

Locally “nice” spaces の 距離付け可能性と meta-Lindelöf 性

Sakaé Fuchino (渚野 昌)

中部大学 (Chubu Univ.)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

<http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/>

(本スライドの pdf ファイルは上の web page にリンクされている / 予定)

(December 24, 2008 (04:27) 版)

於 高崎経済大学

2008 General Topology シンポジウム における講演

本スライドは p_LATEX + beamer class で作成されたものです.

この発表で述べる新しい結果は主に以下の共著者との joint research で得られたものである:

István Juhász, Lajos Soukup,
Hiroshi Sakai (酒井 拓史), Zoltán Szentmiklóssy and
Toshimichi Usuba (薄葉 季路)

文献

- [1] S. Fuchino, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, *Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizable and meta-Lindelöfness*, preprint.
- [2] S. Fuchino, *Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle*, to appear in: 数理解析研究所 講究録.
- [3] S. Fuchino H. Sakai, L. Soukup and T. Usuba, *More about the Fodor-type Reflection Principle*, in preparation.

\mathcal{Q} を位相空間に関する性質とする.

位相空間 X が **locally \mathcal{Q}** とは X の各点 p の近傍 U で, X の部分空間として, \mathcal{Q} を満たすものが存在すること.

さらに, κ を基数とするとき:

位相空間 X が **$< \kappa$ - \mathcal{Q}** とは X のすべての濃度 $< \kappa$ の部分集合 Y が, X の部分空間として, \mathcal{Q} を満たすこと. **$\leq \kappa$ - \mathcal{Q}** も同様に定義する.

位相空間 X が **almost \mathcal{Q}** とは, X が **$< |X|$ - \mathcal{Q}** であることとする.

ここでの問題のプロトタイプ

- ▶ X が locally- \mathcal{Q} なら, X 自身も \mathcal{Q} を満たすか?
- ▶ X が $< \kappa$ - \mathcal{Q} なら, X 自身も \mathcal{Q} を満たすか?

以下では、位相空間と言ったときには、常に regular Hausdorff であると仮定する

- ▶ (Y.M. Smirnov, 1951) paracompact な位相空間は、locally metrizable なら metrizable.
- ▶ (well-known) locally compact で meta-Lindelöf な位相空間は、locally metrizable なら metrizable.
- ▶ (A. Dow, 1988) countably compact な位相空間は、 $\leq \aleph_1$ -metrizable なら metrizable.

- ▶ (W. Fleissner 1986) Axiom R を仮定すると, point countable な開基を持つ T_1 -空間 X が $\leq \aleph_1$ -left-separated なら, X は left-separated である.
- ▶ (Z. Balogh, 2002 (posthumous)) Axiom R を仮定すると, locally compact な位相空間 X は, $\leq \aleph_1$ -metrizable なら metrizable である.

Axiom R : \Leftrightarrow すべての基数 $\kappa \geq \aleph_2$, 定常な $S \subseteq [\kappa]^{\aleph_0}$, および, ω_1 -club な $\mathcal{T} \subseteq [\kappa]^{\aleph_1}$ に対し, $I \in \mathcal{T}$ で, $S \cap [I]^{\aleph_0}$ が $[I]^{\aleph_0}$ で定常になるようなものが存在する.

$\mathcal{T} \subseteq [X]^{\aleph_1}$ は ω_1 -club : \Leftrightarrow

- \mathcal{T} は \subseteq に関し $[X]^{\aleph_1}$ で cofinal;
- \subseteq に関する長さ ω_1 の \mathcal{T} での上昇列 $\langle x_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ に対し, 常に $\bigcup_{\alpha < \delta} x_\alpha \in \mathcal{T}$ となる.

- ▶ (W. Fleissner 1986) Axiom R を仮定すると, point countable な開基を持つ T_1 -空間 X が $\leq \aleph_1$ -left-separated なら, X は left-separated である.
- ▶ (Z. Balogh, 2002 (posthumous)) Axiom R を仮定すると, locally compact な位相空間 X は, $\leq \aleph_1$ -metrizable なら metrizable である.

(*) 定常集合 $S \subseteq E_\omega^\kappa$ ($= \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \omega\}$) で, すべての $\alpha < \kappa$ に対して, $S \cap \alpha$ が定常にならないようなもの (non-reflecting stationary set) が存在する

なら, 上の結果の命題のそれぞれの反例となるような位相空間がそれぞれ作れる.

- ▶ たとえば, κ が successor cardinal で $\kappa = \lambda^+$ として, \square_λ が成り立つなら, (*) が成り立つ.

以上から Fleissner の定理と Balogh の定理の命題は, 両方とも ZFC から独立である.

Fodor-type Reflection Principle (FRP) : \Leftrightarrow

すべての正則基数 κ , すべての定常な $S \subseteq E_\omega^\kappa$ と
写像 $g : S \rightarrow [\kappa]^{\aleph_0}$ に対し,

$I \in [\kappa]^{\aleph_1}$ で次を満たすものが存在する:

- (0) $\text{cf}(I) = \omega_1$;
- (1) $g(\alpha) \subseteq I$ for all $\alpha \in I \cap S$;
- (2) 任意の退行的な $f : S \cap I \rightarrow \kappa$ で, すべての $\alpha \in S \cap I$ に対し,
 $f(\alpha) \in g(\alpha)$ が成り立つようなものに対し, $\xi^* < \kappa$ で,
 $f^{-1} \{ \xi^* \}$ が $\text{sup}(I)$ で定常になるようなものが存在する.

Ordinal Reflection Principle (ORP) : \Leftrightarrow

すべての正則基数 κ と, 定常な $S \subseteq E_\omega^\kappa$ に対し, $\alpha < \kappa$,
 $\text{cf}(\alpha) = \omega_1$ で, $S \cap \alpha$ が α で定常になるようなものが存在
する.

$\text{MA}^+(\sigma\text{-closed}) \Rightarrow \text{Axiom R} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \neq \end{array} \text{FRP} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \neq \end{array} \text{ORP}$
--

定理 1 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

FRP を仮定する. \mathbb{P} を c.c.c. を満たす poset とするとき,
 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “FRP” が成り立つ. □

Remarks:

(1) Axiom R からは $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ が帰結されるので, 例えば, $\text{MA}^+(\sigma\text{-closed})$ のモデルから出発して, $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ を force するような c.c.c. poset \mathbb{P} で force すると, $V^{\mathbb{P}}$ で FRP は成り立っているが, Axiom R は成り立っていないようなモデルが得られる.

(2) 上の (1) と, $\text{MA}^+(\sigma\text{-closed})$ は CH と矛盾しないことから, FRP は, 連続体濃度に何の制限も果さないことがわかる.

定理 2 (S.F.)

Fleissner の定理は FRP から導ける: FRP を仮定すると, *point countable* な開基を持つ T_1 -空間 X が $\leq \aleph_1$ -*left-separated* なら, X は *left-separated* である.

定理 3 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

FRP を仮定すると, *locally separable* で, *countably tight* な位相空間は, $\leq \aleph_1$ -*meta-Lindelöf* なら, *meta-Lindelöf* である.

(X が meta-Lindelöf $\Leftrightarrow X$ の開被覆に対し point countable な refinement が存在する)

定理 3 と次ページ定理 5 から, 次が導ける.

定理 4 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

Balogh の定理は FRP から導ける: FRP を仮定すると, *locally countably compact* な位相空間は $\leq \aleph_1$ -*metrizable* なら *metrizable* である.

前ページの定理 4 は、定理 3 と次の定理から容易に証明できる:

定理 5 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

X を *locally countably compact* で *meta-Lindelöf* な位相空間とするとき、 X が $\leq \aleph_1$ -*metrizable* なら、 X は *metrizable* である。

定理 4 の 定理 3 と 定理 5 からの証明:

X を *locally countably compact* で $\leq \aleph_1$ -*metrizable* な位相空間とする。このとき、 X の各点の近傍で、compact なものがあるが、このような近傍は $\leq \aleph_1$ -*metrizable* なので、Dow の定理から、*metrizable* である。

したがって、 X は *locally separable* で *countably tight* となることがわかり、 $\leq \aleph_1$ -*metrizable* であることから特に $\leq \aleph_1$ -*meta-Lindelöf* でもある。したがって、定理 3 から、 X は *meta-Lindelöf* である。

ここで、定理 5 を用いると、 X は *metrizable* であることが帰結できる。 □

$L(X)$ で X の Lindelöf degree をあらわす. つまり, $L(X) = \min\{\kappa : X \text{ のすべての開被覆は濃度 } \leq \kappa \text{ の部分被覆を持つ}\}$.

$\kappa = \aleph_1$ に対する FRP は Fodor's Lemma と同値となり, ZFC で証明できることと, 定理 3 と 定理 4 から:

定理 6 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

$L(X) \leq \aleph_1$ となる, *locally separable* で, *countably tight* な位相空間は, $\leq \aleph_1$ -meta-Lindelöf なら, meta-Lindelöf である.

定理 7 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

$L(X) \leq \aleph_1$ となる, *locally countably compact* な位相空間は $\leq \aleph_1$ -metrizable なら metrizable である.

次のような Shelah Singular Compactness Theorem に類似の定理が成り立つ.

定理 8 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

X を, 濃度が特異基数となるような, *locally separable* な空間とする. このとき, X が *almost meta-Lindelöf* なら, X は *meta-Lindelöf* である.

定理 9 (S.F., I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba)

X を, 濃度が特異基数となるような, *locally separable* な空間とする. このとき, X が *almost metrizable* なら, X は *metrizable* である.

Remark

"locally separable" を落すと, 上の結果は成り立たないことは, Hajnal と Juhász による [On spaces in which every small subspace is metrizable, Bulletin of the Polish Academy of Sciences 24 (1976), pp.727-731.] で既に示されている.

2/13 であげた [1] の研究は、2008 年 6 月シシリア島エリチェでの国際学会 “Advances in Set-Theoretic Topology” での、Lajos Soukup とのディスカッションが発端となって始められた。[1] はこの学会の proceedings に投稿予定である。この写真は、エリチェの街並と雲の下に垣間見える下界を、学会会場の建物のバルコニーからとったものである。

終

