バナッハ=タルスキーの定理
と
これに関連する（いくつかの）結果

2008 八ヶ岳フレッシュマン・セミナー

Sakaé Fuchino （渕野 昌）

中部大学 (Chubu Univ.)
fuchino@isc.chubu.ac.jp
http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/

(October 10, 2008 (13:28) 版)

このスライドは pLaTeX + beamer class で作成しています.

バナッハ=タルスキーの定理

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ で X と Y は，回転と平行移動の合成により互いに移りあえる，という関係をあらわすことにする（ここでは「裏返しにする」という等長変換は考えないでよい）.

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$$X \approx Y \;:\Leftrightarrow\; n \in \mathbb{N} \text{ と } X, Y \text{ の分割 } \{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\} \text{ が存在して，} X_i \cong Y_i \text{ がすべての } i < n \text{ に対し成り立つ}$$

$X \approx Y$ のとき X と Y は **有限分割合同** である，と言うことにする.

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ＝タルスキーの定理

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ で X と Y は，回転と平行移動の合成により互いに移りあえる，という関係をあらわすことにする（ここでは「裏返しにする」という等長変換は考えないでよい）.

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$X \approx Y$ $:\Leftrightarrow$ $n \in \mathbb{N}$ と X, Y の分割

$\{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\}$ が存在して，

$X_i \cong Y_i$ がすべての $i < n$ に対し成り立つ

$X \approx Y$ のとき X と Y は **有限分割合同** である，と言うことにする.

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ で X と Y は，回転と平行移動の合成により互いに移りあえる，という関係をあらわすことにする（ここでは「裏返しにする」という等長変換は考えないでよい）.

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$X \approx Y$:⇔ $n \in \mathbb{N}$ と X, Y の分割

$\{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\}$ が存在して，

$X_i \cong Y_i$ がすべての $i < n$ に対し成り立つ

$X \approx Y$ のとき X と Y は **有限分割合同** である，と言うことにする.

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ で X と Y は，回転と平行移動の合成により互いに移りあえる，という関係をあらわすことにする（ここでは「裏返しにする」という等長変換は考えないでよい）.

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$X \approx Y$:⇔ $n \in \mathbb{N}$ と X, Y の分割

$\{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\}$ が存在して，

$X_i \cong Y_i$ がすべての $i < n$ に対し成り立つ

$X \approx Y$ のとき X と Y は **有限分割合同** である，と言うことにする.

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$X \cong Y$ で X と Y は，回転と平行移動の合成により互いに移りあえる，という関係をあらわすことにする（ここでは「裏返しにする」という等長変換は考えないでよい）.

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，

$X \approx Y \;:\Leftrightarrow\; n \in \mathbb{N}$ と X, Y の分割
$\{X_i : i < n\}, \{Y_i : i < n\}$ が存在して，
$X_i \cong Y_i$ がすべての $i < n$ に対し成り立つ

$X \approx Y$ のとき X と Y は **有限分割合同** である，と言うことにする.

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

バナッハ=タルスキーの定理

定理 1 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する.

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 2 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 分割 $\{V, W\}$ で，V と W が U と有限分割合同になることを示す V と W の分割が，物理的に実現可能なものである，という保証はどこにもされていない．
- 実際，V や W の有限分割が物理的に実現可能なものだとすれば，そのような分割に現われる集合は体積を持っていなくてはならないので，体積の和の保存性から，上の定理のような状況が生じることはありえない．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 2 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 分割 $\{V, W\}$ で，V と W が U と有限分割合同になることを示す V と W の分割が，物理的に実現可能なものである，という保証はどこにもされていない．
- 実際，V や W の有限分割が物理的に実現可能なものだとすれば，そのような分割に現われる集合は体積を持っていなくてはならないので，体積の和の保存性から，上の定理のような状況が生じることはありえない．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 2 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 分割 $\{V, W\}$ で，V と W が U と有限分割合同になることを示す V と W の分割が，物理的に実現可能なものである，という保証はどこにもされていない．
- 実際，V や W の有限分割が物理的に実現可能なものだとすれば，そのような分割に現われる集合は体積を持っていなくてはならないので，体積の和の保存性から，上の定理のような状況が生じることはありえない．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 3 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 言葉を変えると，バナッハ=タルスキーの定理は，測度を持たない集合の存在を証明していると見ることもできる．測度を持たない集合の存在証明自体は Vitali による，もう少し簡単なものも知られている（これについても，このセミナーで勉強する）．しかし，実は次のようなもっと強い定理が，バナッハ=タルスキーの定理から導かれることがわかる:

定理 4 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 3 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 言葉を変えると，バナッハ=タルスキーの定理は，測度を持たない集合の存在を証明していると見ることもできる．測度を持たない集合の存在証明自体は Vitali による，もう少し簡単なものも知られている（これについても，このセミナーで勉強する）．しかし，実は次のようなもっと強い定理が，バナッハ=タルスキーの定理から導かれることがわかる:

定理 4 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 3 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 言葉を変えると，バナッハ=タルスキーの定理は，測度を持たない集合の存在を証明していると見ることもできる．測度を持たない集合の存在証明自体は Vitali による，もう少し簡単なものも知られている（これについても，このセミナーで勉強する）．しかし，実は次のようなもっと強い定理が，バナッハ=タルスキーの定理から導かれることがわかる:

定理 4 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 3 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 言葉を変えると，バナッハ=タルスキーの定理は，測度を持たない集合の存在を証明していると見ることもできる．測度を持たない集合の存在証明自体は Vitali による，もう少し簡単なものも知られている（これについても，このセミナーで勉強する）．しかし，実は次のようなもっと強い定理が，バナッハ=タルスキーの定理から導かれることがわかる:

定理 4 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

バナッハ=タルスキーの逆理？

定理 3 (S.Banach and A.Tarski (1924))

単位球 U の分割 $\{V, W\}$ で，$V \approx W \approx U$ となるものが存在する．

- 言葉を変えると，バナッハ=タルスキーの定理は，測度を持たない集合の存在を証明していると見ることもできる．測度を持たない集合の存在証明自体は Vitali による，もう少し簡単なものも知られている（これについても，このセミナーで勉強する）．しかし，実は次のようなもっと強い定理が，バナッハ=タルスキーの定理から導かれることがわかる:

定理 4 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

3 次元空間の特徴付け

定理 5 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

これに対し，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ では，すべての部分集合について定義された等長変換不変な有限加法的な測度が存在する．

したがって，$\mathbb{R}^3$ を，そのような測度の存在しない（あるいは Banach-Traski 定理の成立する）最小次元の空間として特徴づけることも可能である．

3 次元空間の特徴付け

定理 5 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

これに対し，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ では，すべての部分集合について定義された等長変換不変な有限加法的な測度が存在する．

したがって，$\mathbb{R}^3$ を，そのような測度の存在しない（あるいは Banach-Traski 定理の成立する）最小次元の空間として特徴づけることも可能である．

3 次元空間の特徴付け

定理 5 (Banach-Tarski 定理の（ほとんど）自明な系)

$\mathbb{R}^3$ の部分集合で，どんな等長変換不変な有限加法的な測度に対しても可測にならないようなものが存在する．

これに対し，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ では，すべての部分集合について定義された等長変換不変な有限加法的な測度が存在する．

したがって，$\mathbb{R}^3$ を，そのような測度の存在しない（あるいは Banach-Traski 定理の成立する）最小次元の空間として特徴づけることも可能である．

選択公理とバナッハ=タルスキーの定理

バナッハ=タルスキーの定理の証明には選択公理が不可欠である:

定理 6 (R.Solovay (1970))

ZFC + "到達不可能基数が存在する" が無矛盾なら，ZF （選択公理を除いた残りの集合論の公理系） + "すべての実数の集合はルベーク可測" も無矛盾.

上の定理で構成された集合論のモデルでは，バナッハ=タルスキーの定理は成立しえないが，もしバナッハ=タルスキーの定理に選択公理なしの証明があったとすると，その証明はこのモデルでも有効なので，矛盾である.

選択公理とバナッハ=タルスキーの定理

バナッハ=タルスキーの定理の証明には選択公理が不可欠である:

定理 6 (R.Solovay (1970))

ZFC + "到達不可能基数が存在する" が無矛盾なら，ZF （選択公理を除いた残りの集合論の公理系） + "すべての実数の集合はルベーク可測" も無矛盾.

上の定理で構成された集合論のモデルでは，バナッハ=タルスキーの定理は成立しえないが，もしバナッハ=タルスキーの定理に選択公理なしの証明があったとすると，その証明はこのモデルでも有効なので，矛盾である.

選択公理とバナッハ=タルスキーの定理

バナッハ=タルスキーの定理の証明には選択公理が不可欠である:

定理 6 (R.Solovay (1970))

ZFC + ”到達不可能基数が存在する” が無矛盾なら，ZF （選択公理を除いた残りの集合論の公理系） + ”すべての実数の集合はルベーグ可測” も無矛盾.

上の定理で構成された集合論のモデルでは，バナッハ=タルスキーの定理は成立しえないが，もしバナッハ=タルスキーの定理に選択公理なしの証明があったとすると，その証明はこのモデルでも有効なので，矛盾である.

選択公理とバナッハ=タルスキーの定理

バナッハ=タルスキーの定理の証明には選択公理が不可欠である:

定理 6 (R.Solovay (1970))

ZFC + ”到達不可能基数が存在する” が無矛盾なら，ZF （選択公理を除いた残りの集合論の公理系） + ”すべての実数の集合はルベーク可測” も無矛盾.

上の定理で構成された集合論のモデルでは，バナッハ=タルスキーの定理は成立しえないが，もしバナッハ=タルスキーの定理に選択公理なしの証明があったとすると，その証明はこのモデルでも有効なので，矛盾である.

バナッハ=タルスキーの定理は
選択公理が正しくないことを示唆しているか?

この設問への否定的な答えとなっていると解釈できる結果が知られている.

選択公理を仮定しなくても，バナッハ=タルスキーの定理と同じかそれ以上にパラドクシカルな $\mathbb{R}^2$ の分割が構成できる:

定理 7 (R.Dougerty and M.Foreman (1992) in ZF alone)

A と B を，任意の $\mathbb{R}^3$ の有界な開集合とするとき，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，それぞれ A と B の分割 $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ と $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ で，A_i, B_i, $i < n$ はすべて開集合，$A_i \approx B_i$, $i < n$ かつ，$\bigcup_{i<n} A_i$ と $\bigcup_{i<n} B_i$ はそれぞれ A と B で稠密になるようなものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理は選択公理が正しくないことを示唆しているか?

この設問への否定的な答えとなっていると解釈できる結果が知られている.

選択公理を仮定しなくても，バナッハ=タルスキーの定理と同じかそれ以上にパラドクシカルな $\mathbb{R}^2$ の分割が構成できる:

定理 7 (R.Dougerty and M.Foreman (1992) in ZF alone)

A と B を，任意の $\mathbb{R}^3$ の有界な開集合とするとき，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，それぞれ A と B の分割 $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ と $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ で，A_i, B_i, $i < n$ はすべて開集合，$A_i \approx B_i$, $i < n$ かつ，$\bigcup_{i<n} A_i$ と $\bigcup_{i<n} B_i$ はそれぞれ A と B で稠密になるようなものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理は選択公理が正しくないことを示唆しているか?

この設問への否定的な答えとなっていると解釈できる結果が知られている.

選択公理を仮定しなくても，バナッハ=タルスキーの定理と同じかそれ以上にパラドクシカルな $\mathbb{R}^2$ の分割が構成できる:

定理 7 (R.Dougerty and M.Foreman (1992) in ZF alone)

A と B を，任意の $\mathbb{R}^3$ の有界な開集合とするとき，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，それぞれ A と B の分割 $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ と $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ で，A_i, B_i, $i < n$ はすべて開集合，$A_i \approx B_i$, $i < n$ かつ，$\bigcup_{i<n} A_i$ と $\bigcup_{i<n} B_i$ はそれぞれ A と B で稠密になるようなものが存在する.

バナッハ=タルスキーの定理は
選択公理が正しくないことを示唆しているか?

この設問への否定的な答えとなっていると解釈できる結果が知られている.
選択公理を仮定しなくても,バナッハ=タルスキーの定理と同じかそれ以上にパラドクシカルな $\mathbb{R}^2$ の分割が構成できる:

定理 7 (R.Dougerty and M.Foreman (1992) in ZF alone)

A と B を,任意の $\mathbb{R}^3$ の有界な開集合とするとき,ある $n \in \mathbb{N}$ に対し,それぞれ A と B の分割 $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ と $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ で,A_i, B_i, $i < n$ はすべて開集合,$A_i \approx B_i$, $i < n$ かつ,$\bigcup_{i<n} A_i$ と $\bigcup_{i<n} B_i$ はそれぞれ A と B で稠密になるようなものが存在する.

選択公理は正しい公理か？

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が <u>妥当な公理</u> であることを示唆している：

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である．
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い．
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である．
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な "宇宙" となっている．

選択公理は正しい公理か?

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が妥当な公理であることを示唆している:

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である.
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い.
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である.
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な "宇宙" となっている.

選択公理は正しい公理か?

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が 妥当な公理 であることを示唆している:

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である.
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い.
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である.
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な "宇宙" となっている.

選択公理は正しい公理か?

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が 妥当な公理 であることを示唆している:

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である．
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い．
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である．
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な ”宇宙” となっている．

選択公理は正しい公理か?

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が妥当な公理であることを示唆している:

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である．
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い．
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である．
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な "宇宙" となっている．

選択公理は正しい公理か?

選択公理が「正しい」公理かは置いておくことにしても，次のような事実が，選択公理が 妥当な公理 であることを示唆している:

- 選択公理は多くの（美しい，有意義な，すばらしい etc.）数学理論を展開するために必要である．
- 選択公理なしで証明できる定理でも選択公理を用いるとよりすっきりと証明できることが多い．
- (K.Gödel) 選択公理なしの集合論と選択公理を含む集合論は無矛盾性の強さに関して等価である．
- (H.Woodin) 選択公理の alternative として「決定性公理」があるが，選択公理を認める集合論で，実数の全体から出発して超限帰納法を用いて構成的に得られる集合の全体 $L(\mathbb{R})$ を考えると，これが決定性公理のモデルになっている．つまり，選択公理を認める集合論は，選択公理の成り立たない典型的な状況を内包するより一般的な "宇宙" となっている．

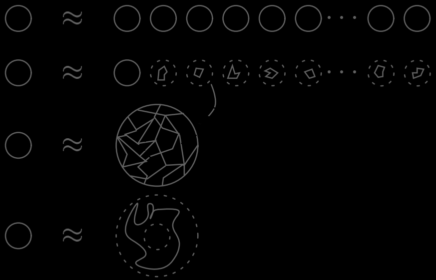
バナッハ=タルスキーの定理の variations のひとつ

定理 8

A を内部を持つ（つまり，ある開球をうめこむことができる.）任意の
$\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である.
特に，このことから任意の内部を持つ有界集合は互いに有限分割合同であることがわかる.

証明．バナッハ=タルスキーの定理の証明で用いられている次の結果を使う:

$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である.



□（定理 8）

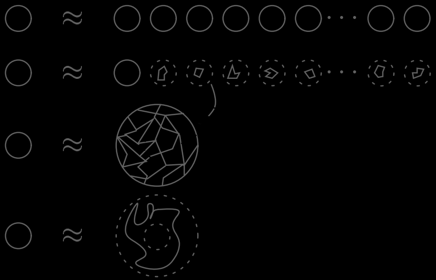
バナッハ=タルスキーの定理の variations のひとつ

定理 8

A を内部を持つ（つまり，ある開球をうめこむことができる.）任意の
$\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である．
特に，このことから任意の内部を持つ有界集合は互いに有限分割合同であることがわかる．

証明． バナッハ=タルスキーの定理の証明で用いられている次の結果を使う:

$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である．



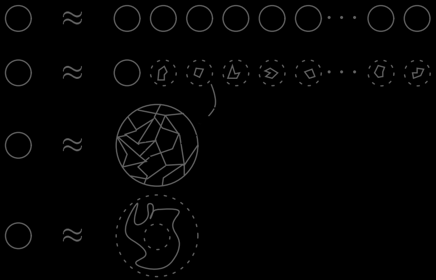
バナッハ=タルスキーの定理の variations のひとつ

定理 8

A を内部を持つ（つまり，ある開球をうめこむことができる.）任意の
$\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である．
特に，このことから任意の内部を持つ有界集合は互いに有限分割合同であることがわかる．

証明. バナッハ=タルスキーの定理の証明で用いられている次の結果を使う:

$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である．



□ (定理 8)

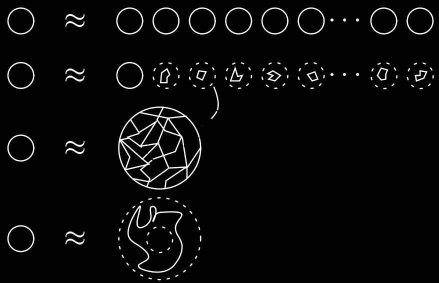
バナッハ=タルスキーの定理の variations のひとつ

定理 8

A を内部を持つ（つまり，ある開球をうめこむことができる．）任意の
$\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である．
特に，このことから任意の内部を持つ有界集合は互いに有限分割合同であることがわかる．

証明． バナッハ=タルスキーの定理の証明で用いられている次の結果を使う:

$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である．



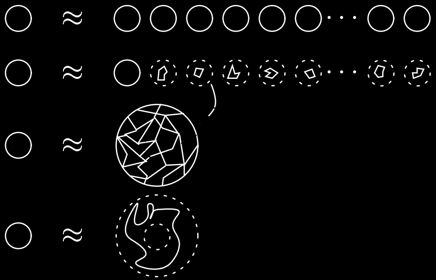
バナッハ=タルスキーの定理の variations のひとつ

定理 8

A を内部を持つ（つまり，ある開球をうめこむことができる.）任意の
$\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．このとき，$A \approx U$ である．
特に，このことから任意の内部を持つ有界集合は互いに有限分割合同であることがわかる．

証明. バナッハ=タルスキーの定理の証明で用いられている次の結果を使う:

$X' \subseteq Y \subseteq X$ で $X' \approx X$ なら，$Y \approx X$ である．




FIN


FIN