

不完全性定理 の 構成的性質について

Sakaé Fuchino (渕野 昌), 菊池 誠 (Makoto Kikuchi)

Graduate School of System Informatics
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://fuchino.ddo.jp/>

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mkikuchi/>

2014 日本数学会 秋季総合分科会
数学基礎論および歴史分科会

(24. Oktober 2017 (17:57 JST) version)

27. September 2014, 於 広島大学東広島キャンパス

This presentation is typeset by p^AT_EX with beamer class.

- ▶ [1] 渕野 昌, 現代の視点からの数学の基礎付け, リヒャルト・デデキント著, 渕野昌 翻訳／解説, 『数とは何かそして何であるべきか』, ちくま学芸文庫, に付録 C として収録, (2013), 181–321.
- ▶ [2] 渕野 昌, [[[不完全性定理に挑む] に挑む] に挑む], 科学基礎論研究, Vol.41, No.1 (2013), 63–80.
- ▶ [3] 菊池 誠, 不完全性定理, 共立出版社, 近刊.
- ▶ [4] 林 晋, 数学基礎論の歴史にみられる日本特有の誤解について, 日本数学会秋季総合分科会 1999 広島, 講演.
- ▶ [5] Sakaé Fuchino and Makoto Kikuchi, in preparation.

- ▶ Mathematical Logic は必ずしも「数学基礎論」ではないが、Mathematical Logic の知識なしには、現代的な視点からの数学の基礎付けについて論ずることは不可能である。
- ▶ 一方、“平均的な”数学者は、一般には Mathematical Logic の背景知識を十分に学ぶ機会を与えられていない： Mathematical Logic の研究者は、(数学基礎論が専門でないとしても) 数学の基礎付けについての、数学者一般にむけての (教育的な – できるだけぶれの少ない) 情報発信を積極的に試みるべきである。
- ▶ 以下の考察はこのような context での「哲学的」考察で、新しい技術的な結果を含むものではない。
- ▶ 内容としては、林 [4] と関連し、Fuchino and Kikuchi [5] に含まれることになる議論の一部となっている。

「有限の立場」は誤訳か？

- ▶ „Der finite Standpunkt“ (finitary stand point) は「有限の立場」と日本語に翻訳されることが多い。

Duden: finit <Adj.> [spätlat. finitus, adj. 2. Part. von lat. finire, ↑ Finish] (Sprachw.): bestimmt: -e Form (in Person u. Zahl bestimmte Verbform im Unterschied zum Infinitiv u. Partizip);

- ▶ „Der finite Standpunkt“ はむしろ、「確定的な立場」と訳すべきだろう。有限的なら確定的と言えるだろうが、狭義の有限性は確定的であることから必ずしも導かれない。
- ▶ „Der finite Standpunkt“ は一方、単に「有限的」であるより強い内容を持つものとも解釈されることもある:

“Provable ... means provable in any number of steps, and on finitist principles the number must in some way be limited, e.g. to the humanly possible.” — F.P. Ramsey: Foundations of Mathematics (1931), p.243

定理 1 (Gödel-Rosser の (第 1) 不完全性定理)

1 階の数論の十分に大きな *fragment* を含む任意の *recursive* な理論 T に対して、 T が無矛盾なら、(数論の言語での論理式) σ で T から証明できないし、その否定も証明できないようなものが存在する。

定理 2 (Gödel の第 2 不完全性定理)

1 階の数論の十分に大きな *fragment* を含む任意の *recursive* な理論 T に対して、 T が無矛盾なら、 consis_T は T で証明できない。

- ▶ 「 T が無矛盾なら …」という前提を持つ記述は、“有限の立場”で認識できる表明とは言いがたい。
- ▶ しかし、これらの命題の対偶を考えることで、上の定理の“constructive”な核を見ることができるようになる。

定理 1 (Gödel-Rosser の (第 1) 不完全性定理)

1 階の数論の十分に大きな *fragment* を含む任意の *recursive* な理論 T に対して、 T が無矛盾なら、(数論の言語での論理式) σ で次満の (a), (b) をたすものが存在する:

(a) σ の T からの証明が与えられたとき、(それを變形して) T からの矛盾の証明を作るアルゴリズムが (具体的に) 存在する.

(b) $\neg\sigma$ の T からの証明が与えられたとき、(それを變形して) T からの矛盾の証明を作るアルゴリズムが (具体的に) 存在する.

定理 2 (Gödel の第 2 不完全性定理)

1 階の数論の十分に大きな *fragment* を含む任意の *recursive* な理論 T に対して、 T からの *consist_T* の証明が与えられたとき、(それを變形して) T からの矛盾の証明を作るアルゴリズムが (具体的に) 存在する.

- ▶ このような読み方は、渕野が [1] で強調したもののだが、これは、既にゲーデルのオリジナルの論文で注意されている (下線は講演者による):

Es sei bemerkt, daß auch dieser Beweis konstruktiv ist, d. h. er gestattet, falls ein Beweis aus κ für w vorgelegt ist, einen Widerspruch aus κ effektiv herzuleiten.

— K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze ..., 1931.

- ▶ 全集での英訳:

Let us observe that this proof, too, is constructive; that is, it allows us to actually derive a contradiction from κ , once a PROOF of w from κ is given. — Kurt Gödel: Collected Works, Volume I.

- ▶ また前の引用の少し後の、ヒルベルトの計画がゲーデルの結果で破綻したわけではない、という有名な言明の箇所では (下線は講演者による):

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß Satz XI (und die entsprechenden Resultate über M , A) in keinem Widerspruch zum Hilbertschen formalistischen Standpunkt stehen. Denn dieser setzt nur die Existenz eines mit finiten Mitteln geführten Widerspruchsfreiheitsbeweises voraus und es wäre denkbar, daß es finite Beweise gibt, die sich in P (bzw. M , A) nicht darstellen lassen.

— K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze ..., 1931.

▶ 全集での英訳:

I wish to note expressly that Theorem XI (講演者注: 第2不完全性定理) (and the corresponding results for M and A (講演者注: M と A は, 集合論と高階の算術 (解析学) の体系)) do not contradict Hilbert's formalistic viewpoint. For this viewpoint presupposes only the existence of a consistency proof in which nothing but finitary means of proof is used, and it is conceivable that there exist finitary proofs that *cannot* be expressed in the formalism of P (or of M or A). — Kurt Gödel: Collected Works, Volume I.

- ▶ ゲーデルのオリジナルな第1不完全性定理では、 ω -consistency ないし Σ_1 -soundness が必要となるため、上のような“有限の立場”での解釈ができない:

命題 3 (ゲーデルの第1不完全性定理で ω -consistency の必要となる部分)

T を1階の数論の十分に大きな *fragment* を含む任意の *recursive* な理論として、 T は、すべての T の言語の論理式 τ に対して、 $T \vdash pr_T(\tau)$ なら、 $T \vdash \tau$ となるものとする。算術の命題 σ を $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg pr_T(\sigma)$ となるものとする。と、 $T \vdash \neg \sigma$ なら、 $T \vdash 0 \equiv 1$ である。

- ▶ しかし、上の命題の証明は、 $T \vdash^{m_1} pr_T(n)$ なら $T \vdash^{f(m_1, n)} \ulcorner n \urcorner$ となるような、関数 f が与えられたとき、この関数から、 $T \vdash^{n_1} \neg \sigma$ となる n から、 $T \vdash^{g(n)} 0 \equiv 1$ となるような $g(n)$ を計算する関数が構成できることを言っているものと見ることができる。 □

終

終