\mathrm{Fn}(X,Y)=\{f : f$ は X の有限部分集合から Y への関数$\}$ として，$f, g \in \mathrm{Fn}(X,Y)$ に対し，$f \leq g \;\Leftrightarrow\; f$ は g の拡張である，と定義する．このとき，可算な Y に対し，$(\mathrm{Fn}(X,Y),\leq)$ は c.c.c. を満たすことが示せる．特に M で $X=\aleph_2\times\mathbb{N}$, $Y=\mathbb{N}$ としたとき（つまり，$X=(\aleph_2)^M\times\mathbb{N}$ である），$P=(\mathrm{Fn}(X,Y),\leq)$ 上の M-generic な G をとると，generic 性により，$g=\bigcup G$ は $\aleph_2^M\times\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像となり，各 $\alpha\in(\aleph_2)^M$ に対し，$g_\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$; $n\mapsto g(\alpha,n)$ とすると，generic 性から g_α, $\alpha\in(\aleph_2)^M$ は互いに異なる関数となる．したがって，補題 8 により，$M[G]$ では "$2^{\aleph_0}\geq(\aleph_2)^M=\aleph_2$" つまり $\neg$CH が成り立っていることがわかる．このことを脚注*17 の前の議論と組み合せると，"ZFC が矛盾しないなら，ZFC + $\neg$CH も矛盾しない" という主張の証明が得られることになる．

3　Forcing axiom としてのマルティンの公理

P を強制概念として，$\mathcal{D}$ を P の稠密部分集合からなる族とする．$G\subseteq P$ が $\mathcal{D}$-generic フィルターとは，G は（第 2 節の意味での）フィルターで，すべての $D\in\mathcal{D}$ に対し，$G\cap D\neq\emptyset$ を満たすことである．第 2 節での M-generic フィルターは，ここでの用語では $\mathcal{D}$ を $\{D : D$ は P の稠密部分集合で $D\in M\}$ としたときの，$\mathcal{D}$-generic フィルターに他ならない．この用語により，MA は強制概念に対する性質として次のように特徴付けすることができる（この特徴付けを含む MA の古典的な特徴付けについて，より詳しくは，たとえば [18] を参照されたい）．

定理 9 MA は次の命題と同値である：

(A) c.c.c. を満たす，すべての強制概念 P と，P の稠密部分集合の族 $\mathcal{D}$ で濃度が $2^{\aleph_0}$ 未満のものに対し，P 上の $\mathcal{D}$-generic フィルターが存在する．

証明.　MA $\Rightarrow$ (A):（スケッチ）P を強制概念として，$\mathcal{D}$ を濃度が $2^{\aleph_0}$ 未満の P の稠密部分集合からなる族とする．ブール代数 B と順序と共存不可能性を保存する写像 $f:P\to B$ を，$f[P]$ が半順序集合 $B\setminus\{0\}$ の稠密な部分集合になるように選ぶ．$X=(X,\mathcal{O})$ を B に双対なブール空間とする．つまり X は B 上の超フィルターの全体とし，$b\in B\setminus\{0\}$ に対し $O_b=\{F\in X : b\in F\}$ として，$\mathcal{O}$ は $\mathcal{B}=\{O_b : b\in B\setminus\{0\}\}$ から生成される位相とする．このとき，X は c.c.c. を満たす

コンパクト・ハウスドルフ空間となる．各 $D \in \mathcal{D}$ に対し，$C_D = \bigcup\{O_b : b \in f[D]\}$ とすると，C_D は X の稠密開部分集合となる．したがって，MA から，$F^* \in X$ で，すべての $D \in \mathcal{D}$ に対し

$$F^* \in C_D \; (\Leftrightarrow \; F^* \cap f[D] \neq \emptyset) \tag{1}$$

となるようなものがとれる．$G = f^{-1}[F^*]$ とすれば，f の仮定から G は P 上のフィルターで，(1) により G は $\mathcal{D}$-generic である．

(A) ⇒ MA：$(X, \mathcal{O})$ を c.c.c. を満たすコンパクト・ハウスドルフ空間として，$\mathcal{D}$ を稠密な開集合からなる，濃度が $2^{\aleph_0}$ 末満の族とする．このとき，$P = \{A \subseteq X : A$ は X の空でない閉部分集合$\}$ を $A, B \in P$ に対し，$A \leq_P B \Leftrightarrow A \subseteq B$ として半順序を入れた強制概念とする．各 $D \in \mathcal{D}$ に対し，$E_D = \{A \in P : A \subseteq D\}$ とすると，E_D は P で稠密になる．したがって $\mathcal{E} = \{E_D : D \in \mathcal{D}\}$ とすると，(A) から，P 上 $\mathcal{E}$-generic なフィルター G が存在する．G は X の閉部分集合の族で，フィルターであることと $\leq_P$ の定義から，任意の有限個の G の要素の共通部分は空でない．したがって，X のコンパクト性から，$\bigcap G \neq \emptyset$ である．$x \in \bigcap G$ とすると，x はすべての $D \in \mathcal{D}$ に含まれるから，$\bigcap \mathcal{D} \neq \emptyset$ がわかる．　　**（証明終）**

M-generic フィルターが一般には M の中にとれないのに対し，上の議論での $\mathcal{D}$-generic フィルターは本当に存在することが主張されていることに注意しておく．

定理 9 と同様に $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は次の (A’) と同値になる：

(A’) すべての c.c.c. を満たす強制概念 P と P の稠密部分集合の族 $\mathcal{D}$ で濃度が $\aleph_1$ 以下のものに対し，P 上の $\mathcal{D}$-generic フィルターが存在する．

(A) や (A’) のようなパターンを持つ命題は，forcing axiom と呼ばれることがある．MA 以外の forcing axioms でよく考察されるものには，第 5 章で考察することになる PFA や MM などがある．

4　Generic absoluteness としてのマルティンの公理

第 2 節では，可算で推移的なモデル M での強制概念 P と集合論での命題を表す論理式 φ に対し，$p \in P$ と P-名称 $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に関する関係 $p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ が M の中で定義できることを述べたが，全く同様の議論は，すべての集合からなる世界 V において，任意の強制概念 P から出発して行うことができる．この場合，$V[G]$ を考えることはできない（V はすべての集合からなるので，V の外に新

しい集合 G をとることはできない）．それにもかかわらず，$\Vdash_P$ を使って，$\Vdash_P \varphi$ を，“$V[G]$ で φ が成り立つ” と読みかえることで，あたかも “$V[G]$” が存在するかのように議論することができることになる．

このような論法を使うと，MA に次のような特徴付けを与えることができる：

定理 10 (S. Fuchino [9]) MA は次の命題と同値である：

(B) すべての c.c.c. を満たす強制概念 P と，数学的構造 A, B について，A の濃度が $2^{\aleph_0}$ 末満で，$\Vdash_P$ “A は B に埋め込み可能” なら，A は本当に B に埋め込み可能である．

つまり，マルティンの公理は,「濃度 $2^{\aleph_0}$ 末満の構造の他の構造への埋め込み可能性は，c.c.c. を満たす強制概念による，集合の宇宙 V の generic 拡大で，その意味が変らない」 ことを主張するものとなっている．かぎ括弧でくくった命題は，集合論の宇宙 V は generic 拡大に関して絶対的 (absolute) なものになっている（V はすべての存在しうる集合を含むような豊かなものなので，仮に（仮想の）拡張がとれたとしても，その拡張での性質は V での性質に落とせる）という直観とかみあう自然な要請になっていると考えることも可能であろう．

同様に，$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は次と同値になる：

(B’) すべての c.c.c. を満たす強制概念 P と，数学的構造 A, B について，A の濃度が $\aleph_1$ で，$\Vdash_P$ “A は B に埋め込み可能” なら，A は本当に B に埋め込み可能である．

絶対性 (absoluteness) の言葉によるマルティンの公理のもう 1 つの特徴付けには，論理学からの準備が必要になる．$\in, =, \wedge$ (and), $\vee$ (or), $\neg$ (not) と変数の（適切な）組合せによって得られる論理式の変数（のいくつか）を “$\forall x \in y$”, または “$\exists x \in y$” という形の量化子で束縛して得られる論理式を Σ_0-論理式と呼ぶ．

Σ_0-論理式には, たとえば，f が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数であることを主張する $(\forall x \in f)(\forall x' \in f)(\exists y \in x)(\exists u \in y)(\exists v \in y)(\forall y' \in x')(\forall u' \in y')(\forall v' \in y')(x = (u, v) \wedge u \in \mathbb{N} \wedge v \in \mathbb{N} \wedge (x' = (u', v') \wedge u = u' \to v = v'))$ や[*24]，f が $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}$ への連続関数で，したがって $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数をコードすることを主張する論理式[*25], “x は順序数である” など，数学の議論で現れる多くの述語が含まれている．

[*24] ただし，この論理式は $\mathbb{N}$ をパラメタとして含んでいる．また形式的には順序対 “(x, y)” を用いた部分は $\in$ と $=$ のみを用いる形の論理式に展開する必要がある．

[*25] この論理式は複雑であるし，その具体的な形は，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ の導入の仕方で異ってくるため，ここでは省略する．この論理式についても，$\mathbb{N}$ がパラメタとして必要になる．

Σ_0-論理式を，いくつかの "$\exists x$" の形の量化子で束縛して得られる論理式は Σ_1-論理式と呼ばれる．もちろん Σ_0-論理式は Σ_1-論理式でもある．数学的述語の多くが Σ_0-論理式で表せることから，存在命題として表すことのできる数学的命題の多くは Σ_1-論理式で表せることになる．

集合 x が遺伝的可算であるとは，x は可算で，$x \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni y$ などとして $\in$ に関する x からの下降列でたどりつけるどの集合 y も可算となることとする．より一般的には，κ を基数として，x が遺伝的に κ 未満であるとは，x の濃度は κ 未満で，$x \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n \ni y$ などとして $\in$ に関する x からの下降列でたどりつけるどの集合 y も濃度が κ 未満であることとする．したがって，遺伝的可算な集合は，遺伝的に $\aleph_1$ 未満な集合である．

ZF で集合論の公理系 ZFC から選択公理を除いた公理系を表す．次の定理は重要である．

定理 11 (Lévy-Shoenfield Absoluteness Lemma[*26]) V, W を ZF（の十分に大きな有限部分）を満たすような推移的な集合（またはクラス）で $V \subseteq W$ となるものとする．このとき，$a \in V$ が V の意味で遺伝的可算で，φ が Σ_1-論理式なら，$\varphi(a)$ が V で成り立つこと（つまり $V \models \varphi(a)$ ）と $\varphi(a)$ が W で成り立つこと（つまり $W \models \varphi(a)$ ）は同値である．

この定理の応用として，ある数学的命題が，実数 a をパラメタとして持つような Σ_1-論理式 φ で表せるとき[*27]，その命題が連続体仮説や選択公理を用いて証明できたときには，その命題が実は連続体仮説も選択公理も用いずに証明できることが帰結できる： もしこれらの仮定なしにこの命題が証明できなかったとすると，ZFC から選択公理を除いたものの有限部分と $\neg\varphi(a)$ を満たす推移的なモデル W がとれるが，W の中で $V = L[a]$ を考えるとここでは連続体仮説も選択公理も成り立つから，$V \models \varphi(a)$ となる．しかしこれは上の定理に矛盾である．

マルティンの公理は，上の Lévy-Shoenfield Absoluteness Lemma の次のような拡張として特徴付けることもできる：

定理 12 (J. Bagaria [2]) MA は次の命題と同値である：

[*26] 証明は [4] を参照．[14] の旧版には，この Lemma と証明のスケッチが含まれていたが，現在の版ではこれは略されてしまったようである．また，この Lemma の証明や，Bounded Forcing Axioms に関する基本的な定理の証明などの含まれている筆者のノート [10] が，インターネットからダウンロードできる．

[*27] 各実数は通常の定義では遺伝的可算な集合になる．

(C) P を c.c.c. を満たす強制概念とするとき，すべての遺伝的に $2^{\aleph_0}$ 未満な集合 a と Σ_1-論理式 φ に対し，$\varphi(a)$ が成り立つことと $\Vdash_P$ “$\varphi(a)$” は同値である．

上の (C) では，絶対性の主張としての MA の意味がより一層明確になっていると言えるであろう．しかも，(C) はマルティンの公理が Lévy-Shoenfield Absoluteness Lemma の自然な拡張にもなっていることを示している．

同様に $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は次と同値になる：

(C') P を c.c.c. を満たす強制概念とするとき，すべての遺伝的に $\aleph_2$ 未満な集合 a と Σ_1-論理式 φ に対し，$\varphi(a)$ と $\Vdash_P$ “$\varphi(a)$” は同値である．

5　マルティンの公理の拡張

定理 9 の後に述べた (A') での “c.c.c.” を他のもっと弱い性質で置き換えることにより，様々な公理が得られる．そのような性質のうちよく知られているものには “proper” や “stationary preserving” と呼ばれるものがある．ここではこれらの性質を定義するだけの余裕はないが[*28]，これらの性質を持つ強制概念は $\aleph_1$ を保存し（脚注*22 を参照），任意の強制概念 P に対し，

(∗) P は c.c.c. を満たす $\Rightarrow$ P は proper である $\Rightarrow$ P は stationary preserving である

という関係が成り立つ．(A') での c.c.c. を proper, または stationary preserving で置き換えて得られる命題は，それぞれ Proper Forcing Axiom (PFA), または Martin's Maximum (MM) と呼ばれている．MM の名称での “Maximum” は，この公理が，このようにして得られる公理のうち，ある意味で矛盾しないぎりぎりの形のものであることに由来する．上の (∗) から，MM $\Rightarrow$ PFA $\Rightarrow$ $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ がわかる[*29]．マルティンの公理と違い，PFA も MM も ZFC だけからではそれらの無矛盾性を証明できないが， ZFC に非常に大きな巨大基数の存在を保証する公理を付加した体系から，MM （したがって PFA も）の無矛盾性が証明できることが知られている

[*28] proper や stationary preserving の定義や基本的な性質については，たとえば [14] を参照されたい

[*29] 実際には，すぐ後で述べるように PFA から $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれるので，PFA $\Rightarrow$ MA が成り立つ．

([7][*30]). MM や PFA からは，様々な興味深い結果が証明できることが知られているが，特に注目に値するのは，これらの公理が連続体の多くの性質を決定することであろう（[5],[7],[14] 等を参照）．特に PFA からは連続体の濃度が $\aleph_2$ である，つまり $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ であることが導ける．一方 MA は，連続体の濃度に関して，それが，連続体に関連する基数不変量の多くと一致すること以外には，ほとんど何の制約も課さない．

定理 10 の後の (B') での c.c.c. をそれぞれ proper および stationary preserving に置き換えたものは，PFA および MM の特徴付けになるが，定理 12 の後の (C') で同様の置き換えを行うと，PFA や MM より弱い公理が得られることが知られており，これらはそれぞれ Bounded Proper Forcing Axiom (BPFA) および Bounded Martin's Maximum (BMM) と呼ばれている．特に，BPFA については，PFA の無矛盾性証明で必要となるものに比べて無矛盾性の強さ[*31]に関して格段に小さな巨大基数の存在と無矛盾等価となることが知られている ([12]).

BPFA や BMM は (C') の形の特徴付けを持つ自然な公理であると考えられるが，Todorcevic は BMM から $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれることを証明した [27]. また，宮元忠敏は，BPFA と BMM の中間に位置する Bounded Semi-Proper Forcing Axiom (BSPFA) と可測基数の存在から同様の結論が得られることを証明している [24]. これらの結果は，単に BMM や BSPFA + 可測基数が連続体の濃度を決定するだけでなく，それを導くような，非常に強い組合せ論的な性質が，これらの公理のもとで成り立つことを示している．

特に宮元の結果は，"巨大基数の存在が連続体問題の解決に繋がる可能性がある" という Gödel の "予言" ([11]) と呼応するものとなっており，その意味できわめて興味深いものに思える[*32]．これらの公理に関しては，他にも MM から projective

---

[*30]ZFC に supercompact 基数の存在を保証する公理を加えた体系で，強制法により PFA や MM のモデルを作ることができる．

[*31]無矛盾性の強さ (consistency strength) については，[16] や [21] を参照されたい．

[*32]**Added in Proof:** ごく最近， Justin Moore によって $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ は BPFA のみから導けることが証明された ([25]). これは上記の宮元の結果の大幅な改良になっているのであるが，宮元の論文 [24] では，BSPF + 可測基数の存在から，θ^*_{AC} と呼ばれる非常に強力な組合せ論的原理が導かれ，θ^*_{AC} からの帰結として $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が証明されている.「巨大基数の存在の連続体問題の解決への寄与」 は「θ^*_{AC} のような連続体の構造に影響を及ぼす性質に対する巨大基数の存在の影響」，と拡大解釈して考えことができる．この意味で宮元の結果は Moore の結果によってすべて置き換えられたわけではないことに注意したい．一方，本稿では詳しく述べられなかったが BPFA は自然な特徴付けを有するだけでなく，その無矛盾性の強さが判明している公理でもある（[12] を参照）.

determinacy が導かれるという Woodin の定理 ([29]) など，目をみはるような結果が得られ始めている（これについては，たとえば [1], [24], [25], [27], [29] などを参照されたい）.

References

[1] D. Asperó, Generic absoluteness for H_{ω_2} and the continuum problem, preprint.

[2] J. Bagaria, Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness, Archive of Mathematical Logic, **39**, No. 6 (2000), 393–401.

[3] T. Bartoszynski and H. Judah, Set Theory: on the structure of the real line, A. K. Peters (1995).

[4] J. Barwise, Admissible sets and structures, Springer-Verlag (1975).

[5] J.E. Baumgartner, Applications of the proper forcing axiom, in Handbook of Set Theoretic Topology , Eds.: K. Kunen and J.E. Vaughan (North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984), 923–959.

[6] K. Devlin, Constructibility, Springer-Verlag (1984).

[7] M. Foreman, M. Magidor and S. Shelah, Martin's maximum, saturated ideals and nonregular ultrafilters I., Annals of Mathematics (2) **127**, No. 1, (1988), 1–47.

[8] D. Fremlin, Consequences of Martin's Axiom, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[9] S. Fuchino, On potential embedding and versions of Martin's axiom, Notre Dame Journal of Logic, **33**, No. 4 (1992), 481–492.

[10] S. Fuchino, 数学ノート，(2000), revised December 2003, `http://math.cs.kitami-it.ac.jp/ fuchino/notes/math-notes-00.pdf`

$2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が BPFA から導けることが示されたことで，連続体のサイズが $\aleph_2$ であるという主張が "正しい" 命題であることの "状況証拠" がかなり増えた，と言うことができるように思える.

[11] K. Gödel, What is Cantor's Continuum Problem? American Mathematical Monthly, **54** (1947), 515-525.

[12] M. Goldstern, S. Shelah, The bounded proper forcing axiom, Journal of Symbolic Logic, **60**, No. 1 (1995), 58–73.

[13] M. Holz, K. Steffens and E. Weits, Introduction to Cardinal Arithmetic, Birkhäuser Verlag (1999).

[14] T. Jech, Set-Theory, 3. millennium ed., revised and expanded, Springer, (2002).

[15] A. Kanamori (ed.), Hand-book of Set-Theory, Kluwer, to appear (200?).

[16] A. Kanamori, The Higer Infinite, Springer-Verlag (1994/97); 日本語訳：「巨大基数の集合論」, 渕野 昌 訳，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[17] A. Kanamori, The Higer Infinite II, to appear.

[18] K. Kunen, Set Theory, North-Holland (1980).

[19] B. Löwe and J.R. Steel, An introduction to core model theory, in: Sets and proofs (Leeds, 1997), 103–157, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 258, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999).

[20] D.A. Martin and R. Solovay, Internal Cohen extensions, Annals of Mathematical Logic, No. 2, (1970), 143–178.

[21] 松原 洋，Non-stationary ideal と universe of sets, 数学，**51**, No. 1 (1999), 18–33.

[22] T. Miyamoto, A note on weak segments of PFA, in: Proceedings of the Sixth Asian Logic Conference (Beijing, 1996), 175–197, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1998).

[23] T. Miyamoto, Localized reflecting cardinals and weak segments of PFA, preprint (1996).

[24] T. Miyamoto, BSPFA combined with one measurable cardinal, preprint (2002).

[25] J.T. Moore, Set mapping reflection, preprint August 2003.

[26] S. Shelah, Cardinal Arithmetic, Clarendon Press, Oxford 1994.

[27] S. Todorcevic, Generic Absoluteness and the continuum, Mathematical Research Letters **9** (2002), 1–7.

[28] H. Woodin, The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal, de Gruyter Series in Logic and its Applications, 1., Walter de Gruyter & Co., Berlin (1999).

[29] H. Woodin, The continuum hypothesis. I, II., Notices of American Mathematical Society, **48** (2001), 567–576, 681–690.

[30] M. Zeman, Inner models and large cardinals, de Gruyter Series in Logic and its Applications, 5. Walter de Gruyter & Co., (2002).