バナッハ＝タルスキーの定理

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

以下は，2008 年度の八ヶ岳フレッシュマン・セミナーでの「バナッハ＝タルスキーの定理とそれに関連した結果に関するセミナー」の教材として作ったものです．指定した Winfried Just と Martin Weese による教科書 [2] でのバナッハ＝タルスキーの定理（この教科書の Theorem 43）の証明をまとめなおしてあります．

教科書のいくつかの細部が補われていますが，一部では意識的に細部を補わず「演習」としたところもあります．これらの「演習」はセミナーの参加者に埋めてもらう細部，ということですが，その難易度にはばらつきがあります．ただし，ここで「演習」と指定しなかった部分でも，さらに細部を埋める必要のある個所も沢山あるはずです．

ノーテーションや細部の証明の流れは教科書と多少異なるところもあります．特に，教科書では回転群が右から作用する書き方になっていますが，このノートでは，関数の合成の標準的な表記の順序に合わせるために，すべて左から作用する書き方になおしてあります．

* * *

$\mathbb{R}^3$ での，原点を中心とする回転軸の回りの回転の全体の作る群を，$\mathcal{G}$ とあらわすことにする[1]．また $G = G_0 * G_1$ とする．ここに G_0 は φ を生成元とする位数が 2 の群で G_1 は ψ を生成元とする位数が 3 の群とする．$G_0 = \{e, \varphi\}$, $G_1 = \{e, \psi, \psi^{-1}\}$ である． また $*$ は群（アーベル群ではない）の自由積をあらわす．G の要素は，φ, ψ, ψ^{-1} からなる（有限長の）積表現で，同じものが隣あっておらず，ψ と ψ^{-1} も隣あっていな

[0] July 19, 2020 (19:43 JST) 版．このノートの最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/yatsugatake/yatsugatake2008note.pdf

としてダウンロードできます．また，このノートを含む，フレッシュマンセミナーでの私のセミナーの関連資料や，過去のセミナーの記録などが，

https://fuchino.ddo.jp/yatsugatake/freshman-seminar.html

に置いてあります．

[1] この群の演算を $\circ$ であらわす．ただし，$\zeta, \eta \in \mathcal{G}$ のとき，$\zeta \circ \eta$ で，回転 η をほどこして，その後で回転 ζ をほどこすことに対応する回転をあらわす．

いようなものにより，一意に表現できる[2]．このような積表現を，ここでは，標準積表現 (standard representation ?) と呼ぶことにして，s.r. と略すことにする[3]．ただし，ここで，空の積表現を e と同一視することにする．また s.r. t に対し，$\ell(t)$ で t の長さを表すことにする．たとえば，$\ell(\varphi \circ \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) = 4$ である．

補題 1. $\mathcal{G}$ の部分群で G と同型なものが存在する．

証明． d_0 と d_1 を $\mathbb{R}^3$ の原点を通る回転軸として，φ_0 を d_0 の回りの 180 度の回転，ψ_0 を d_1 の回りの 120 度の回転とする[4]．φ_0 と ψ_0 はそれぞれ，G_0 と G_1 と同型な $\mathcal{G}$ の部分群 G'_0, G'_1 を生成する．d_0 と d_1 のなす角を α とすると，α を固定するごとに，$\{\varphi_0, \psi_0\}$ から生成される群が（同型を除いて）一意に決まる．

空でない s.r. t に対し，$t = e$ が成り立つような角度 α は高々有限個しかない（演習: 一致の定理を用いる）．一方，s.r. は可算個しかないから，どれかの空でない s.r. t で $t = e$ が成り立っているような角度 α は高々可算個しか存在しない．一方 d_0 と d_1 のなす角度は連続体濃度個あるから，このような可算個の角度以外の角度 α^* をとることができる．そのような α^* に対しては，すべての空でない s.r. t に対し $t \neq e$ が成り立つ．したがって，d_0 と d_1 のなす角が α^* のとき，$\{\varphi_0, \psi_0\}$ から生成される $\mathcal{G}$ の部分群は G'_0 と G'_1 の自由積になっている． ❑ (補題 1)

以下では G を上の補題でのような $\mathcal{G}$ の部分群と同一視して議論することにする．$\zeta \in G$ と $X \subseteq G$ に対し，$\zeta \circ X$ で，$\{\zeta \circ \eta : \eta \in X\}$ をあらわす．

Lemma40

補題 2 (教科書の Lemma 40)**.** G の *3* つの集合 A, B, C への分割で，

(*1) $\varphi \circ A = B \cup C,$ 40-0

(*2) $\psi \circ A = B,$ 40-1

(*3) $\psi^{-1} \circ A = C$ 40-2

となるものが存在する．

証明． G の元とその s.r. を同一視して議論する．

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ となるように A_n, B_n, $C_n \subseteq G$, $n \in \mathbb{N}$ を n に関する帰納法で以下のように定義する．

(*4) $A_0 = \{e\}$, $B_0 = \{\varphi, \psi\}$, $C_0 = \{\psi^{-1}\}$ 40-3

---

[2]たとえば，$\varphi \circ \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ はこのような表現の 1 つである．これに対し，$\varphi \circ \varphi$ や $\psi \circ \psi$, $\psi \circ \psi^{-1}$ は，このようなものにはなっていない．これらの積はそれぞれ，e, ψ^{-1}, e と等しくなることに注意．

[3]自由積に関する知識でここで必要となるのは，G_0 と G_1 の自由積の要素がここで定義したような標準積表現として一意に表されるという事実のみである．

[4]$180 \times 2 = 360$, $120 \times 3 = 360$ に注意．

とする．A_n, B_n, C_n が既に定義されたとき，

$$\text{(*5)}\quad A_{n+1} = A_n \cup \{\varphi\circ t : t\in B_n\cup C_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \psi \text{ または } \psi^{-1}\} \cup \{\psi\circ t : t\in C_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\} \cup \{\psi^{-1}\circ t : t\in B_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\},$$ 40-4

$$\text{(*6)}\quad B_{n+1} = B_n \cup \{\varphi\circ t : t\in A_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \psi \text{ または } \psi^{-1}\} \cup \{\psi\circ t : t\in A_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\} \cup \{\psi^{-1}\circ t : t\in C_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\},$$ 40-5

$$\text{(*7)}\quad C_{n+1} = C_n \cup \{\psi\circ t : t\in B_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\} \cup \{\psi^{-1}\circ t : t\in A_n,\ \ell(t)\geq 1 \text{ で } t \text{ の最初の記号は } \varphi\}$$ 40-6

とする．

C2-1

Claim 2.1. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，それぞれ $\subseteq$ に関する上昇列である．

$\vdash$ n に関する帰納法により明らか． $\dashv$ (Claim 2.1)

Claim 2.2. A, B, C は互いに素である（つまり $A\cap B=\emptyset,\ldots$ が成り立つ）．

$\vdash$ Claim 2.1 により，n に関する帰納法で，次が証明できれば十分である: A_n, B_n, C_n は互いに素である．以下（演習）． $\dashv$ (Claim 2.2)

Claim 2.3. $A\cup B\cup C = G$.

$\vdash$ $t\notin A\cup B\cup C$ となる s.r. t が存在したとして，t をそのようなもののうちで $\ell(t)$ が最小のものとする．このとき，(*4) から，$\ell(t)>1$ である．$t=\zeta\circ t'$ とする．ただし ζ は φ, ψ, ψ^{-1} のうちのどれかである．このとき仮定から $t'\in A\cup B\cup C$ だから，(*5), (*6), (*7) により，$t=\zeta\circ t'\in A\cup B\cup C$ となり矛盾である． $\dashv$ (Claim 2.3)

Claim 2.4. (1) $\varphi\circ A = B\cup C$.
(2) $\psi\circ A = B$.
(3) $\psi^{-1}\circ A = C$.

$\vdash$ (1) ：まず $\varphi\circ A\subseteq B\cup C$ を示す．$t\in A$ とする．$\varphi\circ t\in B\cup C$ を示せばよい．
Case 1. $t=e$ のとき．このときには，(*4) により，$\varphi\circ t=\varphi\in B_0$ だから，$\varphi\circ t\in B\cup C$ である．
Case 2. $\ell(t)\geq 1$ のとき．**Case 2a.** $t=\varphi\circ t'$ という形をしているとき．このときには，$t\in A$ だったから，(*4) と (*5) から，$t'\in B\cup C$ だが，$\varphi\circ t=\varphi\circ\varphi\circ t'=t'$ に

より，$\varphi \circ t \in B \cup C$ がわかる．**Case 2b.** その他のとき．このときには，(*6) により，$\varphi \circ t \in B \subseteq B \cup C$ である．

つぎに，$\varphi \circ A \supseteq B \cup C$ を示す．$t \in B \cup C$ とする．t が，ある A の元 t' によって $\varphi \circ t'$ とあらわされることを示せばよい．

$\ell(t) \leq 1$ のときには，(*4) により，t は (i) φ か (ii) ψ か (iii) ψ^{-1} でありえるが，(i) なら，$t = \varphi = \varphi \circ e$ で (*4) により $e \in A$ だから，$t \in \varphi \circ A$ がわかる．(ii) なら，$t = \varphi \circ \varphi \circ \psi$ だが，(*4) と (*5) により，$\varphi \circ \psi \in A$, したがって，$t \in \varphi \circ A$ である．(iii) の場合も同様.

$\ell(t) > 1$ のときには，t が $\varphi \circ t'$ の形をしているときには，$t \in B \cup C$ と (*6), (*7) により，$t' \in A$ だから，$t \in \varphi \circ A$ である．t が $\psi \circ t'$ の形をしているときには，$\varphi \circ t$ は s.r. である．このとき，(*5) により $\varphi \circ t \in A$ となるから，$t = \varphi \circ \varphi \circ t \in \varphi \circ A$ である．

(2), (3): (1) と同様（演習）． $\dashv$ (Claim 2.4)

以上により，ここで構成した A, B, C が求めるようなものになっていることが示せた． ❑ (補題 2)

$\mathbb{R}^3$ で原点を中心とする半径 1 の単位球面 (unit sphere) を S とあらわすことにする．$\mathbb{R}^3$ の部分集合 X, Y について， X が，原点を中心とする，ある回転で Y に移ることを，$X \cong^{\circ} Y$ とあらわすことにする．

hausdorff

定理 3 (F. Hausdorff (1914), 教科書の Theorem 41)**.** S の分割 $\{X, Y, Z, Q\}$ で，次を満たすものが存在する．

(*8) Q は可算*;* 41-0

(*9) $X \cong^{\circ} Y \cong^{\circ} Z$*;* 41-1

(*10) $X \cong^{\circ} Y \cup Z$*.* 41-2

証明． φ, ψ, A, B, C を補題 2 でのようなものとする．各 $t \in G \setminus \{e\}$ に対し，$t \restriction S$ の fixed points は，回転軸と S との交点の 2 点である．G は可算だから，$G \setminus \{e\}$ のどれかの元の fixed point となっているような S 上の点は高々可算個である．これらの点の全体を Q とする[5]．各点 $x \in S \setminus Q$ に対し，x の G による軌道を

(*11) $P_x = \{t(x) : t \in G\}$

とする．$\mathcal{P} = \{P_x : x \in S \setminus Q\}$ は $S \setminus Q$ の分割になる（演習）．各 $P \in \mathcal{P}$ に対し $x_P \in P$ を選び[6]

(*12) $M = \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$

[5] $|\,S\,| = 2^{\aleph_0}$ （つまり，S の濃度は連続体濃度）だから，$|\,S \setminus Q\,| = 2^{\aleph_0}$ （つまり，$S \setminus Q$ の濃度も）連続体濃度となることに注意する．

[6] これができることを保証するために選択公理が用いられている．

とする．$\zeta, \eta \in G$ で $\zeta \neq \eta$ なら，$\zeta[M] \cap \eta[M] = \emptyset$ となることに注意する．

ここで，

$$(*13)\quad X = \{\eta(a) : \eta \in A,\, a \in M\} = \bigcup_{\eta \in A} \eta[M],$$ 41-3

$$(*14)\quad Y = \{\eta(a) : \eta \in B,\, a \in M\} = \bigcup_{\eta \in B} \eta[M],$$ 41-4

$$(*15)\quad Z = \{\eta(a) : \eta \in C,\, a \in M\} = \bigcup_{\eta \in C} \eta[M]$$ 41-5

とする．上の注意から X, Y, Z は互いに素であることがわかる．$A \cup B \cup C = G$ により，$X \cup Y \cup Z = S \setminus Q$ である．

(*1) により，

$$\begin{aligned}
\varphi[X] &= \{\varphi(t(a)) : t \in A,\, a \in M\} \\
&= \{(\varphi \circ t)(a) : t \in A,\, a \in M\} \\
&= \{u(a) : u \in B \cup C,\, a \in M\} \\
&= \{u(a) : u \in B,\, a \in M\} \cup \{u(a) : u \in C,\, a \in M\} \\
&= Y \cup Z
\end{aligned}$$

となる．同様に，それぞれ (*2), (*3) から $\psi[X] = Y$, $\psi^{-1}[X] = Z$ がわかる．したがって，ここでの X, Y, Z, Q は求める性質 (*8), (*9), (*10) を持つものとなっている．

❑ (定理 3)

上では，$X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，$X \cong^\circ Y$ を，ある原点を中心とする回転で X が Y に移せること，としたが，以降では，$X \cong Y$ で，ある等長変換 (isometry) で X が Y に移せることとする．もちろん，$X \cong^\circ Y$ なら，$X \cong Y$ である．

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$$(*16)\quad \begin{aligned} X \approx Y \;:\Leftrightarrow\; & n \in \mathbb{N} \text{ と } X, Y \text{ の分割 } \{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\} \text{ が} \\ & \text{存在して, } X_i \cong Y_i \text{ がすべての } i < n \text{ に対し成り立つ} \end{aligned}$$ def-0

とする．また (*16) で $\cong$ を $\cong^\circ$ で置き換えて得られる関係を，$\approx^\circ$ と書くことにする．もちろん $X \approx^\circ Y$ なら $X \approx Y$ である．

なお，本セミナーでは，$X \approx Y$ のとき，X と Y は “有限分割合同である” と言うことにする[7]．

lemma42

補題 4 (教科書の Lemma 42)**.** (0)　$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ なら $X \approx Y$ である．

(1)　$\approx$ は同値関係である．

(2)　$\{X_i : i < m\}$, $\{Y_i : i < m\}$ をそれぞれ X と Y の分割として，$X_i \approx Y_i$ がすべての $i < m$ に対し成り立てば，$X \approx Y$ である．

(3)　$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である．

[7] この用語は，私が間にあわせで適当に選んだものだったのだが，セミナーの後で，調べたところ，奇しくも，（故）倉田令二朗先生の [3] でも全く同じ表現が用いられていたことを発見した．

証明． (1),(2): 演習．

(3): $\{X_i : i < n\}$ と $\{X'_i : i < n\}$ をそれぞれ X と X' の分割で，$X_i \cong X'_i$, $i < n$ となるものとする．f_i, $i < n$ を等長変換で，$f_i[X_i] = X'_i$, $i < n$ となるものとする．

$f = \bigcup_{i<n} f_i \restriction X_i$ とする．つまり，$f : X \to X'$ を， $x \in X_i$ なら $f(x) = f_i(x)$ として定義する．このとき，

$$X^0 = X,\ X^1 = f[X^0],\ X^2 = f[X^1], \ldots$$
$$Y^0 = Y,\ Y^1 = f[Y^0],\ Y^2 = f[Y^1], \ldots$$

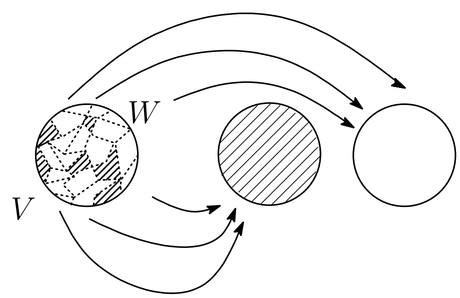
として，

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X^n \setminus Y^n) = (X \setminus Y) \mathbin{\dot\cup} f[X \setminus Y] \mathbin{\dot\cup} (f \circ f)[X \setminus Y] \mathbin{\dot\cup} \cdots$$

とする．$f[Z] = f[X \setminus Y] \mathbin{\dot\cup} (f \circ f)[X \setminus Y] \mathbin{\dot\cup} \cdots \subseteq Z$ で，$X = Z \mathbin{\dot\cup} (X \setminus Z)$, $Y = f[Z] \mathbin{\dot\cup} (X \setminus Z)$ だから（演習），$Z \approx f[Z]$ （演習）により，$X \approx Y$ がわかる． ❑ (補題 4)

banach-tarski

定理 5 (S.Banach and A.Tarski [1] (1924), 教科書の Theorem 43)**.** $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする，単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．



証明． $\mathbb{R}^3$ の原点を o とあらわすことにする．S は U の boundary であることに注意する．$D \subseteq S$ に対し，

$$\hat{D} = \{y \in U \setminus \{o\} : y \text{ は } D \text{ のある点 } x \text{ と } o \text{ を結ぶ線分上の点}\}$$

とする．$X, Y \subseteq S$ で，$X \cong Y$ なら，$\hat{X} \cong \hat{Y}$ となり，$X \approx^\circ Y$ なら $\hat{X} \approx^\circ \hat{Y}$ となることに注意する．また，$Z = X \cup Y$ のとき，$\hat{Z} = \hat{X} \cup \hat{Y}$ である（演習).

$\{X, Y, Z, Q\}$ を定理 3 でのような S の分割とする．このとき，$\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{Q}, \{o\}\}$ は U の分割となる．(*9), (*10) により，

(*17) $\quad X \cong^\circ Y \cong^\circ Z \cong^\circ Y \cup Z$ 43-a

だから，上の注意により，

(*18) $\quad \hat{X} \cong^\circ \hat{Y} \cong^\circ \hat{Z} \cong^\circ \hat{Y} \cup \hat{Z}$

である．(*17) と補題 4, (0), (2) （の $\approx^\circ$ 版）から，

$$(*19)\quad Y \cup Z \approx^\circ X \cup Z \approx^\circ X \cup Y \cup Z$$ 43-1

である．また，補題 4, (0), (1) と，(*17), (*19) により，$X \approx^\circ X \cup Y \cup Z$ である．したがって，補題 4, (2) と上の注意により，

$$(*20)\quad \hat{X} \cup \hat{Q} \cup \{o\} \approx \hat{X} \cup \hat{Y} \cup \hat{Z} \cup \hat{Q} \cup \{o\} = U$$ 43-2

である．

Q は可算だから, $\mathcal{G}$ の元 η で $Q \cap \eta[Q] = \emptyset$ となるものがとれる（演習）$\eta[Q] \subseteq X \cup Y \cup Z$ だから，$Z \approx^\circ X \approx^\circ X \cup Y \cup Z$ により，$T \subseteq Z$ で，$T \approx Q$ となるものがとれる．T は可算で，$Z \approx^\circ X \cup Y \cup Z$ により $|\,Z\,| = 2^{\aleph_0}$ だから，$p \in Z \setminus T$ がとれるが，

$$(*21)\quad \hat{X} \cup \hat{Q} \cup \{o\} \approx \hat{Y} \cup \hat{T} \cup \{p\}$$ 43-3

で，$\hat{Y} \subseteq \hat{Y} \cup \hat{T} \cup \{p\} \subseteq \hat{Y} \cup \hat{Z}$ だから，補題 4, (3) と (*20), (*21) から

$$\hat{Y} \cup \hat{Z} \approx \hat{Y} \cup \hat{T} \cup \{p\} \approx \hat{X} \cup \hat{Q} \cup \{o\} \approx U$$

により，$\hat{Y} \cup \hat{Z} \approx U$ となる．したがって，

$$V = \hat{X} \cup \hat{Q} \cup \{o\}, \quad W = \hat{Y} \cup \hat{Z}$$

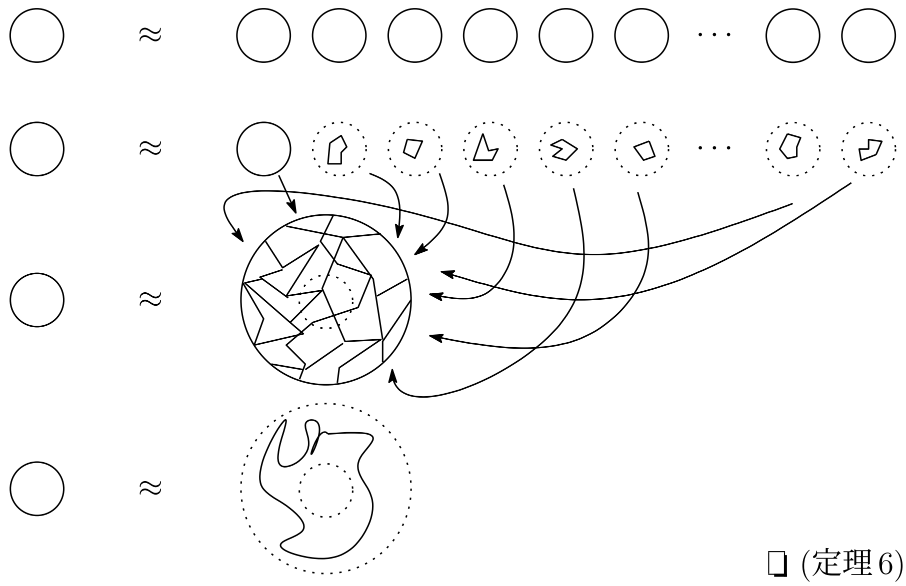
とすれば，$\{V, W\}$ は求めるようなものとなっていることがわかる．

❑ (定理 5)

定理 6 (教科書の Exercise 56)**．** A を内部を持つ[8]任意の $\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である．

証明． （スケッチ）まず，定理 5 から，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$U_n \approx U$ を示す．ここに，U_n は $(3i, 0, 0)$, $i < n$ を中心とする n 個の単位球の和集合とする．このことと補題 4, (3) を使って，任意の球 B に対し，$B \approx U$ が成り立つことを示し，さらに，この主張と補題 4, (3) を使って，定理の主張を示すことができる．

[8]つまり，ある開球をうめこむことができる．



❏ (定理6)

定理 7. $\mathbb{R}^3$ の原点 o を中心とする単位球面 S の分割 $\{S_1, S_2\}$ で $S_1 \approx^\circ S_2 \approx^\circ S$ となるようなものが存在する.

証明. 定理3 と 補題4, (3) (の $\approx^\circ$ 版) による (演習). ❏ (定理7)

References

[1] Stefan Banach, and Alfred Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fundamenta Mathematicae 6, 244–277 (1924).

[2] Winfried Just, and Martin Weese, Discovering Modern Set Theory I (Graduate Studies in Mathematics, Vol 8), American Mathematical Society (1995).

[3] 倉田令二朗, 数学論序説, ダイヤモンド社 (1972).