Meta-Lindelöf 性と距離付け可能性に関する reflection properties について

渕野 昌 (Sakaé Fuchino) （中部大学 工学部）

2008 年 9 月 9 日 (16:34 JST) 版

ここでは，発表者が I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy, 薄葉季路との共同研究 [3] で得た結果の一部とその背景を述べる．*1

X を Hausdorff 空間として，X に関する，以下ような距離付け可能性の transfer property を考察する．

(0.1) X のすべての濃度 $\aleph_1$ 以下の部分空間が距離付け可能なら， X 自身も距離付け可能である．

対偶命題に移行することで，(0.1) は次のような reflection property として述べることもできる:

(0.2) X が距離付け可能でないなら，X の濃度 $\aleph_1$ 以下の部分空間で，距離付け可能でないものが存在する．

A. Dow [2] は elementary submodels の手法を巧みに用いて，可算コンパクトな X に対し，(0.1)（または (0.2)）が成り立つことを示した．

Z. Balogh [1] は，Axiom R のもとでは，局所コンパクトな X に対し，(0.1)（または (0.2)）が成り立つことを示した．X が meta-Lindelöf であることを条件に加えると，Balogh の結果は ZFC の定理になる（距離付け可能空間は

*1 本稿は日本数学会２００８年度秋季総合分科会のトポロジー分科会の予稿集のために執筆したものの更新版である．予稿提出後に得られた幾つかの結果も反映されている．なお共著論文の preprint は，`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/papers/ssmL-FM.pdf` としてダウンロード可である．

paracompact なので，meta-Lindelöf という条件は自然なものであることに注意）:

定理 1 ([3]) Hausdorff 空間 X が meta-Lindelöf で局所コンパクトとする．このとき，X のすべての濃度 $\aleph_1$ 以下の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

これを用いると，Balogh の結果は，次の meta-Lindelöfness に関する (0.1)（または (0.2)）と同様の性質に帰着されることがわかる:

定理 2 ([3]) κ 以下のすべての正則基数 $\lambda \geq \aleph_2$ で FRP(λ) が成り立つことを仮定する．Hausdorff 空間 X が局所可算，可算緊密 (countably tight) で，X の Lindelöf 数が λ 以下とするとき，X のすべての濃度 $\aleph_1$ 以下の部分空間が meta-Lindelöf なら，X 自身も meta-Lindelöf である．

系 3 ([3]) κ 以下のすべての正則基数 $\lambda \geq \aleph_2$ で FRP(λ) が成り立つことを仮定する．Hausdorff 空間 X が局所コンパクトで，X の Lindelöf 数が λ 以下とするとき，X のすべての濃度 $\aleph_1$ 以下の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である．

ここで FRP(λ) は，λ に対する Fodor Type Reflection Principle と名付けられた，次のような無限組合せ論的原理である:

FRP(λ): 任意の stationary な $S \subseteq E^\lambda_\omega = \{\alpha < \lambda : cf(\alpha) = \omega\}$ と写像 $g : S \to [\lambda]^{\leq\aleph_0}$ に対し，$I \in [\lambda]^{\aleph_1}$ で，次を満たすものが存在する:

(0.3) $cf(I) = \omega_1$;

(0.4) $g(\alpha) \subseteq I$ がすべての $\alpha \in I \cap S$ で成り立つ;

(0.5) すべての regressive な $f : S \cap I \to \lambda$ で $f(\alpha) \in g(\alpha)$ がすべての $\alpha \in S \cap I$ で成り立つようなものに対し, $\xi^* < \lambda$ で, $f^{-1}{}''\{\xi^*\}$ が $sup(I)$ で stationary になるものが存在する．

正則基数 $\lambda \geq \omega_1$ に対する FRP(λ) は Axiom R から導くことができる．[*2]

*2 実際には，Axiom R より弱い，RP($[\lambda]^{\aleph_0}$)（$\lambda^{\aleph_0}$ の stationary subsets の cofinality が ω_1 であるような集合への reflection principle）から，FRP(λ) を導くことができる ([3])．

任意の正則基数 $\kappa \geq \aleph_2$ に対し，E^κ_ω の non reflecting stationary subset の存在から，meta-Lindelöf でない（したがって距離付け可能でない）濃度 κ の局所コンパクトな空間で，すべての濃度 $< \kappa$ の部分空間は距離付け可能なものの存在が示せる ([3])．このことから，定理 2 の成立には（したがって [1] の定理（あるいは系 3）の成立にも）非常に強い，巨大基数の consistency strength が必要となっていることがわかる．Fodor Type Reflection Principle は non reflecting stationary subset の非存在の主張を含んでいるので，この原理の成立に，非常に強い，巨大基数の consistency strength が必要となることは明らかである．

一方，FRP(λ) は Axiom R より真に弱い公理である．Axiom R は連続体濃度が $\aleph_2$ 以下であることを導くが（たとえば，[5], Theorem 37.18 を参照），『すべての共終数が $\geq \omega_1$ となる基数 λ に対し FRP(λ) が成り立つ』は，連続体濃度に何の制限も課さないことが示せる．特に，系 3 は Balogh の定理 ([1]) のトリヴィアルでない拡張となっている．また，定理 2 および 系 3 の主張は，（例えば，Axiom R の無矛盾性を仮定すると）連続体濃度が $\aleph_{2008}$ であることとも無矛盾である．もう少し具体的に言うと，Fodor Type Reflection Principle は c.c.c. poset による generic extension で保存されることが証明できる（[3]）．

Fodor Type Reflection Principle により， Axiom R の応用として知られている多くの結果を証明することができる ([4])．上で述べた保存の結果から，このことは，単に Axiom R の応用として知られていた結果の改良にとどまらず，それらの結果を c.c.c. poset で force できる任意の状況と組み合せて用いることができる，ということも意味している．

上で述べた c.c.c. p.o.-set による generic extension での保存の結果では，Fodor Type Reflection Principle の RP($[\lambda]^{\aleph_0}$) からの分離は，連続体の濃度が $\aleph_3$ 以上であるときにしかできないが，[4] では，連続体濃度が $\leq \aleph_2$ の場合でのこれらの原理の分離が示されている．

FRP に関しては，この原理の consistency strength の上限の改良（あるいは equiconsistency）などの，集合論的に非常に興味のある問題がまだ今後の課題として残っている．

参考文献

[1] Zoltán Balogh, Locally nice spaces and Axiom R, Topology and its Applications, Volume 125, Number 2 (2002), pp. 335-341

[2] Alan Dow, An empty class of nonmetric spaces, Proceedings of American Mathematical Society, 104 (1988), 999-1001.

[3] Sakaé Fuchino, István Juhász, Lajos Soukup, Zoltán Szentmiklóssy and Toshimichi Usuba, Fodor Type Reflection Principle, metrizability and meta-Lindelöfness, preprint.

[4] Sakaé Fuchino, Lajos Soukup and Toshimichi Usuba, More applications of Fodor Type Reflection Principle, in preparation.

[5] Thomas Jech, *Set Theory, The Third Millennium Edition*, Springer (2001/2006).