Mystery Train

– 無限組合せ論への招待 –

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(November 22, 2010 (12:31 JST) version)

数学基礎論若手の会 2010 での講演
於 愛知県青年の家（岡崎）
November 21, 2010

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

銀河鉄道の夜

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

銀河鉄道の夜

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

問題の由来

- この問題（クイズ）は，先日，メキシコのコリマで開かれた国際学会に参加した折に，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わった．
- Jonathan Verner 君は，この問題をプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から聞いた．
- 一方，David Chodounský 君は，この問題をブダペスト工科経済大学の学生で，私の共著者 Lajos Soukup 氏のもとで学位論文を書いている Barnabás Farkas 君から，この問題を聞いた，ということ．

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，… の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

問題の由来

- この問題（クイズ）は，先日，メキシコのコリマで開かれた国際学会に参加した折に，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わった．
- Jonathan Verner 君は，この問題をプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から聞いた．
- 一方，David Chodounský 君は，この問題をブダペスト工科経済大学の学生で，私の共著者 Lajos Soukup 氏のもとで学位論文を書いている Barnabás Farkas 君から，この問題を聞いた，ということ．

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，⋯ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

問題の由来

- この問題（クイズ）は，先日，メキシコのコリマで開かれた国際学会に参加した折に，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わった．
- Jonathan Verner 君は，この問題をプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から聞いた．
- 一方，David Chodounský 君は，この問題をブダペスト工科経済大学の学生で，私の共著者 Lajos Soukup 氏のもとで学位論文を書いている Barnabás Farkas 君から，この問題を聞いた，ということ．

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている． 0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない． この列車が， 1 番目， 2 番目， $\cdots$ の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し， ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする． ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

問題の由来

- この問題（クイズ）は，先日，メキシコのコリマで開かれた国際学会に参加した折に，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わった．
- Jonathan Verner 君は，この問題をプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から聞いた．
- 一方，David Chodounský 君は，この問題をブダペスト工科経済大学の学生で，私の共著者 Lajos Soukup 氏のもとで学位論文を書いている Barnabás Farkas 君から，この問題を聞いた，ということ．

ω_1 個の駅のある路線を列車が走っている．0 番目の駅は車両基地で，列車がここを出発するときには，乗客は誰も乗っていない．この列車が，1 番目，2 番目，… の各駅に停車してゆくとき，列車に客が一人でも乗っていれば，そのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむものとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

問題の由来

- この問題（クイズ）は，先日，メキシコのコリマで開かれた国際学会に参加した折に，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わった．
- Jonathan Verner 君は，この問題をプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から聞いた．
- 一方，David Chodounský 君は，この問題をブダペスト工科経済大学の学生で，私の共著者 Lajos Soukup 氏のもとで学位論文を書いている Barnabás Farkas 君から，この問題を聞いた，ということ．

名谷（みょうだに）車両基地（神戸）

クイズの答え

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
- **列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない**

  というのが正解である!!!
- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
- **列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない**

  というのが正解である!!!
- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

クイズの答え

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
- **列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない**

というのが正解である!!!
- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

クイズの答え

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
- **列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない**

  というのが正解である!!!
- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

クイズの答え

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
- **列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない**

  というのが正解である!!!
- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

クイズの答え

- この問題の答えは，各駅で降りる人の選び方に依存しない．
-

列車が ω_1 番目の駅に着くときには，列車には誰も乗っていない

というのが正解である!!!

- 以下で，この解の証明と，それに関連する 無限組合せ論 の話題について話す．
- **注意:** 以下の話の数学的内容は，現代では基礎知識に属す種類のもので，新しい結果は何も含まれていない．
- 無限組合せ論の面白さに触れてもらいたい，というのが講演の意図である．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，
$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$
で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．
- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．
- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．
- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．
- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．
- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．
- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．
- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (1/2)

- α 番目の駅 ($0 < \alpha < \omega_1$ あるいは，$\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\} = \omega_1 \setminus 1$) で列車に乗りこむ旅客 (travelers) を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とする．
$g : (\omega_1 \setminus 1) \times \omega \to \omega_1$ を，

$$g(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & \text{旅客 } t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．

- $g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在しないことを示せば，前ページのクイズの解答の証明ができたとこになる．

- $g(\alpha^*, n^*) = 0$ となる $\langle \alpha^*, n^* \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ が存在すると仮定して，矛盾を示す．

- $\alpha^* < \alpha_0 < \omega_1$ を g に関して閉じているとする．つまり，$\alpha < \alpha_0$ で $n < \omega$ なら，$g(\alpha, n) < \alpha_0$ が常に成り立つ，ものとする．実際，このような性質を持つ順序数 $< \omega_1$ は closed unboundedly many 存在するから，その 1 つを α_0 としてとれる．

問題の最初の解 (2/2)

- α_0 番目の駅に列車が入るときには，少なくとも旅客 t_{α^*,n^*} が列車に乗っているから，この駅で降りる旅客が少なくとも一人はいなければならない．

- ところが，α_0 の定義により，このとき列車に乗っている旅客は全員 ω_1 番目の駅まで列車を降りない人である．
  - これは矛盾である．

- したがって，$g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ は存在しない．つまり，列車が ω_1 番目の駅に入線するときには，それまでに乗車した乗客は全員どこかの駅で降りているから，列車は空（から）である． □

問題の最初の解 (2/2)

- α_0 番目の駅に列車が入るときには，少なくとも旅客 t_{α^*,n^*} が列車に乗っているから，この駅で降りる旅客が少なくとも一人はいなければならない．

- ところが，α_0 の定義により，このとき列車に乗っている旅客は全員 ω_1 番目の駅まで列車を降りない人である．
  - これは矛盾である．

- したがって，$g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ は存在しない．つまり，列車が ω_1 番目の駅に入線するときには，それまでに乗車した乗客は全員どこかの駅で降りているから，列車は空（から）である． □

問題の最初の解 (2/2)

- α_0 番目の駅に列車が入るときには，少なくとも旅客 t_{α^*,n^*} が列車に乗っているから，この駅で降りる旅客が少なくとも一人はいなければならない．

- ところが，α_0 の定義により，このとき列車に乗っている旅客は全員 ω_1 番目の駅まで列車を降りない人である．
  - これは矛盾である．

- したがって，$g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle\alpha, n\rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ は存在しない．つまり，列車が ω_1 番目の駅に入線するときには，それまでに乗車した乗客は全員どこかの駅で降りているから，列車は空（から）である． □

問題の最初の解 (2/2)

- α_0 番目の駅に列車が入るときには，少なくとも旅客 t_{α^*,n^*} が列車に乗っているから，この駅で降りる旅客が少なくとも一人はいなければならない．

- ところが，α_0 の定義により，このとき列車に乗っている旅客は全員 ω_1 番目の駅まで列車を降りない人である．
- これは矛盾である．

- したがって，$g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ は存在しない．つまり，列車が ω_1 番目の駅に入線するときには，それまでに乗車した乗客は全員どこかの駅で降りているから，列車は空（から）である． □

問題の最初の解 (2/2)

- α_0 番目の駅に列車が入るときには，少なくとも旅客 t_{α^*,n^*} が列車に乗っているから，この駅で降りる旅客が少なくとも一人はいなければならない．

- ところが，α_0 の定義により，このとき列車に乗っている旅客は全員 ω_1 番目の駅まで列車を降りない人である．
  - これは矛盾である．

- したがって，$g(\alpha, n) = 0$ となるような $\langle \alpha, n \rangle \in (\omega_1 \setminus 1) \times \omega$ は存在しない．つまり，列車が ω_1 番目の駅に入線するときには，それまでに乗車した乗客は全員どこかの駅で降りているから，列車は空（から）である． □

Fodor の定理の特殊形による別証 (1/2)

- κ を基数（より一般的には順序数）として，$S \subseteq \kappa$ のとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus \{0\}$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこと．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する． □

- 上の定理は，後で述べる Fodor の定理（Fodor の補題）を弱めたものになっている．

- 歴史的には，Fodor による Fodor の定理の証明 (1955) より前に，Dushnik (1930) と Neumer (1951) がそれぞれ Fodor の定理を弱めた形のものを証明していて，上の定理は Dushnik のものと Neumer のものの中間の形のものとなっている．

◀ もっと詳しく

Fodor の定理の特殊形による別証 (1/2)

- κ を基数（より一般的には順序数）として，$S \subseteq \kappa$ のとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus \{0\}$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこと．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する． □

- 上の定理は，後で述べる Fodor の定理（Fodor の補題）を弱めたものになっている．

- 歴史的には，Fodor による Fodor の定理の証明 (1955) より前に，Dushnik (1930) と Neumer (1951) がそれぞれ Fodor の定理を弱めた形のものを証明していて，上の定理は Dushnik のものと Neumer のものの中間の形のものとなっている．

◀ もっと詳しく

Fodor の定理の特殊形による別証 (1/2)

- κ を基数（より一般的には順序数）として，$S \subseteq \kappa$ のとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus \{0\}$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこと．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する． □

- 上の定理は，後で述べる Fodor の定理（Fodor の補題）を弱めたものになっている．

- 歴史的には，Fodor による Fodor の定理の証明 (1955) より前に，Dushnik (1930) と Neumer (1951) がそれぞれ Fodor の定理を弱めた形のものを証明していて，上の定理は Dushnik のものと Neumer のものの中間の形のものとなっている．

◀ もっと詳しく

Fodor の定理の特殊形による別証 (1/2)

- κ を基数（より一般的には順序数）として，$S \subseteq \kappa$ のとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus \{0\}$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこと．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．□

- 上の定理は，後で述べる Fodor の定理（Fodor の補題）を弱めたものになっている．

- 歴史的には，Fodor による Fodor の定理の証明 (1955) より前に，Dushnik (1930) と Neumer (1951) がそれぞれ Fodor の定理を弱めた形のものを証明していて，上の定理は Dushnik のものと Neumer のものの中間の形のものとなっている．

◀ もっと詳しく

Fodor の定理の特殊形による別証 (1/2)

- κ を基数（より一般的には順序数）として，$S \subseteq \kappa$ のとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus \{0\}$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこと．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する． □

- 上の定理は，後で述べる Fodor の定理（Fodor の補題）を弱めたものになっている．
- 歴史的には，Fodor による Fodor の定理の証明 (1955) より前に，Dushnik (1930) と Neumer (1951) がそれぞれ Fodor の定理を弱めた形のものを証明していて，上の定理は Dushnik のものと Neumer のものの中間の形のものとなっている．

◂ もっと詳しく

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証: ▶ $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

▶ 上の f は regressive である.

▶ Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.

▶ したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから， 列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証:

- $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である.
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから， 列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証:

- $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である.
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから，列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証:

- $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である.
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから，列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証: ▶ $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である.
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから，列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証: ▶ $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である．
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する．$\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である．
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから， 列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる． □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証: ▶ $f : \omega_1 \to \omega_1$ を, 次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて, この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

▶ 上の f は regressive である.

▶ Fodor の定理の特殊形により, $\beta^* < \omega_1$ で, $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると, β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず, 問題の仮定に矛盾である.

▶ したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが, このことは, ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから, 列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形による別証 (2/2)

問題の答の別証: ▶ $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，次のように定義する:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいて，この乗客が} \\ & \text{列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

- 上の f は regressive である.
- Fodor の定理の特殊形により，$\beta^* < \omega_1$ で，$\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta^*\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する. $\beta^* \neq 0$ とすると，β^* 番目の駅で非可算人の乗客が乗車していなくてはならず，問題の仮定に矛盾である.
- したがって $\beta^* = 0$ でなくてはならないが，このことは，ω_1 で cofinal many の駅についたときに列車には乗客が一人も乗っていないことを意味するから， 列車が ω_1 番目の駅についたときにも乗客は誰も乗っていないことがわかる. □

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明. $\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．$\square$

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明. $\kappa > \omega$ を正則基数として，regressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．$\square$

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．　$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，
$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．　□

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．□

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．　$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理 1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．　□

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明. $\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理 1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である． □

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．□

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．　$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，　$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，　$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，
$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．　□

Fodor の定理の特殊形の証明

- 実は，Fodor の定理の特殊形 (定理 1) の証明は，列車の問題の答の 1 番目の証明と同じアイデアで簡単に証明できる．

定理 1

$\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を *regressive* とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で *cofinal* になるようなものが存在する．

証明．　$\kappa > \omega$ を正則基数として，r egressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理1 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．

$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bounded subset となる．$\alpha \in S_{\beta^*}$ より，これは矛盾である．　□

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)， C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする. すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し, $\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する.

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである.

すべての successor cardinals は正則基数である.

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは, すべての $\alpha < \kappa$ に対し, $C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed), C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである.
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは, すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し, $S \cap C \neq \emptyset$ となることである.

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである． もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである． もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである． もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形))

- 今日では 定理1 の次の一般化が Fodor の定理 (Fodor の補題) あるいは Pressing down lemma などとよばれる:

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

- κ が 正則基数 (regular cardinal) であるとは κ が κ より真に小さい長さの順序数の上昇列の極限として表わせないことである．すべての successor cardinals は正則基数である．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

もっと詳しく

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える．

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明． $C \in M$ を $M \models$ “C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$ “$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$ “S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる． $\square$

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える．

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明． $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる． $\square$

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として, θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする. M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で, $\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする. $\alpha^* = \kappa \cap M$ として, $S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき, $\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である.

証明. $C \in M$ を $M \models$ "C は κ の club subset" とすると, M の elementarity から, C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である. $C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから, C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる. 特に, $S \cap C \neq \emptyset$ だから, elementarity により, $M \models$ "$S \cap C \neq \emptyset$" である.

C は M での任意の club set だったから, $M \models$ "S は stationary" がわかる. ふたたび M の elementarity から, S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる. θ は十分に大きくとってあったので, S は本当に stationary であることが結論できる. $\square$

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．
$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明．$C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる．□

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として, θ を （κ と比べて）十分に大きな正則基数とする. M を $\mathcal{H}(\theta)$ ◀ 解説 の *elementary submodel* で, $\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする.
$\alpha^* = \kappa \cap M$ として, $S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき, $\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である.

証明. $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると, M の elementarity から, C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である. $C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから, C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる. 特に, $S \cap C \neq \emptyset$ だから, elementarity により, $M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である.

C は M での任意の club set だったから, $M \models$“S は stationary” がわかる. ふたたび M の elementarity から, S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる. θ は十分に大きくとってあったので, S は本当に stationary であることが結論できる. □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明. $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる．□

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える．

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ ◂ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明. $C \in M$ を $M \models$ “C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$ “$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$ “S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる． □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として, θ を (κ と比べて) 十分に大きな正則基数とする. M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で, $\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする. $\alpha^* = \kappa \cap M$ として, $S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき, $\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である.

証明. $C \in M$ を $M \models$"C は κ の club subset" とすると, M の elementarity から, C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である. $C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから, C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる. 特に, $S \cap C \neq \emptyset$ だから, elementarity により, $M \models$"$S \cap C \neq \emptyset$" である.

C は M での任意の club set だったから, $M \models$"S は stationary" がわかる. ふたたび M の elementarity から, S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる. θ は十分に大きくとってあったので, S は本当に stationary であることが結論できる. □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として, θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする. M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で, $\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする. $\alpha^* = \kappa \cap M$ として, $S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき, $\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である.

証明. $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると, M の elementarity から, C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である. $C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから, C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる. 特に, $S \cap C \neq \emptyset$ だから, elementarity により, $M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である.

C は M での任意の club set だったから, $M \models$“S は stationary” がわかる. ふたたび M の elementarity から, S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる. θ は十分に大きくとってあったので, S は本当に stationary であることが結論できる. □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える．

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．
$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明． $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる．□

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える．

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明． $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる． □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (1/2)

- elementary submodel を用いた証明を与える.

Lemma 3

κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ 解説 の *elementary submodel* で，$\kappa \in M$, $\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となっているものとする．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として，$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の *stationary* な部分集合である．

証明. $C \in M$ を $M \models$“C は κ の club subset” とすると，M の elementarity から，C は本当に ($\mathcal{H}(\theta)$ で) κ の club subset である．$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded になるから，C が club であることから $\alpha^* \in C$ となる．特に，$S \cap C \neq \emptyset$ だから，elementarity により，$M \models$“$S \cap C \neq \emptyset$” である．

C は M での任意の club set だったから，$M \models$“S は stationary” がわかる．ふたたび M の elementarity から，S は $\mathcal{H}(\theta)$ で stationary であることがわかる．θ は十分に大きくとってあったので，S は本当に stationary であることが結論できる． □

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明． $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明． $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明． $S \subseteq \kappa$ を stationary として， $f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，κ, S, $f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる． S が stationary であることから，これは可能である． $\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする． $\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である． $\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により， S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明. $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

▶ Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明．　$S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

▶ Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明. $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，κ, S, $f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明．　$S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである．　□

▶ Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明． $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明. $S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

▶ Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明． $S \subseteq \kappa$ を stationary として， $f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により， S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

Fodor の定理 (一般形) の証明 (2/2)

定理 2 (Fodor の定理)

$\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての *stationary* な $S \subseteq \kappa$ と *regressive* な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の *stationary* な部分集合になるものが存在する．

証明．$S \subseteq \kappa$ を stationary として，$f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，$\kappa, S, f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in S$ となるようにとる．S が stationary であることから，これは可能である．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とする．$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ ある．

$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 3 により，S_0 は stationary である．

したがって，この β^* は求めるようなものである． □

- Fodor の定理は，いくつかのやり方でさらに一般化できるが，それらの一般化も上の elementary submodel を用いる証明の variation で証明できる．

応用問題

100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある．この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓：

あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい

応用問題

100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある．この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓 :

あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい

応用問題

100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある． この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓 :

あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい

応用問題

100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある． この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓 :

あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい

応用問題

100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある． この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓 :

~~あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい~~

応用問題

> 100 円入れると 200 円出てくる自動販売機がある．この自動販売機に ω_1 回 100 円を入れた後の手持ちのお金はいくらになるか?

この話の教訓：

~~あやしいもうけ話にはやたらに手を出さない方がいい~~

無限組合せ論は大変に面白い分野である !!!

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です．

¡Gracias por su atención!

このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version および，もう少し詳しいテキスト版を，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

にリンクする予定です.

Fodor の定理の数学史

Dieser Satz wurde vor der genannten Arbeit des Verfassers in den folgenden speziellen Fällen bewiesen:

1. $\Lambda = \omega_1$ und $M = W(\omega_1)$ (Alexandroff und Urysohn [1]),
2. $\Lambda = \omega_{\nu+1}$ und $M = W(\omega_{\nu+1})$ (Ben Dushnik [2]),
3. $M = W(\Lambda)$ (P. Erdős [3]),
4. $\Lambda = \omega_1$ und M eine abgeschlossene Teilmenge von $W(\omega_1)$ (J. Novák [4]),
5. Λ eine reguläre Limeszahl (W. Neumer [5]),
6. M eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge von $W(\Lambda)$ (H. Bachmann [6]).

[1] P. S. Alexandroff—P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wiss. Amsterdam*, (1) **45**, Nr. 1, 1—96.
[2] Ben Dushnik, A note on transfinite ordinals, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 860—862.
[3] P. Erdős, Some remarks on set theory, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **1** (1950). 127—141.
[4] J. Novák, A paradoxical theorem, *Fundamenta Math.*, **37** (1950), 77—83.
[5] W. Neumer, Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), 254—261.
[6] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955), S. 43.
[7] G. Fodor, Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 204—206.
[8] G. Bloch, Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions regressives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 265—267.

◂ 戻る

Géza Fodor: Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, Acta Sci. Math. Szeged, 17 (1956), 139-142.

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

戻る

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか ?]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている． したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である． 特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ．[演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる．このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)， C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている． したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である． 特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

Closed sets と stationary sets

- $C \subseteq \kappa$ が κ で closed unbounded であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α と cofinal なら $\alpha \in C$ となり (closed)，C は κ で cofinal になる (unbounded) ことである．
- $S \subseteq \kappa$ が κ で stationary とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となることである．

- "closed unbounded" は "club" または "cub" と略すことも多い．
- 一般には，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ なら，κ での club や stationary の定義が意味を持つ． [演習: $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ では何が起るか？]
- κ が正則のときは，κ の club subsets の全体は，$< \kappa$ 個の要素の intersection に関して閉じている．したがって，κ の club set を含む部分集合の全体は $< \kappa$-closed filter になる． このことから，"$S \subseteq \kappa$ は stationary" は，"S は無視できない大きさを持つ κ の部分集合" であることの概念を与えていると理解できる．
- S が κ で stationary なら，S は κ で cofinal である．特に，κ が正則なら，$|S| = \kappa$ となる．

- $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditarily of cardinality $< \theta$ な集合の全体からなる集合をあらわす.
- x が hereditarily （先祖代々） of cardinality $< \theta$ とは, x 自身も, x のすべての要素も, x のすべての要素の要素も $\cdots$ すべて濃度が $< \theta$ となることである. これは, x の transitive closure の濃度が $< \theta$ となること, として定義できる.
- $\mathcal{H}(\theta)$ は transitive な集合である（集合であることは $\mathcal{H}(\theta) \subseteq V_\theta$ からわかる）.
- θ が非可算な正則基数のとき, 構造 $\mathcal{H}(\theta) = \langle \mathcal{H}(\theta), \in \rangle$ で power set axiom 以外のすべての集合論の公理が成り立つ.

戻る

- $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditarily of cardinality $< \theta$ な集合の全体からなる集合をあらわす.
- x が hereditarily（先祖代々）of cardinality $< \theta$ とは，x 自身も，x のすべての要素も，x のすべての要素の要素も … すべて濃度が $< \theta$ となることである．これは，x の transitive closure の濃度が $< \theta$ となること，として定義できる.
- $\mathcal{H}(\theta)$ は transitive な集合である（集合であることは $\mathcal{H}(\theta) \subseteq V_\theta$ からわかる）.
- θ が非可算な正則基数のとき，構造 $\mathcal{H}(\theta) = \langle \mathcal{H}(\theta), \in \rangle$ で power set axiom 以外のすべての集合論の公理が成り立つ.

戻る

- $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditarily of cardinality $< \theta$ な集合の全体からなる集合をあらわす.
- x が hereditarily （先祖代々） of cardinality $< \theta$ とは, x 自身も, x のすべての要素も, x のすべての要素の要素も … すべて濃度が $< \theta$ となることである. これは, x の transitive closure の濃度が $< \theta$ となること, として定義できる.
- $\mathcal{H}(\theta)$ は transitive な集合である（集合であることは $\mathcal{H}(\theta) \subseteq V_\theta$ からわかる）.
- θ が非可算な正則基数のとき, 構造 $\mathcal{H}(\theta) = \langle \mathcal{H}(\theta), \in \rangle$ で power set axiom 以外のすべての集合論の公理が成り立つ.

戻る

- $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditarily of cardinality $< \theta$ な集合の全体からなる集合をあらわす.
- x が hereditarily（先祖代々）of cardinality $< \theta$ とは，x 自身も，x のすべての要素も，x のすべての要素の要素も $\cdots$ すべて濃度が $< \theta$ となることである．これは，x の transitive closure の濃度が $< \theta$ となること，として定義できる.
- $\mathcal{H}(\theta)$ は transitive な集合である（集合であることは $\mathcal{H}(\theta) \subseteq V_\theta$ からわかる）.
- θ が非可算な正則基数のとき，構造 $\mathcal{H}(\theta) = \langle \mathcal{H}(\theta), \in \rangle$ で power set axiom 以外のすべての集合論の公理が成り立つ.

- $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditarily of cardinality $< \theta$ な集合の全体からなる集合をあらわす.
- x が hereditarily（先祖代々）of cardinality $< \theta$ とは，x 自身も，x のすべての要素も，x のすべての要素の要素も $\cdots$ すべて濃度が $< \theta$ となることである．これは，x の transitive closure の濃度が $< \theta$ となること，として定義できる.
- $\mathcal{H}(\theta)$ は transitive な集合である（集合であることは $\mathcal{H}(\theta) \subseteq V_\theta$ からわかる）.
- θ が非可算な正則基数のとき，構造 $\mathcal{H}(\theta) = \langle \mathcal{H}(\theta), \in \rangle$ で power set axiom 以外のすべての集合論の公理が成り立つ.

戻る