**注意．** (Sun Nov 7 14:13:15 2021 の付記) 本稿は,「数学」, 66 巻 2 号 (2014), 216–221 に書評として寄稿した同名の原稿の unabridged version です.「数学」に掲載されたものは, 紙数の制限から, 本稿に書かれた多くの数学的説明が省略されています. これらの省略をすべて復元した, 本 unabridged version の最新のもののファイルは,

https://fuchino.ddo.jp/papers/review-higher-inf-unabridged.pdf

としてダウンロードできます.

## Akihiro Kanamori: The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,

Corrected Second Edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer 2004

渕　野　昌

本書 (以下では [THI] とよぶことにする) は, 集合論, 特に巨大基数の理論と呼ばれる集合論の研究分野に関する大きな俯瞰を与えるものである. 本書の内容は, 最新の結果も含み, 技術的な数学の細部にはかなり高度な内容も含まれている. しかし [THI] の魅力は, 数学の技術的な記述に留まらず, それを集合論や数理論理学を中心として近代, 現代の数学史や数学思想史の文脈の中で語っていることであろう. このために, ここで使われている英語のスタイルは, 数学書としては破格にハイブローなものになってしまっている. また, 著者の高い教養を反映して, 文学的ないし文化論的な輝きを持つアリュージョンがいたるところにちりばめられてもいる. ただし, このような本書の “魅力” が, 英語の native speakers ではない読者に対しては, 数学的内容の難しさに輪をかけて本書の敷居を高くする原因になってしまっているかもしれない.

[THI] の Acknowledgments にもあるように[1), 評者は, 1998 年に, [THI] の第一版をベースにして, 当時, 著者の Kanamori 氏が準備を進めていたこの第二版のために書きくわえられつつあった改訂や拡張を取り込んだ, 日本語への翻訳 [8] を上梓している. この翻訳は現在売り切れになっていて, ネット上では法外な値段がつけられていることもあるようである. こんなことなら著者割引で買いためておけば高く売って大儲けができたのにと思っても後の祭である.

そういうわけで, 翻訳者という立場からのバイアスがかかってしまう可能性もあり, 書評の執筆は多少躊躇したのだが, 本書の内容も含め日本では集合論が一般には全く知られていないので, むしろこの研究の現状の紹介をかねて書評を書くべきではないかとも思い, 敢えてお引受けした次第である.

**1　順序数, 基数, 巨大基数**　“巨大基数” (定冠詞がデフォルトでついているわけでなく, 一般論としては複数形である) という用語について理解するためには, まず, 基数の概念を知る必要があるが, そのためには, 順序数の理解が必要になる. また, 以下の記述でもわかるように, 旧来の数学とは異なり, 集合論では数理論理学の知識がいたるところで活用される. なお, 以下で用いている現代的な集合論の基本的な概念については, 評者の [6] も参照されたい.

[THI] では, 順序数や基数の知識は前提とされていて, “順序数” (ordinals), “基数” (cardinals) というキーワードは巻末の索引にも含まれていない. また, “巨大基数” (large cardinals) や “巨大基数の仮説” (large cardinal hypotheses) などの概念もすべて既知のものとして仮定されており, これらのキーワードも索引には見出せない. ただし, Introduction のはじめには, 本書のタイトルである

“The higher infinite” (以下の引用文 [a] からも読みとれるように，これは “巨大基数の存在” の類語と考えてよいだろう) について，

> [a] The higher infinite refers to the lofty reaches of the infinite cardinalities of set theory as charted out by *large cardinal hypotheses*. These hypotheses posit cardinals that prescribe their own transcendence over smaller cardinals and provide a superstructure for the analysis of strong propositions. As such they are the rightful heirs to the two main legacies of Georg Cantor, founder of set theory: the extension of number into the infinite and the investigation of definable sets of reals.

という説明がある．ニューヨーク市立大学の Victoria Gitman と Joel Hamkins 両氏は，彼らの管理している巨大基数の集合論に関する web page [1] を “Cantor’s attic” と名付けているが，この命名は上に引用した Introduction の初めを起想させる．

[THI] では，数理論理学についての基礎知識も仮定されている．例えば，不完全性定理は，順序数や基数とは異なり，索引に含まれている．しかし，索引の指している場所にあるのは，不完全性定理自身についての解説や証明ではなく，歴史的な文脈での不完全性定理に関する記述のみである．

そういうわけで，本書は，集合論の基礎 (これは，たとえば学部の「集合と位相」などという題の講義で通常教えられる内容とは，重複はゼロではないにしても全く異るものである) や数理論理学の基礎の素養のない読者が生半可な読み方をしても歯がたたないのではないかと思う．

一方，[THI] は，1994 年の初版の出版以来，巨大基数の理論のスタンダートなリファレンスとみなされており，この分野での研究論文の多くで，

> [b] For the defiition of the set-theoretic notions involved, see [11] or [12] ([評者注]: [11], [12] はそれぞれ本書評の文献表の [7] と [THI]).　— J. Bagaria and M. Magidor [2]

> [c] ... This will allow us to use representation results about the codomain of such embeddings; a good reference for these is [10] ([評者注]: [10] は [THI] のこと).　— A. Brooke-Taylor [3]

などとして引用されている．

数学的内容だけでなく，[THI] は，集合論の最新の研究の結果についての哲学的考察を促してきたとも言えそうである．最近，欧米では，集合論の最新研究の技術的な内容に対しても踏み込んだ議論のできる数学の哲学の若い研究者が育ってきているが，このような現象は，[THI] が出版されなかったとしたら考えられなかったのではないかと思う．もちろん，本書は数学としての巨大基数の理論の研究者も多く育ててきている．上の引用文 [c] の Brooke-Taylor 氏を含め，現在この分野で活躍している若手の研究者で，[THI] を読んで育った人は少なくないだろう．

引用文 [a] に戻ると，ここでの “the extension of number into the infinite” は，カントルによる順序数や基数の理論のことを頭に置いて述べられているわけだが，これらの概念の現代的な枠組での導入が日本の大学や大学院で教えられることは，評者の回りなどのごく少数の例外を除くと，全くないと言っていいだろう．そのため，本書について日本語で論じようとすると，これらの概念の (現代の集合論での) 扱いについての説明から始めるしかなさそうである[2)]．

そこで，以下でごくかいつまんだ説明を試みるが，順序数や基数についての理論の構築をきちんと見たい方は，評者による [5] の第 2 章や[3)]，集合論の標準的な教科書である [9] (または藤田博司氏による [9] の翻訳) の Chapter I などを参照されたい．

順序数や基数は，集合論で現在スタンダードになっている自然数の定義を自然に拡張することで得られる．集合論では，0 を空集合 $\emptyset$ のこととし，数 $n$ (集合論ではすべてのオブジェクトは集合なので，$n$ も集合である) に対し，

(1.1) $n+1$ を $n\cup\{n\}$ として定義する

ことで自然数が導入される．これにより 0, 1, 2, 3, 4,... はそれぞれ，

(1.2) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$,...

のこととなる．特に，この構成から，各自然数 $n$ は，$n=\{0,1,2,...,n-1\}$ とあらわすことができることがわかる．これらの "自然数" $n$ は次の性質で特徴づけられる:

(1.3) $n$ は $\in$ に関して遷移的である．つまり，任意の $\ell, m$ に対し，$m\in n$ かつ $\ell\in m$ なら，$\ell\in n$ が常に成り立つ．

(1.4) $\in$ は $n$ の要素の上の整列順序となっている[4)]．

(1.5) $m$ を $n$ または $m$ の要素の任意の 1 つとするとき，$m\neq\emptyset$ なら，((1.1) での "+1" に関して) $m'+1=m$ となるような $m'$ が存在する (つまり，$n$ の下には，$n$ 上の線形順序 $\in$ の意味での極限は存在しない)．

この特徴付けを自然数の定義と思いなおすと，この性質を持つ集合の全体を自然数の全体 $\mathbb{N}$ として定義することができる．ただし，$\mathbb{N}$ が集合 (つまり他の集合の要素となっているかどうかを議論できるようなオブジェクト) になることは別途に保証しなければならず，集合論の公理系 (たとえば現在標準になっているツェルメロ・フレンケルの公理系 (ZF) に選択公理 (AC) を加えたもの (ZFC)) には，(実質的には) $\mathbb{N}$ が集合であることを主張する「無限公理」とよばれる公理が含まれている．$\mathbb{N}$ 自身は，0, 1, 2 $\cdots$ の極限数と考えることができる．つまり $\alpha=\mathbb{N}$ は，(1.5) を除いた，(1.3) と (1.4) に対応する次の (1.6) と (1.7) を満たす:

(1.6) $\alpha$ は $\in$ に関して遷移的である．つまり，任意の $\beta,\gamma$ に対し，$\gamma\in\alpha$ かつ $\beta\in\gamma$ なら，$\beta\in\alpha$ が常に成り立つ．

(1.7) $\in$ は $\alpha$ 上の整列順序になっている．

上のような性質を持つ $\alpha$ を順序数とよぶ．すべての順序数 $\alpha$ は定義から $\in$ に関して整列されるが，$\alpha$ が $\in$ に関して $\alpha$ より真に小さな順序数を集めたものになっていることも容易に示せる．すべての自然数は順序数で，($\in$ に関して) すべての自然数より大きな最小の順序数 (最小の無限順序数) が $\mathbb{N}$ になる．ただし， $\mathbb{N}$ を順序数ととらえるときには，これを $\omega$ とあらわすことが多い．順序数には，$\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$ という形をした ($\in$ による順序に関して) その直前の順序数 (ここでは $\alpha$) の存在するものがある一方，$\omega$ のように，そのような順序数の存在しないものもある．後者の順序数を極限順序数とよぶ．

順序数の全体を On とあらわす．On は真のクラスになるが，$\in$ に関して整列順序になっている (つまり，$\in$ は On 上の全順序になっており，どんなクラス $X\subseteq\mathrm{On}$ に対しても，$X$ の $\in$ に関して最小な要素が存在する)．このことから，順序数上の帰納法 (超限帰納法) による証明や，再帰的定義が可能となる．

自然数では，順序数と基数の概念に対応する実体は，どちらも自然数と一致する．一方，無限順序数では，基数の概念は順序数の概念と大きく異るものになる．このことは，$\omega$ と $\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$ の

間に全単射が存在することからも理解できるだろう: $\omega$ と $\omega+1$ は異る順序数だが，それらの間に全単射が存在するという意味で，$\omega$ と $\omega+1$ の集合としてのサイズは同じなので，これらを異る基数と考えることはできない．そこで，

(1.8)　順序数 $\alpha$ が基数であるとは，任意の順序数 $\beta\in\alpha$ に対し，$\beta$ から $\alpha$ への全単射が存在しないことである

とする．この定義から，例えば，$\omega$ は最小の無限基数になり $\omega+1$ は基数でない．カントルの定理と順序数の $\in$ に関する順序の整列性から，どの基数 $\kappa$ に対しても，この基数の次に大きな基数 $\kappa^+$ が存在することがわかる．このことと，基数の極限がまた基数になることから，次のような On を添字とした無限基数の上昇的な数え上げができることがわかる:

(1.9)　$\aleph_0=\omega$ とする;

(1.10)　順序数 $\alpha$ に対し，$\aleph_\alpha$ が確定しているとき，$\aleph_{\alpha+1}$ を $(\aleph_\alpha)^+$ とする;

(1.11)　$\gamma$ が極限順序数で，$\aleph_\alpha,\ \alpha<\gamma$ が全部確定しているとき，$\aleph_\gamma=\lim\{\aleph_\alpha : \alpha<\gamma\}$ $(=\bigcup\{\aleph_\alpha : \alpha<\gamma\})$ とする

として基数の列 $\aleph_\alpha,\ \alpha\in\mathrm{On}$ を定義すると，$\{\aleph_\alpha : \alpha\in\mathrm{On}\}=\{\kappa : \kappa$ は無限基数 $\}$ となる．選択公理の下では，すべての集合を整列することができるので，このことと上の基数の定義から，各集合 $x$ に対して $x$ との間に全単射の存在するような基数 $\kappa$ がちょうど 1 つ存在することがわかる．このような基数 $\kappa$ を $x$ のサイズ，あるいは $x$ の濃度とよぶ．

ZF のもとでは，On の上での再帰的定義により，次のようにしてすべての集合を生成することができる:

(1.12)　$V_0=\emptyset$ とする;

(1.13)　$V_\alpha$ がすでに確定しているとき，$V_{\alpha+1}=V_\alpha\cup\mathcal{P}(V_\alpha)$ とし;

(1.14)　$\gamma$ が極限順序数で，$V_\alpha,\ \alpha<\gamma$ がすでに全部確定しているとき，$V_\gamma=\bigcup\{V_\alpha : \alpha<\gamma\}$ とする，

として $V_\alpha,\ \alpha\in\mathrm{On}$ を定義すると，すべての集合 $x$ に対して $x\in V_\alpha$ となるような順序数 $\alpha$ が存在する．つまり，$V$ ですべての集合からなるクラスをあらわすことにすると，$V=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}V_\alpha$ が成り立つ．ただし，集合 $x$ に対し，$\mathcal{P}(x)$ で $x$ の冪集合 ($x$ の部分集合をすべて集めた集合) をあらわしている．$V_\alpha,\ \alpha\in\mathrm{On}$ は ($V$ の) 累積的階層とよばれる．

同様の階層によってゲーデルによる構成的集合の全体からなるクラス $L$ を定義することができる:

(1.15)　$L_0=\emptyset$ とする;

(1.16)　$L_\alpha$ がすでに確定しているとき，$L_{\alpha+1}=L_\alpha\cup\mathrm{def}(L_\alpha)$ とし;

(1.17)　$\gamma$ が極限順序数で，$L_\alpha,\ \alpha<\gamma$ がすでに全部確定しているとき，$L_\gamma=\bigcup\{L_\alpha : \alpha<\gamma\}$ とする，

として $L=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}L_\alpha$ とする．ただし，$\mathrm{def}(L_\alpha)$ は構造 $(L_\alpha,\in)$ で[5]，$L_\alpha$ のある要素 $a$ をパラメタとして ZF のある論理式 $\varphi$ により $\{x\in L_\alpha : (L_\alpha,\in)\models\varphi(x,a)\}$ として定義されるような集合の全体をあらわす．

ZFC の各論理式 $\varphi$ や，一般連続体仮説 (GCH) (を表現する論理式) $\varphi$ に対し，

(1.18) ZFC で，“$(L, \in) \models \varphi$” が証明できる．

このことから，ZFC 上の GCH の相対的無矛盾性が証明される．

$L$ はすべての順序数を含み，推移的である (つまり $x \in L$ で $y \in x$ なら $y \in L$ が常に成り立つ)．すべての順序数を含み推移的で (1.18) に対応する主張が少なくとも ZF の論理式のすべてに対して成り立つようなものは内部モデルとよばれる ($L$ については，[THI] では，関連する話題について §3 で証明ぬきで復習している)．

$L$ と同様の構成法により，

(1.19) $L_0(\mathbb{R}) = tc(\mathbb{R})$ とする;

(1.20) $L_\alpha(\mathbb{R})$ がすでに確定しているとき，$L_{\alpha+1}(\mathbb{R}) = L_\alpha \cup \mathrm{def}(L_\alpha(\mathbb{R}))$ とし;

(1.21) $\gamma$ が極限順序数で，$L_\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha < \gamma$ がすでに全部確定しているとき，
$L_\gamma(\mathbb{R}) = \bigcup\{L_\alpha(\mathbb{R}) : \alpha < \gamma\}$ とし，

$L(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha(\mathbb{R})$ として得られる $L(\mathbb{R})$ は，すべての ZF の論理式を，(1.18) のような意味で満たすものになっている．一方 $L(\mathbb{R})$ は一般には AC を満たさない．$L(\mathbb{R})$ は近年の巨大基数の理論で非常によく取り上げられる内部モデルである．[THI] でも，オリジナルの論文では，hereditarily ordinal definable な集合のなす内部モデルを用いて議論されていた Solovay の定理 (Theorem 11.1) も $L(\mathbb{R})$ での証明に書きかえられて議論されており，$L(\mathbb{R})$ の中心的な役割が強調されている．

基数 $\kappa$ のうち $\kappa = \lambda^+$ となるような基数 $\lambda$ の存在しないものを極限基数とよぶ．極限基数は，ある極限順序数 $\gamma$ により $\aleph_\gamma$ とあらわせる基数である．特に極限基数 $\kappa$ が，$\kappa = \aleph_\kappa$ となるとき (つまり $\kappa$ が正則な極限基数であるとき)，$\kappa$ は弱到達不可能基数であるという ([THI] Chapter 1, §1)．弱到達不可能基数は，[THI] で考察されている巨大基数のうち一番 “小さい” ものである．ただし，この “小さい” は以下のような意味であり，必ずしも $\in$ に関する基数の大きさの比較に関する小ささではない．

第 2 不完全性定理により，ZFC が矛盾しないことの (少なくとも通常の意味で数学的な) 証明は存在しえない．もちろん現在までに知られている ZFC の中で展開される (有史以来の数理論理学を用いない旧来の数学をすべて含む) 数学の整合性は，ZFC の無矛盾性を強く示唆する．もし万が一 ZFC が矛盾するなら，すべての結論がそれから導けることになるが，一方，ZFC が矛盾しないなら，弱到達不可能基数の存在は ZFC から証明できない: $\kappa$ を弱到達不可能基数とすると，

(1.22) $(L_\kappa, \in) \models$ ZFC

が成り立つ．したがって，もし，ZFC から弱到達不可能基数の存在が証明できたとすると，ZFC で ZFC のモデルの存在が証明できることになり，このことから，ZFC の無矛盾性を表明する論理式が ZFC で証明できてしまうことになる．このことから，第 2 不完全性定理により，ZFC からの矛盾の証明が得られるので， これは ZFC が矛盾しない，という仮定に矛盾である．このような状況では，“ZFC が無矛盾とすると” という (自明な) 条件を省略して，たとえばここでの場合には “ZFC から弱到達不可能基数の存在は証明できない” というように表現することが多い．

基数 $\lambda$ に対して，$\mathcal{P}(\lambda)$ の濃度を $2^\lambda$ とあらわす．特に $2^{\aleph_0}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度 (連続体濃度) になる．弱到達不可能基数 $\kappa$ が，対応 $\lambda \mapsto 2^\lambda$ に対して閉じているとき，つまりすべての基数 $\lambda \in \kappa$ に対し，$2^\lambda \in \kappa$ になるとき，$\kappa$ を到達不可能基数とよぶ．すべての到達不可能基数は弱到

達不可能なので，この意味で到達不可能基数は弱到達不可能基数より “大きい” が，1 つの到達不可能基数 $\kappa$ をとったときこれより大きな弱到達不可能基数 $\kappa'$ で到達不可能基数ではないものが存在することはありえる．他方，弱到達不可能基数は連続体濃度以下でありえるが，到達不可能基数は，定義から連続体濃度以下ではあえない．

弱到達不可能基数の存在が ZFC から証明できないので，到達不可能基数の存在も ZFC からは証明できないが，このことは $\kappa$ が到達不可能基数のとき $(V_\kappa, \in)$ が ZFC のモデルになる，という事実 ([THI], Proposition 1.2) からも直接見ることかができる．[a] で，“their own transcendence over smaller cardinals” といっていることの最も基本的な必要条件として，この $V_\kappa$ が ZFC のモデルになることをあげることができるだろう．実際，弱到達不可能基数やその他の別の巨大基数の概念に付随してあらわれている少数の例外を除くと，その他すべての巨大基数の性質は，このことを導くものになっている．

$L$ では，GCH が成り立つことから，ある基数 $\kappa$ が到達不可能基数であることと弱到達不可能基数であることは同値である．また $\kappa$ が弱到達不可能基数なら， $\kappa$ は $L$ でも弱到達不可能基数になる．これらのことから，ZFC に弱到達不可能基数の存在の主張を加えた公理系の無矛盾性は，ZFC に到達不可能基数の存在の主張を加えた主張の無矛盾性と同値になることがわかる (この事実は [THI] では explicit には述べられていないが，関連するステートメントが Exercise 3.1 として述べられている)．このことは，弱到達不可能基数の存在の主張を ZFC に加えた体系と到達不可能基数の存在の主張を ZFC に加えた体系は，無矛盾等価 (equiconsistent) であると表現される．ベースになっている理論が ZFC であることが明らかな場合には，「弱到達不可能基数の存在の主張と到達不可能基数の存在の主張は無矛盾等価である」というような言い方もする．

$\mathcal{P}(\kappa)$ 上に $\sigma$-完備で (濃度に関し) 一様な二値測度が存在するとき $\kappa$ を可測基数とよぶ ([THI], p.26)．到達不可能基数とは異なり，可測基数は $V = L$ と両立しない ([THI], Corollary 5.5)．しかも，可測基数の存在の下では，$V$ と $L$ は大域的に非常に異るものになることが示せる (たとえば [THI], Theorem 9.1)．

可測基数は，到達不可能基数であるが ([THI], Theorem 2.8) さらに，$\kappa$ が可測基数なら，到達不可能基数は $\kappa$ の下に $\kappa$ と共終に存在する ([THI], Proposition 6.6 から帰結でされる)．そこで $\kappa_0$ と $\kappa_1$ を $\kappa_0 \in \kappa_1$ となる 2 つの到達不可能基数とすると，$V_{\kappa_1}$ で $\kappa_0$ は到達不可能基数となるから，ZFC に可測基数の存在の主張 (ここではこれを MC とよぶことにする) を公理として付け加えた公理系から，ZFC に到達不可能基数の存在を主張する公理 (ここではこれを IC とよぶことにする) の無矛盾性が証明できる．特に，このことから，前と同様に第 2 不完全性定理により，ZFC + IC から MC は証明できないことがわかる．公理 A と公理 B について，ZFC + A から ZFC+ B の無矛盾性の証明ができるとき，公理 A は公理 B より無矛盾性の強さ (consistency strength) が強い，という．

2 つの巨大基数の性質 $A_0(\cdot)$ と $A_1(\cdot)$ があるとき，“$A_1$ は $A_0$ より大きい” というような言い方をしたときには，その意味するところは，$\forall\kappa\,(A_1(\kappa) \rightarrow A_0(\kappa))$ が ZFC で証明できる，あるいは，$\exists\kappa\,A_1(\kappa)$ が $\exists\kappa\,A_0(\kappa)$ より ZFC 上での無矛盾性の強さが強い，または，これらの両方である．

**2　大きな巨大基数と，もっと大きな巨大基数**　[THI] の p.472 には，代表的な巨大基数 (の性質) について，上で述べたような意味での含意関係や無矛盾性の強さに関する巨大基数 (の性質) の大きさの比較をまとめたチャートが描かれている．ここには，29 の巨大基数の概念があげられている．そ

のうち一番無矛盾性の強さの強いものは，$0 = 1$ (矛盾そのもの) である．

$0 = 1$ は除くことにしても，これらの基数はいくつかのグループに分類することができる．

1 つの分類としては: 1. 到達不可能基数のように $V = L$ と共存できるもの，2. 可測基数のように，$V = L$ とは共存できないが，その “transcendency” は主にそれより小さい基数に対する影響としてとらえられるもの，3. その “transcendency” が集合論のユニヴァース $V$ 全体に影響を及ぼすもの (Woodin cardinals, strongly compact cardinals, supercompact cardinals, といった巨大基数がこれらに相当する); 4. さらに大きな，ひょっとすると矛盾しているかもしれない (つまり $0 = 1$ と同値かもしれない) もっと無矛盾性の強さの強い基数の概念 (Vopěnka's Principle, huge, $I_0 \sim I_3$ など).

[THI] で大きなウエイトの置かれているのは，上の分類では 2. と 3. に属す巨大基数の存在原理で，そこでの記述のライトモティーフの 1 つとなっているのは，実数の集合の正則性の性質 (regularity properties) の問題である．ここで正則性の性質といっているのは，1 つの確定した性質のことではなく，[THI] の §12 の初めにある記述集合論についての説明での言葉を借りれば，

> [d] ··· a major incentive for the subject has been to investigate the extent of the *regularity properties*, properties indicative of well-behaved sets of reals of which Lebesgue measurability, the Baire property, and the perfect set property are the prominent examples.

という意味である．ここでは，ルベーグ可測性に限って [THI] での話の流れを追ってみることにする．

$n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $X$ が射影集合であるとは，$X$ が，ある $m \geq n$ に対する $\mathbb{R}^m$ のボレル集合から出発して，射影と補集合をとる操作を有限回施すことによって得られるような集合になっていることである．

「すべての射影集合が可測である」という主張は，到達不可能基数の存在と無矛盾等価である ([THI] の Theorem 11.1 のソロベイの結果の証明 (§11 の後半) と，Theorem 11.6 の後で触れられている Shelah の結果から出る)． ただし，[THI] では，この無矛盾等価性は，射影集合の理論の基礎について述べている §12〜§15 より前に置かれているため，ここで述べたような形では述べられていない．

一方，$V = L$ のもとでは，$\mathbb{R}$ の整列順序 ($\subseteq \mathbb{R}^2$) で射影集合となるものが存在するが ($\Delta^1_2$ 集合にとれる)，フビニの定理から，この整列順序は $\mathbb{R}^2$ の非可測部分集合である ([THI], Corollary 13.10).

§14〜§15 では射影集合の階層の下方での集合の正則性と上で述べた巨大基数の分類での 2. に属す巨大基数の無矛盾性の強さを有する仮定との関係について述べられている．

しかし，[THI] に引用されている結果のうちの圧巻は，Chapter 6, §32 に述べられているものであろう．ここでは，十分に大きな巨大基数の存在からすべての射影集合のルベーグ可測性が導かれることを主張する Shelah-Woodin の結果 ([THI], Theorem 32.9)，さらにそれを改良する，巨大基数の存在の下で，Axiom of Determinacy (AD) とよばれる，すべての実数が強い正則性を持つことを帰結する公理が $L(\mathbb{R})$ で成り立つことを示す Woodin による定理 (Corollary 32.14) が，証明のアイデアの一部の説明とともに引用されている．Woodin の ZF + AD との equiconsistent になる巨大基数の命題 (無限個の Woodin 基数の存在) についてもごく短い証明のアイデアのスケッチが与えられているだけである．本書の多くの箇所では，証明が省略されたときに，“see volume II” という注意書きが加えられている．次の節で述べるような状況から，この volume II が実際に刊行されることになるかどうはまだ未確定であるように思える．しかし，この Chapter 6 では，未来へのリファレンスは，volume II ではなく，Martin による本 [∞] と Woodin-Mathias-Hauser による本 [∞] になっ

ている．

[THI] のもう 1 つのライトモティーフと言えるテーマには無限組合せ論がある．Chapter 2 は，無限組合せ論が考察の中心になっており，前出の巨大基数の分類では，主に 1. から 2. に属すような巨大基数が，無限組合せ論の視点から論じられている．Chapter 5 の §25 では，同じ分類では 3. に属す巨大基数と関連する $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の組合せ論が論じられている[6)]．

**3　巨大基数の理論への“入門書”としての [THI]**　[THI] は 500 ページ以上の大著であるが，巨大基数に関するテーマがすべてこの本の中に網羅的に述べられているわけではない．たとえば generic ultraproduct は巨大基数の研究で非常に重要な役割をはたすテクニックであるが，これに関しては，§16 (p.210) で

> [e] Solovay's paper [71] was particularly influential, for in establishing 16.1 not only did it broaden the study of large cardinal properties from ultrafilters to ideals, but it also described how forcing and ultrapowers can be combined in a useful technique now known as *generic ultrapowers*. Owing to various developments in the 1970's generic ultrapowers was to emerge as a standard technique of wide applicability, and it is taken up against a broader backdrop in volume II.

と書いてあるだけである．

実は，generic ultrapower の構成では，saturated な ideal を利用すると well-founded な generic ultrapower が得られることが知られているのだが，ここの部分では，そのような説明なしに，上の引用文 [e] のすぐ後に，

> [f] What played a key role in this area and soon became a staple feature of large cardinal theory is the concept of *saturated ideal*, formulated and studied by Tarski [45].

という説明が続いている．しかし，generic ultrapower に関する上で述べたような事情を知らない読者にとっては，この文章の展開の意味をくみとることは困難ではないだろうか．

引用文 [e] の終りでも述べられているように，このような補足説明の必要は，多くの場所で volume II に先送りされているのだが，この volume II は，まだ出版されていないし，すぐに出版される気配もないように思える．Volume II が出版されにくい状況ができていることの事情の 1 つに，[THI] が出版されてから後に，[THI] の著者も編集にかかわっている，分厚い 3 巻からなる Handbook of Set Theory [4] が刊行されたことがあげられるだろう．

[4] は volume II に含まれるべき話題を既にほぼすべてカバーしているように見える．さらにこの Handbook の執筆にかかわる著者や試読者たちの議論による研究の進展や，これが出版されたことで，集合論の研究の進展にさらに拍車がかかるにちがいないことも考えに入れると，そのような進展をさらに乗り越えてこれから書かれなくてはならない volume II の執筆は，限りなく困難なものになってしまっているのではないかと考えられるのある．

この書評の初めでも触れた Gitman と Hamkins 両氏による “Cantor's attic” は Wikipedia のソフトウエアを用いて実現されたハイパーテキストである．現在のところ，ここにリンクされている文章の多くは，巨大基数の定義や基本性質を述べた簡素なテキストにすぎないが，ネット上のハイパーテキストを複数の著者が拡張するような形で，本書の volume II にかわるようなものを構築する，ということも考えられるかもしれない．また，“Cantor's attic” 自身がそのようなものに成長する可能

性もゼロではないように思える．

[THI] は，数学研究の最先端の話題を，テクニカルな側面に集中して淡々と語るのではなく，20 世紀の初頭からの集合論の研究の進展を，数理論理学や抽象解析学など関連する他の分野の研究の進展とともに歴史的，数学思想史にも踏み込んで説明しており，時には研究の発展にともなうもっと人間的なドラマのようなものにまでも触れる記述になっている．しかし，そのようなナレーションと数学的な内容のバランスは非常によくとれている．

これは，たとえば，グラフ理論での数学的な話題と，それをとりまく数学者たちの人間ドラマを織り交ぜた記述の試みられている Soifer [10] が，そのようなスタイルをとることで数学的な記述の方は冗長になってしまい，全体としては限りなく内輪話に近いものになってしまっているのと比較してみると歴然であろう7)．

とは言え，[THI] でも，数学的な記述の明晰さが，歴史的な発展を織り交ぜながら記述する，というスタイルの犠牲になっている部分も皆無ではないようにも思える．たとえば，上の第 1 節で触れた Solovay の定理 Theorem 11.1 は，強制法の理論の Cohen による発明の直後に得られた結果である，という位置付けから，この場所で説明されているわけだが，むしろ記述集合論の基礎概念の説明の後に置いて，そこでの語彙を用いた記述を添えることで，§32 での結果との関連をより明確にできたかもしれない．ただし，これについても，[THI] では，Shelah による射影集合のルベーグ可測性の主張の到達不可能基数の存在と無矛盾等価の証明が “see volume II” に先送りされているので，volume II でここで指摘したことの改良修正が行なえる可能性が残っている．似たようなことは，先の引用文 [e] と [f] のところで述べたことでも言える．こうして見てくると，上で指摘した困難があるとしても，volume II がいずれ書かれて本書を補完することは，強く望まれることであるようにも思えてくる．

本書評の初めの方で「集合論の基礎や数理論理学の基礎の素養のない読者が生半可な読み方をしても歯がたたないのではないかと思う」と書いたが，[THI] のうち Introduction と Appendix は，集合論の発展の歴史や数学の哲学の視点からの考察が中心になっており，技術的な予備知識がなくても，ここに書かれている巨大基数の集合論の研究の意義についての議論の輪郭をつかむことはできるだろう．本書の読解の前提となる基礎知識のリソースが十分でないと感じている読者は，この部分を読んでみてから，本文を「生半可」でない読み方で読むことにするかどうかの決心をすればよいのではないだろうか．

少なくとも，評者自身は，現代の集合論は非常にスリリングで魅力的な研究分野であり，この分野を知るために，努力を惜しまず [THI] を精読してみるだけの価値はいずれにしてもあるはずだと思っているし，本書の Introduction や Appendix からはこの分野の意義や魅力が十二分に読みとれるはずだとも考えている．

## 注　　釈

1) [THI] の Corrected Second Edition の Acknowledgments には，筑波大学の塩谷真弘氏や，現在神戸大学の私の研究グループに研究員として所属している Andrew Brooke-Taylor 氏の名前もあがっている．

2) 引用文 [a] での “definable sets of reals” の方は，後述の射影集合や，$L(\mathbb{R})$ の要素となっている実数の集合のことであるが，射影集合については，[THI] の §12〜§15 で self-contained な記述がなされている．

3) 実際，[ 5 ] の執筆の 1 つの目標は，[THI] や [ 7 ] など集合論の基礎的な知識を前提とした教科書への橋渡しになるものを日本語で提供することであった．

4) $\leq$ が集合 $X$ 上の整列順序であるとは，$\leq$ は $X$ 上の線形順序で，すべての $Y \subseteq X$ に対し，$Y$ の $\leq$ に関する最小の要素が存在することをいう．

5) 集合 (あるいはクラス) $X$ に対し，$(X, \in)$ と書いたときには，$\in$ は $X$ 上の二項関係 $\in \cap X^2 =$

$\{\langle x, y\rangle : x, y \in X,\ x \in y\}$ をあらわすことにする．

6) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 組合せ論は日本での集合論研究の重点的なテーマの 1 つであり，この節では，阿部，塩谷，松原，加茂といった日本人の研究者の結果が多く引用されている．

7) ただし，[10] は，ポピュラー・サイエンスと数学の啓蒙書の間に属すような “楽しい読みもの” ということでなら，非常に優れた本であると言えるだろう．

## 文　献


[1] Victoria Gitman and Joel Hamkins, Cantor's attic,
http://cantorsattic.info/Cantor%27s_Attic

[2] Joan Bagaria and Menachem Magidor, Group radicals and strongly compact cardinals, The Transactions of the American Mathematical Society, to appear.

[3] Andrew Brooke-Taylor, Large cardinals and definable well-orderings of the universe, Journal of Symbolic Logic, 74, no.2 (2009), 641–654.

[4] Matthew Foreman and Akihiro Kanamori (Eds.), Handbook of Set Theory, Springer (2010).

[5] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，田中一之 編，ゲーデルと 20 世紀の論理学，第 4 巻，東京大学出版会 (2007) に第 I 部として収録.

[6] 渕野 昌，公理的集合論 — これから学ぶ人のために，本誌，65 巻 4 号 (2013) 411–421. 拡張版:
https://fuchino.ddo.jp/papers/axiomatic-set-th-unabridged.pdf

[7] Thomas Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, Springer (2001/2006).

[8] Akihiro Kanamori, 渕野 昌 訳, The Higher Infinite（巨大基数の集合論）シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998).

[9] Kenneth Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980).
日本語訳: K. キューネン著， 藤田 博司 訳，集合論 — 独立性証明への案内，日本評論社 (2008).

[10] Alexander Soifer, The Mathematical Coloring Book, Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators, Springer (2009).


[付記 Sun Nov 7 14:17:32 2021] 筆者は，本稿の執筆以降，修士課程レベルの集合論の入門講義を何回か行なっているが，そのような講義の講義録:
https://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss2019.pdf
も読者の参考になるだろう．なお筆者は，この講義録の内容も含む，集合論，特に強制法の理論の入門書を執筆中である．この入門書で取り上げることになる，内容は，以下の講義録にも含まれている:
https://fuchino.ddo.jp/notes/forcing-outline-katowice-2017.pdf
https://fuchino.ddo.jp/notes/iterated-forcing-katowice-2018.pdf

(2013 年 1 月 31 日提出)
(ふちの さかえ・神戸大学)