射影代数, κ-距離付け可能空間から コーエン・モデルへ

This slide is NOT created by ©PowerPoint.

2007年09月27日 (02:00) 版　　渕野 昌(中部大学, fuchino@math.cs.kitami-it.ac.jp)

2007年9月24日 東北大学に於ける日本数学会2007年秋季総合分科会での特別講演

本講演では，1990年代以来，講演者が何人かの共同研究者と行なってきた，表題のキーワードたちを結びつける一連の研究の流れについて述べ，そこで得られた主要な結果（の一部）を概説する．

本講演の予稿の update 版と，このスライドのファイルは，以下からダウンロード可能である:

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/papers/tokubetsu07.pdf`
`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/papers/tokubetsu07slide.pdf`

射影的代数 (projective algebras)

◎ ある代数系で，代数 B が射影的 (projective) であるとは，すべての morphism $f : B \to A$ と，epimorphism $g : C \twoheadrightarrow A$ に対し，$f = g \circ h$ となるような morphism $h : B \to C$ が常に存在することである:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

射影的なブール代数の理論の研究は，次の [1] で始められ，
[2] で（ほとんど？）完成した:

[1] P.R. Halmos, Injective and projective Boolean algebras, Proc. Symp. Pure Math.,II (1963).

[2] S. Koppelberg, Projective Boolean Algebras, in: *Handbook of Boolean Algebras* (1989).

定理 1　無限ブール代数 B に対して，次は同値である:

(1) B は射影的である.

(2) B は自由ブール代数のレトラクトである（つまり, $B \underset{\circlearrowleft_{id}}{\rightleftarrows} \mathrm{Fr}\,|B|$ ）

(3) $B \oplus \mathrm{Fr}\,|B|$ は自由ブール代数である.

(4) (R. Haydon, S. Koppelberg [2]) 濃度が $|B|$ 未満の B の部分ブール代数の上昇列 $(B_\alpha)_{\alpha<\delta}$ で次を満たすものが存在する:
すべての $\alpha < \delta$ に対し，(0) α が極限順序数なら，$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$;
(i) $B_\alpha \leq_{\mathrm{rc}} B$; (ii) $B_{\alpha+1}$ は B_α 上可算生成される; (iii) $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha = B$.

◎ ブール代数 A, B に対し，$A \oplus B$ で A と B の自由積をあらわす.

◎ $A \leq_{\mathrm{rc}} B$ は「A は B の relatively complete な部分代数である」を表している．A が B の relatively complete な部分代数とは，A は B の部分代数で，すべての $b \in B$ に対し $\{a \in A : a \leq_A b\}$ が（A の中に）最大元を持つことである.

Freese-Nation Property

◎ ブール代数（より一般には半順序） B が Freese-Nation Property（以下 FNP とも略）を満たす(あるいは，持つ）とは，写像 $f : B \to [B]^{<\aleph_0}$ で，次の性質を持つものが存在すること:

(†) 任意の $a, b \in B, a \leq_B b$ に対し，$c \in f(a) \cap f(b)$ で $a \leq_B c \leq_B b$ となるものが存在する．

◎ 集合 X に対し $[X]^{<\aleph_0}$ で X の有限部分集合の全体からなる集合（族）を表す.

定理 2 すべての射影的ブール代数は FNP を持つ．

証明. 自由ブール代数は FNP を持つ（$b \in \mathrm{Fr}\,X$ に対し， $x \in [X]^{<\aleph_0}$ を b を生成するようにとり，$f(b)$ として x の生成する $\mathrm{Fr}\,X$ の有限部分ブール代数をればよい）．B が FNP を持つなら，B のレトラクトも FNP を持つことも容易に示せるから，定理 1, (2) により定理が結論できる． □ **(定理 2)**

Freese-Nation Property

定理 2　すべての射影的ブール代数は FNP を持つ.

FNP を持つブール代数の全体のクラスは，射影的なブール代数のクラスと一致しない:

定理 3 (L.B. Shapiro, 1976) すべての $\kappa > \aleph_1$ に対し，濃度が κ 以上の射影的でない FNP を持つブール代数が存在する.

証明のアイデア: 濃度が $\aleph_1$ 以上の射影的なブール代数の topological dual の hyper space (closed sets を点集合として適当な位相を入れたもの) の Boolean dual がそのような例になっている. ❏

以下で見るように，“$\kappa > \aleph_1$” という条件は本質的である.

Freese-Nation Property を持つブール代数の特徴付け

定理 4 (L. Heindorf) 無限ブール代数 B に対し，次は同値である:

(1) B は FNP を持つ．

(2) B の dual space は κ-距離付け可能 (κ-metrizable) である．

(3) $\{A \in [B]^{\aleph_0} : A \leq_{\mathrm{rc}} B\}$ は $[B]^{\aleph_0}$ の club な部分集合を含む（この性質を「B は openly generated である」と表現することもある）．

(4) B の濃度 $|B|$ 未満の部分代数の上昇列 $(B_\alpha)_{\alpha<\delta}$ で以下を満たすものが存在する:
すべての $\alpha < \delta$ に対し，(0) α が極限順序数なら，$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$; (i) $B_\alpha \leq_{\mathrm{rc}} B$; (ii) $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha = B$.

用語の解説

◎ (E.V. Ščepin) コンパクト・ハウスドルフ空間 X が κ-距離付け可能 (κ-metrizable) とは，以下のような $\rho : X \times RC(X) \to \mathbb{R}$ が存在することである（$RC(X)$: X の regular closed subsets の全体）：

(1) すべての $x \in X$ と $F \in RC(X)$ に対し，
$x \in F \Leftrightarrow \rho(x, F) = 0$;

(2) すべての $x \in X$ と，$F \subseteq G$ となる $F, G \in RC(X)$ に対し，
$\rho(x, F) \geq \rho(x, G)$ が成り立つ;

(3) すべての $F \in RC(X)$ に対し，写像 $X \ni x \mapsto \rho(x, F) \in \mathbb{R}$ は連続である;

(4) すべての $\subseteq$ に関する $RC(X)$ での上昇列 $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ に対し，
$\rho(x, \overline{\bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha}) = \inf\{\rho(x, F_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ である．

用語の解説 (2)

◎ 無限集合 X に対し $[X]^{\aleph_0} = \{u \subseteq X : u$ は可算$\}$ とする．より一般的には κ を基数とするとき，$[X]^{\kappa}$ で $\{u \subseteq X : |u| = \kappa\}$ をあらわす．$[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{<\kappa}$ も同様に定義される．

◎ $S \subseteq [X]^{\aleph_0}$ が club (closed unbounded) とは，(i) すべての $u \in [X]^{\aleph_0}$ に対し $u \subseteq v$ となる $v \in S$ が存在し，(ii) すべての S の元の可算な長さの上昇列 $(u_\alpha)_{\alpha<\delta}$ に対し，$\bigcup_{\alpha<\delta} u_\alpha \in S$ となることである．

非可算な正則基数 κ に対する $[X]^{\kappa}$ の club 部分集合の定義も同様．

定理 4, (4) と，射影的なブール代数の特徴付け 定理 1, (4) から直に次が導かれる:

系 5 FNP を持つブール代数 B が $|B| \leq \aleph_1$ を満たすなら B は射影的である．

FNPを持つブール代数の集合論的な特徴付け

系 6 (S.F., 1994)　ブール代数 B に対し，次は同値である:

(1) B は FNP を持つ.

(2) $\mathbb{P}$ を濃度 $|B|$ 未満の基数を可算に collapse する σ-closed な poset とするとき，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "B は射影的" が成り立つ.

注意: 上の系 6 はそれ自体としては全く trivial である.

しかし，この系は，FNP を持つブール代数に関する集合論的な議論の可能性を示唆している．また，collapsing が絡んでいることで，そのような議論に large cardinal properties が関連してくる可能性も示唆しているように見える.

FNP と $\aleph_2$-projective filtration

◎ ブール代数 B が κ-projectively filtered であるとは，B の部分代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ で，次を満たすものが存在すること:

(1) $I = (I, \leq_I)$ は上方向に directed な半順序集合;

(2) $i, j \in I$ で $i \leq_I j$ なら，$B_i \leq B_j$;

(3) $S \subseteq I$ を，長さが κ 未満の $\leq_I$ に関する上昇列とするとき，$i^* = \sup S$ となる $i^* \in I$ が存在する．

(4) $S \subseteq I, i^* \in I$ で $i^* = \sup S$ なら，$B_{i^*} = \bigcup_{i\in S} B_i$;

(5) すべての B_i は射影的;　　(6) $B = \bigcup_{i\in I} B_i$.

FNP を持つブール代数の特徴付け 定理 4 から次がわかる:

補題 7　FNP を持つブール代数は $\aleph_2$-projectively filtered である．

$\aleph_2$-projectively filtered なブール代数が FNP を持つブール代数と一致するかどうかは集合論から独立である．

定理 8 (S.F., 1994) $V = L$ を仮定すると，すべての weakly compact でない正則基数 κ に対し，κ-projectively filtered だが FNP を持たないような濃度 κ のブール代数が存在する．

定理 9 (Q. Feng, S.F., 1994) Fleissner の Axiom R の仮定のもとで，$\aleph_2$-projectively filtered なブール代数の全体と FNP を持つブール代数の全体は一致する．

◎ Fleissner の Axiom R は $\mathrm{MA}^+(\sigma\text{-closed})$ から導かれる反映原理である．

定理 8 と定理 9 は， E.V. Ščepin の遺題 (open problems) の 1 つに対する解となっている．

Axiom R : $\lambda > \omega_2$ で $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$ とし，$\mathcal{T} \subseteq [\lambda]^{\aleph_1}$ は $([\lambda]^{\aleph_1}, \subseteq)$ で cofinal で，長さが ω_1 の上昇列の union に関して閉じているとする．
このとき，任意の stationary な $S \subseteq [\lambda]^{\aleph_0}$ に対し，$X \in \mathcal{T}$ で $S \cap [X]^{\aleph_0}$ が $[X]^{\aleph_0}$ で stationary となるものが存在する．

定理 8 と定理 9 の応用

補題 10 $L_{\infty\omega_2}$-射影的な（i.e. ある射影的なブール代数と $L_{\infty\omega_2}$-elementary equivalent な）ブール代数は $\aleph_2$-projectively filtered である．

定理 11 (S.F., 1994) Axiom R のもとで，すべての $L_{\infty\omega_2}$-射影的なブール代数は FNP を持つ．

定理 12 (S.F., 1994) $V = L$ のもとで，すべての κ に対し $L_{\infty\kappa}$-射影的なブール代数で FNP を持たないものが存在する．

リファレンス

[3] L. Heindorf, L.B. Shapiro, *Nearly Projective Boolean algebras*, *With an Appendix by Sakaé Fuchino*, Lcture Notes in Mathematics 1596, Springer-Verlag (1994).

Weak Freese-Nation Property

◎ ブール代数（あるいはもっと一般に半順序）B が Weak Freese-Nation Property （以下 WFN とも略）を満たす(あるいは，持つ）とは，写像 $f : B \to [B]^{\aleph_0}$ で，次の性質を持つものが存在すること:

(†) 任意の $a, b \in B$, $a \leq_B b$ に対し，$c \in f(a) \cap f(b)$ で
$a \leq_B c \leq_B b$ となるものが存在する．

◎ 集合 X に対し $[X]^{\aleph_0}$ は X の可算（無限）部分集合の全体からなる集合（族）.

定理 13　濃度が $\aleph_1$ 以下のブール代数（あるいはもっと一般に半順序）は WFN を満たす.

証明. B を濃度が $\aleph_1$ 以下の半順序として，B を（重複も許して）$B = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と数え上げる．このとき，
$f : B \to [B]^{\aleph_0}; b_\alpha \mapsto \{b_\beta : \beta \leq \alpha\}$ は (†) を満たす.　□ **(定理 13)**

Weak Freese-Nation Property

◎ ブール代数（あるいはもっと一般に半順序）B が Weak Freese-Nation Property （以下 WFN とも略）を満たす(あるいは，持つ）とは，写像 $f : B \to [B]^{\aleph_0}$ で，次の性質を持つものが存在すること:

(†) 任意の $a, b \in B$, $a \leq_B b$ に対し，$c \in f(a) \cap f(b)$ で $a \leq_B c \leq_B b$ となるものが存在する.

◎ 集合 X に対し $[X]^{\aleph_0}$ は X の可算（無限）部分集合の全体からなる集合（族）.

定理 13 濃度が $\aleph_1$ 以下のブール代数（あるいはもっと一般に半順序）は WFN を満たす.

系 14 連続体仮説のもとで，$(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ は WFN を満たす.

$\mathcal{P}(\omega)$: ω $(=\mathbb{N})$ の冪集合　（連続体の集合論的構造との密接な関連）

$\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$

「$\mathcal{P}(\omega)$ が WFN を持つ」，という命題を $\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$ とあらわす．系 14 により，連続体仮説のもとでは $\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$ が成り立つが，連続体仮説の否定のもとで $\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$ が成り立つかどうかは独立である．

定理 15 (S.F., S. Koppelberg and S. Shelah, 1996) 連続体仮説を仮定する．$\kappa < \aleph_\omega$ として，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ とする．$\mathbb{P}$ は Cohen 実数を κ 個付加する poset である．
このとき，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$” が成り立つ．特に，$\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$ は，連続体仮説の否定と矛盾しない．

一方， Cohen 実数以外の実数の付加による連続体仮説の否定の（よく知られた）モデルでは，$\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$ は成り立たない．この理由は次の定理に見ることができる:

定理 16 (S. Fuchino, S. Geschke and L. Soukup, 2001) WFN($\mathcal{P}(\omega)$) が成立ち，さらに，$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ であるか，または$\neg 0^\sharp$ が成り立つなら，Cichoń's diagram や Van Douwen's diagram にあらわれるすべての基数不変量は，同じ連続体濃度を持つ Cohen モデルでのそれらの値と一致する．

特に上の定理の仮定のもとで，拡張された Cichoń's diagram は，次のような付値を与えられる:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{cov}(\mathsf{null}) \arrow[dd] & \mathsf{non}(\mathsf{meager}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathsf{shr}(\mathsf{meager}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathsf{cof}(\mathsf{meager}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathsf{cof}(\mathsf{null}) \arrow[l] \arrow[dd] \\
& \mathfrak{b} \arrow[d] & \mathfrak{b}^* \arrow[l] & \mathfrak{d} \arrow[l] \arrow[d] & \\
\mathsf{add}(\mathsf{null}) & \mathsf{add}(\mathsf{meager}) \arrow[l] & & \mathsf{cov}(\mathsf{meager}) \arrow[ll] & \mathsf{non}(\mathsf{null}) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$\Leftarrow$ $\aleph_1$ $2^{\aleph_0}$ $\Rightarrow$

WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は，Cohen model の多くの性質をとらえているので，「Cohen model の公理」のようなものと考えることができる．

WFN($\mathcal{P}(\omega)$) の特徴付け

定理 17　WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は次のどれとも同値である:

(1) $(\mathcal{P}(\omega)/fin, \subseteq^*)$ は WFN を持つ;

(2) $({}^\omega\omega, \leq)$ は WFN を持つ;　(3) $({}^\omega\omega, \leq^*)$ は WFN を持つ;

(4) $\mathbb{C}(\omega)$ （Fn(ω) の completion）は WFN を持つ;

(5) $\mathbb{B}(\omega)$ (Maharam type ω の measure algebra) は WFN を持つ．

定理 18 (S.F., S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, 2001) ごく弱い square principles が成り立つとき，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は次と同値である:

(1) ある／すべての $\kappa \geq \omega$ に対し $\mathbb{C}(\kappa)$ は WFN を持つ．

(2) ある／すべての $\kappa \geq \omega$ に対し $\mathbb{B}(\kappa)$ は WFN を持つ．

定理 19 (ibid.) 上の定理は「ごく弱い square principles」なしには必ずしも成り立たない．

WFN の特徴付け

◎ ブール代数 A が B の σ-部分代数である（記号: $A \leq_\sigma B$）とは，すべての $b \in B$ に対し，イデアル$\{a \in A : a \leq_B b\}$ が可算生成されること．

定理 20 非可算なブール代数 B に対し，以下は同値:

(0) B は WFN を持つ;

(1) ある／すべての十分に大きな基数 χ と $B \in M \prec \mathcal{H}(\chi)$ に対し，$B \cap M \leq_\sigma B$ が成り立つ;

(2) $\{C \in [B]^{\aleph_1} : C \leq_\sigma B\}$ は $[B]^{\aleph_1}$ の club subset を含む．

定理 20 から，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は，

$\mathcal{P}(\omega)$ の良い部分代数（σ-部分代数）が沢山（club many に）あることを主張している公理となっていることがわかる．

WFN の特徴付け (2)

定理 20 非可算なブール代数 B に対し，以下は同値:

(0) B は WFN を持つ;

(1) ある／すべての十分に大きな基数 χ と $B \in M \prec \mathcal{H}(\chi)$ に対し，$B \cap M \leq_\sigma B$ が成り立つ;

(2) $\{C \in [B]^{\aleph_1} : C \leq_\sigma B\}$ は $[B]^{\aleph_1}$ の club subset を含む．

定理 21 (S.F. and L. Soukup, 1997) ごく弱い square principles が成り立つとき，ブール代数 B が WFN を持つことは次と同値である:

(3) ある／すべての十分に大きな基数 χ と，$B \in M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で，M の可算な elementary submodels の，$\in$ に関する，長さが ω_1 の連続な上昇列 $(M_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ で，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ となるようなものが存在するようなものに対し，$B \cap M \leq_\sigma B$ が成り立つ．

WFN の特徴付け (2)

定理 21 (S.F. and L. Soukup, 1997) ごく弱い square principles が成り立つとき，ブール代数 B が WFN を持つことは次と同値である:

(3) ある／すべての十分に大きな基数 χ と，$B \in M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で，M の可算な elementary submodels の，$\in$ に関する，長さが ω_1 の連続な上昇列 $(M_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ で，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ となるようなものが存在するようなものに対し，$B \cap M \leq_\sigma B$ が成り立つ.

定理 22 (1) (S.F. and L. Soukup, 1997) 定理 21 は，条件「ごく弱い square principles」なしでは成り立たない.

(2) (S.F., S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, 2001) $B = \mathcal{P}(\omega)$ に対して，定理 21 は，条件「ごく弱い square principles」なしでは成り立たない.

良い–沢山のバリエーションズ

$\mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega))$

$\downarrow$

IDP (A. Dow and K.P. Hart, 2002)

$\downarrow$

SEP (I. Juhász and K. Kunen, 2001
S.F. and S. Geschke, 2004)

$\downarrow$

PRINC (S.Shelah, 2002 (unpublished))

$\downarrow$

$\mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\aleph_2)$ (I. Juhász, L. Soukup and Z. Szentmiklóssy, 1995)

$\mathcal{P}(\omega)$ の一様性に関する公理 (群)

◎ 集合 X, X_0,..., X_{n-1} に対し,

$$(\!(X)\!)^n = \{\vec{x} \in X^n : \vec{x} \text{ は injective}\}$$
$$(\!(X)\!)^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} (\!(X)\!)^n.$$
$$(\!(X_0, ..., X_{n-1})\!) = \{\vec{x} \in X_0 \times \cdots \times X_{n-1} : \vec{x} \text{ は injective}\}.$$

基数 κ ($\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$) に対し,

$\mathrm{C^s}(\kappa)$: 任意の ω の部分集合の行列 $\langle a_{\alpha,n} : \alpha \in \kappa,\, n \in \omega\rangle$ と $T \subseteq {}^{\omega>}\omega$ に対し, 以下のどちらかが成り立つ:

(c0) stationary な $S \subseteq \kappa$ で, $\bigcap_{n<|t|} a_{\alpha_n, t(n)} \neq \emptyset$ for all $t \in T$ and for all $\langle \alpha_0, ..., \alpha_{|t|-1}\rangle \in (\!(S)\!)^{<\omega}$ となるものが存在する;

(c1) $t \in T$ と stationary な S_0,..., $S_{|t|-1} \subseteq \kappa$ で, $\bigcap_{n<|t|} a_{\alpha_n, t(n)} = \emptyset$ for all $\langle \alpha_0, ..., \alpha_{|t|-1}\rangle \in (\!(S_0, ..., S_{|t|-1})\!)$ となるものが存在する.

$C^s(\kappa)$: 任意の ω の部分集合の行列 $\langle a_{\alpha,n} : \alpha \in \kappa, n \in \omega \rangle$ と $T \subseteq {}^{\omega>}\omega$ に対し，以下のどちらかが成り立つ:

(c0) stationary な $S \subseteq \kappa$ で，$\bigcap_{n<|t|} a_{\alpha_n,t(n)} \neq \emptyset$ for all $t \in T$ and for all $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{|t|-1} \rangle \in (\!(S)\!)^{<\omega}$ となるものが存在する;

(c1) $t \in T$ と stationary な $S_0, \ldots, S_{|t|-1} \subseteq \kappa$ で，$\bigcap_{n<|t|} a_{\alpha_n,t(n)} = \emptyset$ for all $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{|t|-1} \rangle \in (\!(S_0, \ldots, S_{|t|-1})\!)$ となるものが存在する．

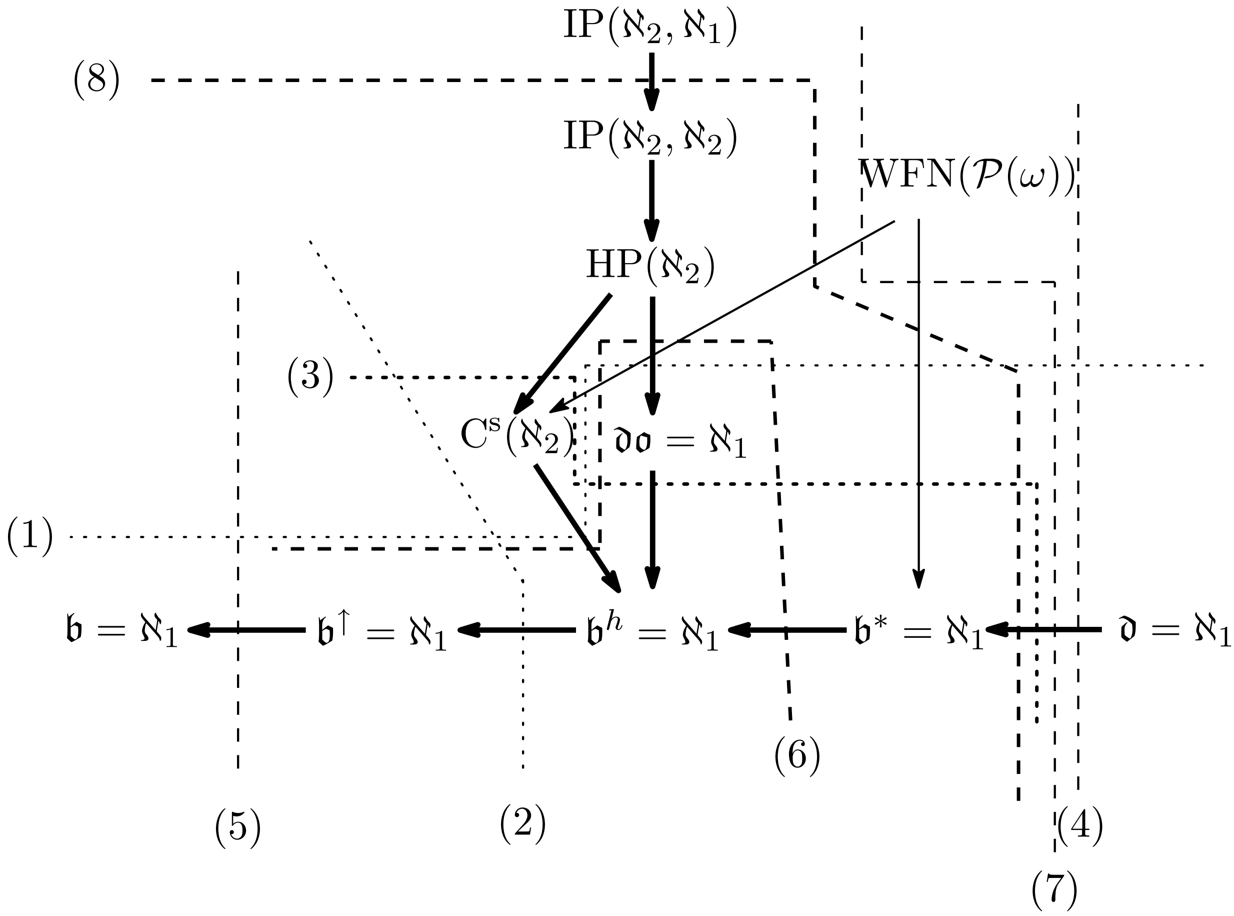
$\mathrm{HP}(\kappa)$ (S.F., J. Brendle, 2007)

$\mathrm{HP}(\kappa)$: 任意の $f : \kappa \to \mathcal{P}(\omega)$ と任意の射影的な $A \subseteq (\!(\mathcal{P}(\omega))\!)^{<\omega}$ に対し，次のどちらかが成り立つ:

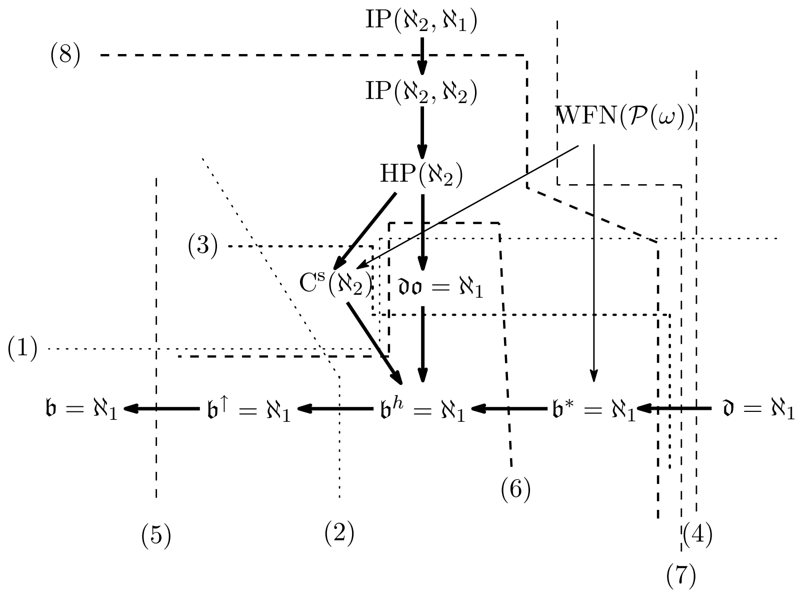
(h0) stationary な $S \subseteq \kappa$ で，$(\!(f''S)\!)^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \subseteq A$ となるものが存在する;

(h1) $k \in \omega \setminus 1$ と stationary な $S_0, \ldots, S_{k-1} \subseteq \kappa$ で $(\!(f''S_0, \ldots, f''S_{k-1})\!) \cap A = \emptyset$ となるものが存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega)) \arrow[d] \\
 & \mathrm{IP}(\aleph_2,\aleph_1) \arrow[ddl] \arrow[dr] & & & \mathrm{IDP} \arrow[d] \\
 & & \mathrm{IP}(\aleph_2,\aleph_2) \arrow[d] & & \mathrm{SEP} \arrow[d] \\
 \mathrm{F}^{\mathrm{s}}(\aleph_2) \arrow[dr] & & \mathrm{HP}(\aleph_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \textsc{Princ} \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
 & \hat{\mathrm{C}}^{\mathrm{s}}(\aleph_2) & & \mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\aleph_2) &
\end{tikzcd}
$$



IP(ℵ2, ℵ1)
(8)
IP(ℵ2, ℵ2)
WFN(𝒫(ω))
HP(ℵ2)
(3)
Cs(ℵ2)
𝔡𝔬 = ℵ1
(1)
𝔟 = ℵ1
𝔟↑ = ℵ1
𝔟h = ℵ1
𝔟* = ℵ1
𝔡 = ℵ1
(6)
(5)
(2)
(4)
(7)



(1): By adding random reals.
(2): A model in [J. Brendle and T. LaBerge, 1996].
(3): A model in [I. Juhász and K. Kunen, 2001].
(4): By adding Cohen reals.
(5): A model of Hechler.
(6): [S.F. and J. Brendle, 2007].
(7): A model in [S.F., S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, 2001].
(8): [S.F. and J. Brendle, 2007].