カントルの精神の継承

—— 無限集合の数学／超数学理論としてのカントルの集合論のその後の発展と，
その「数学」へのインパクト

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

主な更新日: 24.10.25(金 16:14(JST)) 21.03.26(金 07:48(JST)) 19.02.10(日 12:09(JST)) 18.11.10(土 20:01(CET))
18.01.07(日 13:18(JST)) 18.01.03(水 12:13(JST)) 17.11.17(火 18:14(CET)) 17.10.14(Sa14:19(JST))

2024 年 10 月 25 日 (16:21 JST) 版

> ... Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel größere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so größere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; *denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit* [*1] .
>
> — Georg Cantor ([Cantor 1883])

このテキストは，『数学文化』29 号，(2018) の特集 「カントルと集合論 — 没後 100 年を記念して」に寄稿した記事の原稿を拡張したものです．記事の最終稿以降に変更したり加えたりした文や文節のうち，主要なものについては，青色 (このパラグラフでの “青色” のフォントの色以外の色) のフォントで組版しています．

このテキストの最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/articles/cantor-math-culture-2018-x.pdf から download できます．

1 集合論の始まりと旧来の数学からの乖離

beginning

集合論が数学理論として発足したのは，19 世紀の中頃，日本の暦で言うと明治元年前後のことだった．これに関して，[Kanamori 2009] には，

[*1] ... これに対し，数学の研究活動に対してどんな余計な制限を果すことも，より大きな危険を孕んでいるように私には思える．危険の大きさは，この学問の本質から，それがどんな正当化もできないように思えるのであるからなおさらである；つまり，数学の本質は，まさにその自由性にあるからである． (筆者 訳)

> *. . . Very much new mathematics growing out of old, the subject did not spring Athena-like from the head of Cantor but in a gradual process out of problems in mathematical analysis . . .*

と書かれている．確かに集合論の始まりは，まさにその数学的な機が熟した，カントルの数学研究の，そしてより巨視的には，数学史の，「そのとき」に生れたものであろうが，現象としては十分にカントルの頭脳から，突然のように鎧をつけて生れてきたように見えたし，カントル自身もそれに見合う生みの苦しみを味わったようにも思える[*2]．

カントルの集合論は，その発足の当初からいくつかの重い宿命を背負うことになった．その一つは，カントルのかつての指導教官だったクローネカが，集合論を数学理論として認めようとしなかったことであろう．認めようとしなかったどころか，集合論に対して，更にはカントル個人に対してさえも，熾烈な攻撃を繰り返した．クローネカの集合論に対する攻撃は執拗で，常軌を逸しているようにも見えるが，彼の主張には，個人的な嗜好の問題を越えた，数学ないし数学哲学の重要な問題も絡んでいるようにも思える．このことについて，特に，数学に対する限定的な立場を支持する数学的／数学基礎論的ないくつかの事実について，また，これらの事実にも拘わらず，「数学の自由性」を擁護するに十分な数学的／数理論理学的な論拠もまた存在する，ということについて，本稿の後半で詳しく議論したいと思う．

集合論にとってのもう一つの試練は，カントルが「連続体問題」を解くことができなかったことだろう．しかし，現在から振り返って見ると，カントルの時代には，連続体問題へのアプローチが可能になるための準備，特に数理論理学に関する現代的な理解が全く整っていなかったため，カントルが「連続体問題」に関して，何らかの答を得ていた，という奇蹟は，例えば，フェルマーがフェルマーの定理の証明を本当に得ていた，という奇蹟に比べても何重にも起りにくいものになっていたと言えるだろう．ちなみに，カントルが集合論研究を行なっていたのは主に 19 世紀末までで，ツェルメロが集合論の公理系を論じた最初の論文 [Zermelo 1908] は 1908 年 (明治 41 年) に発表されているが，[Zermelo 1908] で論じられているのは，まだ「素朴公理的集合論」であり[*3]，集合論の公理系が一階の述語論理上の

[*2] カントルは 1873 年の 12 月に，実数の全体を自然数の全体を用いて数え上げることができない，つまり実数の全体は非可算である，ということを証明している．この証明が得られた瞬間を集合論の発足の瞬間とする解釈が可能である (たとえば，この解釈は [Kanamori 2009] で述べられている)．この解釈によると，2018 年は集合論発足から 145 年目ということになる．

[*3] と言っても，当時は，まだ現代の意味での論理学は整備されていなかったので，フレーゲなどの先駆的な仕事があるにはしても，「素朴公理的集合論」以上のものがこの時点で得られる可能性はほとんどなかっただろう．

理論として「正しく」理解されるようになるのは，1920 年代以降のことだった[*4]．

連続体仮説 (CH) は，「どんな実数の集合 X をとっても，それが非可算なら，X は連続体濃度を持つ」と表現することができる[*5]．後で述べるように，連続体仮説の真偽は，この一般的な形の主張としては，通常の集合論の公理系から独立である．しかし，「ある性質を持つ実数の集合 X については，それが非可算なら，X は連続体濃度を持つ」という形の主張は，この「ある性質」の設定によっては通常の集合論の公理系から証明することができることが知られている．実際，このことは，開集合から出発して，(有限的な) 集合算と，可算な集合族の和や共通部分をとる演算の可算超限回の繰り返しで得られる $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ の部分集合 (ボレル集合) やボレル集合から射影によって得られる集合 (解析集合) について，(これらの集合族に属す集合という制限のもとで) 上の主張が成り立つことが知られている．

開集合に対して，この性質が成り立つことは容易に理解できる: 開集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が空集合でないなら，X はある開区間 (a, b) を含むが，(a, b) と $\mathbb{R}$ の間には (連続で順序さえ保存する) 全単射が存在するからである．開集合の補集合として得られる閉集合は，ボレル集合のうち，開集合の次に簡単なものであるが，閉集合 X について，「X が非可算なら，X は連続体濃度を持つ」ことは既にそんなに簡

[*4] 実は Hermann Weyl は，既に 1910 年の論文で，このような定式化について言及しているが，集合論研究の文脈で，述語論理を用いることで，[Zermelo 1908] の「確定的なクラス命題」(definite Klassenaussage) の厳密な定式化が得られる，という認識が広く共有されるようになったのは，1920 年代に入ってからの，スコーレムやツェルメロによる論文より後のことだったと言って間違いないだろう．現在我々が知っている連続体問題に対する解 (ないしは部分解: [渕野 2014] を参照) のためには，少なくとも集合論の厳密な公理化が必須であった．

[*5] ここでは選択公理 (AC) を仮定して議論しているが，連続体仮説の特徴付けとなる様々な命題は，選択公理の仮定を落としたときには互いに同値ではなくなることがあるので，この場合には，もう少し付加的な説明が必要になる．実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ は自然数の全体 ω の冪集合 $\mathcal{P}(\omega)$ と 1-1 onto に対応づけすることができるので[*6]，ここで述べた連続体仮説は，$\mathcal{P}(\omega)$ の任意の非可算部分集合は $\mathcal{P}(\omega)$ と同じ濃度を持つ (つまり $\mathcal{P}(\omega)$ との間に 1-1 onto 写像を持つ)，と言い換えることができる．これを一般化した，すべての無限集合 X について，$\mathcal{P}(X)$ の任意の部分集合は，X より濃度が等しいか小さいか，あるいは，$\mathcal{P}(X)$ と等濃度になる，という主張は，一般連続体仮説 (GCH) と呼ばれている．

[*6] 集合論では，ω で (集合論の内部の) 自然数の全体を表わし，“$\cdot \in \mathbb{N}$” で「・ は超数学 [*7] での自然数である」という述語を表わして区別することが多い．ここでも集合の意味の自然数の全体を ω で表わしている．

[*7] 数学を形式的証明系での演繹 (の集まり) として外から眺めて，これについて数学的に研究する研究領域を，超数学 (meta-mathematics) とよぶ．超数学では，集合論以前の立場で議論をしなければならないため，たとえば，「自然数の全体の集合」という無限的なオブジェクトは存在せず，我々がそこで議論できるのは，個々の具体的な数 (の数表記) についてと，それらに関する一般論のみである．

単には示せない．

カントルは，1884 年の論文で，任意の $\mathbb{R}$ の閉部分集合 X に関して，X が非可算なら，X は連続体濃度を持つことを示している (これはカントル=ベンディクソンの定理の系として得られる — 以下の脚注*9 を参照されたい)．上で，『カントルが「連続体問題」に関して，何らかの答を得ていた，という奇蹟は，例えば，フェルマーがフェルマーの定理の証明を本当に得ていた，という奇蹟に比べても何重にも起りにくいものになっていたと言うことができるだろう』と書いたが，カントルが，同様の命題をボレル階層の下の方に属す集合に対しては証明していた，という可能性ならゼロではなかったかもしれないという気もする．

ちなみに，ハウスドルフはすべての非可算な Σ^0_4 集合が連続体濃度を持つことを，1914 年の論文で示しており[*8]，1916 年の論文では，この性質がすべてのボレル集合に対して成り立つことを示している．すべてのボレル集合が，完全集合の性質を持つこと[*9]が証明されたのは，アレクサンドロフによる 1916 年の論文においてである (子細は，[Kanamori 2009] の Section 12 を参照)．[Koellner 2016] には，この完全集合の性質を含む，連続体仮説の “構成的な” 近似に関する優れた解説がある．

なおここで述べた完全集合の性質に関する歴史的な成果は，現代では，Borel Determinacy の定理 ([Martin 1975], [Martin 1982]) の帰結の一つとして，または，解析集合の正則性定理 ([Luzin 1917], [Kanamori 2009] の Theorem 12.2 を参照) の一部として，より整理され拡張された形で理解することができる．

集合論が背負わされることになった三番目の宿命は，— これは 20 世紀に入ってからのことになるのだが — 集合論のパラドックス (antinomies) の発見とツェルメロらによる集合論の公理化による，パラドックスの回避，という 19 世紀から 20 世紀初頭にかけての数学の展開から，「素朴集合論は間違っていた」という間違った風評が広まってしまったことであろう．実際には，カントルが集合論で得た結果には，このパラドックスと抵触するものは含まれておらず，カントル自身，ほとんど [Zermelo 1908] と同じとも言える精度での，パラドックスの回避についての理解を得ていたことが，デデキントやヒルベルトにあてた彼の書簡から見てとれる．

20 世紀に入ってからの “旧来の数学” は，カントルの集合論の大きな柱の一つである超限帰納法を (否定はしないが) 回避する，という方向で発展した．選択公

---

*8 Σ^0_α, $\alpha < \omega_1$ でボレル集合の標準的な階層 (ボレル階層) を表わす．$\langle \Sigma^0_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ は (包含関係に関して) 連続に上昇的で，$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha =$ ボレル集合の全体 である．

*9 つまり，任意のボレル集合について，それが非可算なら完全集合を部分集合として持つこと．完全集合は連続体濃度を持つので，このことから，非可算なボレル集合がすべて連続体濃度を持つことがわかる．ちなみに，カントル=ベンディクソンの定理は，この言い回しを用いると「すべての実数の閉集合は完全集合の性質を持つ」ことを主張する定理である．

理と超限帰納法の組合せで自然に証明できる命題のいくつかが，ツォルンの補題を (ある場合にはかなりアクロバット的に) 用いることで，明示的に超限帰納法に言及することなく証明できる，という状況がこの方向性を更に後押ししたと思われる．この結果，旧来の数学では超限帰納法に対してほとんどタブーと言ってよい扱いがされるようになり，このことと，「素朴集合論は間違っていた」という間違った風評から，超限帰納法が (少なくともフォン・ノイマンによる 1920 年代の研究以降) きちんと基礎付けのされた論法であることを知らない (更に，そのようなものでない疑わしい論法だとうすうす勘違いしている) 数学者すら少なくないのではないかと思う．実際，数理論理学や集合論を専門としない「プロ」の数学者が「超限帰納法」，「選択公理」などを含む「集合論」について言及したときに驚くべき議論が展開されることがある，ということを，我々は身近な例として一つならず知っている (例えば，[渕野 2018] では，そのような例の一つをとって，その「驚くべき」と形容すべき点の所以と，そのような驚くべき理解 (誤解) がどのような倒錯した思考の過程を経て成立したものであり得るかについて議論している)．

20 世紀の中盤くらいから，集合論は旧来の数学の研究者の視界からほとんど完全に消えてしまったように思える．このことの大きな理由の一つは，集合論が数理論理学を融合する学問として発展することになったことであろう．

数理論理学は 19 世紀の末から，形式論 (syntactics) と意味論 (semantics) の明確な分離のないまま，徐々に発展してゆき，スコーレムのパラドックスやゲーデルの完全性定理などを経由して，(弱い) 集合論の中に論理を再導入して，そこで意味論を考える，という現代の論理学の明快な理解に至っているわけだが，この過程で，集合論は，数学と超数学の間での視点の移動を繰り返しながら議論を進める，という旧来の数学ではほとんど例のない思考の様式を習得してゆくことになり，その研究の対象も，相対的独立性，無矛盾性の強さ (consistency strength) など，理解する上で超数学の視点が不可欠な概念に関連するものに，焦点が向けられるようになってくる．

現代では [Kunen 1980] や，[Jech 2001/2006] をはじめとしてスタンダードな集合論の教科書が整備されているので，数学者にとって，必要なら現代的な集合論は独習が容易であろう，と思われがちであるが，数理論理学と数学の融合という旧来の数学では見られない集合論の立ち位置のため，実際には，これはきわめて難しいことのようである．

筆者は 2017 年の秋にポーランドのカトヴィッツェのシレジア大学で，一般位相空間論の研究者のグループのために，現代集合論の中心的な手法の一つである強制法に関する講義を行なった．この講義での経験から，集合論の学習が，一般の数学者にとって一筋縄ではゆかないものであることを，改めて痛感させられる

ことになった．講義を聴講してくれた人たちは，一般の感覚からすれば，十分に「集合論的」なテーマの研究を行なっていると言えるであろう人たちだったのにもかかわらず，である．強制法以前の，論理学と関連する様々な基本的事項に関する質問に答えなくてはならなくなってしまい，これに思いのほか時間をとられたため，結局最初に予定していた話題のほんの一部しか講義することができなかった．一方，そのような細部の懇切丁寧な説明を通じて，強制法を含む現代集合論を私の講義で本当に学ぶことができる，という感触をこの講義をアレンジして頂いた方たちに持ってもらえたようで，その結果，彼等の要請で，2018 年にも，この講義の続きを行うことになった．

数学者向けに集合論の講義を行なうとき，多くの場合，数理論理学に関する子細は避けて (つまり，かなりの誤魔化しをして) 説明してしまうことが多いのではないかと思うが，私のこの講義では，むしろ，数理論理学に関連するデリケートな部分の説明もあえて十分に行なった．その結果として，数理論理学の素養をほとんど持たない数学者に現代的な集合論の基礎を (本当に) 理解してもらう，ということが，どれほど困難な課題であるかを，切実に実感させられることになったわけだが，反面，それは，十分に可能でもある，ということの確認にもなったように思う．

2　カントル以降の集合論の形成

ここで一旦 1910 年代まで戻って，カントル以降の集合論の発展についてもう少し詳しく見てみることにしたい．

ツェルメロが集合論の公理系の祖形となるものを発表したのは 1908 年の論文 [Zermelo 1908] においてであった．前節で述べたように，この公理系は，まだ不完全なもので，その定式化についても大きな問題を残していた．原子元を許す定式化になっていたし，置換公理と基礎の公理がまだ含まれていなかった．また，関数の概念の扱いも問題のあるものになっていた．超限帰納法を公理的な枠組みでどう扱うかについても，この論文では全く触れられていない．

これらの問題に厳密な解決が得られて，現代で知られているような集合論の基礎づけが，少なくとも集合論の専門家の間では広く共有されるようになるのは，1930 年代の後半以降のことなのではないかと思う．ちなみに，現在通常採用されているような関数の扱いが導入されたのは [Kuratowski 1921] においてであり，超限帰納法の十分な基礎付けが与えられたのは，[von Neumann 1923] においてだった．

集合論の厳密な基礎付けが確立される以前にも，カントル自身の仕事や，前節で触れたハウスドルフやアレクサンドロフの仕事を含め，既に多くの成果が得られているわけだが，これは，ε-δ 論法による厳密な基礎付けが確立するよりも前の

解析学で多くの成果が得られている，という近代数学での展開との類似性を想起させる．日本で山のように出版されている微積の教科書に目を通してみると，現代の数学者の中にも，$\varepsilon\delta$-論法の理解がかなり怪しい人も含まれていたりすることが見えてくるが，このことも，前節の最後で述べたような集合論的数学での状況との類似が感じられる．

第 1 節の初めの方でも既に注意したようにカントルの集合論研究の結果は,「集合論のパラドックス」として知られている見かけ上の矛盾と抵触せず，公理的集合論の枠組みの中に厳密に再現することができるのだが，同じように，ライプニッツの無限小の扱いも，non-standard analysis の枠組みで ε-δ 論法に翻案するよりずっと直訳的に厳密な再構成ができることから，(少なくとも明かな) 矛盾は含まない議論となっていたことが (20 世紀の中葉になって) 確かめられている．

集合論の公理系の最終形としては，ツェルメロ=フレンケル集合論 (ZF) (またはこれに選択公理を加えた ZFC) と，ゲーデルが [Gödel 1940] で採用したノイマン=ベルナイス=ゲーデルの体系 (NBG) (あるいはこの体系に選択公理の強いヴァージョンを付加した NBGC) が案出されている．ZFC ではクラスを超数学での論理式のこととして扱わなくてはならないが，NBGC では，クラスは理論のオブジェクトとして扱かうことができるようになっている．しかしそのことを除くと，2 つの理論は集合に関しては，それらから証明できる事実は一致することが示せるので，実質的には同じ理論と考えてよい[*10]．現在では，集合論の公理系として ZF または ZFC が採用されることが圧倒的に多いのだが，それは，一つには，ZF または ZFC が有限個の公理で公理化できず (モンダギューの定理 [Montague 1955])，ZFC で，任意の具体的に与えられた ZFC の有限な部分公理系のモデルの存在が証明できる (レヴィ=モンタギューの反映定理の帰結の一つ)，という事実による[*11]．この事実は，後で触れる強制法の理論を用いて相対的無矛盾性の議論をする際に不可欠となるが，NBG は有限の公理系なので，ここでは，同様の有限近似を行なうことができないのである．

歴史的な発展を経て最終的な公理系として定式化された集合論の公理系を論じるとき，公理をどの体系でどう書き下すか (といってもたとえば ZF や ZFC は無限個の公理を持つので，実際に全部を書き下すことはできないわけなのだが[*12]) という問題のみに着目されることが多いように思える．しかし，ここで，より重要なのは，この集合論の公理化によって，公理系 (ZFC にしろ，NBGC にしろ) が，

[*10] このような状況を，NBGC は ZFC の保守拡大になっている，と表現する．

[*11] 更に，証明を見ると明らかなのだが，このモデルは，その要素関係が本物の要素関係と一致するようなもの (このようなモデルは $\in$-モデルとよばれる) としてとれる．

[*12] もちろん，無限個と言っても，どの文が公理でどの文が公理でないかを判定するアルゴリズムは存在する．

“完全な” 推論の体系を持つ形式論理 (一階の述語論理) の上に構築されたことであろう．したがって，この定式化とともに，集合論 (あるいは言葉を変えれば，全数学) で証明できる定理とは何なのかが，はじめて厳密に規定されたことになる．

3 ゲーデルの不完全性定理

natnums

ツェルメロは既に [Zermelo 1908] で，

> 非常に本質的であるはずの私の公理系の「無矛盾性」についてさえ、まだ厳密には証明できておらず、ここに提案された原理に基いて議論するかぎり、今までに知られている「逆理」はすべて解消する、ということを所々で注意するにとどめる

と書いている．しかし，前節の最後でも触れたように，公理系の「無矛盾性」は，ZFC (あるいは NBGC) の最終的な定式化がなされた後で，はじめて具体的な問題となったわけである．一階の述語論理の演繹系は，有限な記号列の具体的なルールによる変形の体系なので，ここで矛盾 (たとえば “$\emptyset \neq \emptyset$” を意味する体系の言語での文) の証明があるかどうかは，有限組合せの議論で簡単に結着がつくにちがいない．少なくとも，ツェルメロやフォン・ノイマンをはじめ，当時の集合論の研究者の多くはそのように考えていたはずだし，上に引用したツェルメロの表明もそれを裏付けるものとも言えるだろう．

ところが，実際の状況はこの期待とは全く異ることが，1930 年代初めになって判明する: ゲーデルは，[Gödel 1931] で以下の定理を証明している[*13]．

> 初等数論の十分に展開できるような，どのような具体的に与えられた公理系 T も完全[*14] ではない — つまり，T の言語で具体的に与えることのできるある特定の命題 φ^* に対して，もし，φ^* かその否定 $\neg\varphi^*$ の少なくとも 1 つがこの公理系から証明できたとすると，その証明から出発してこの公理系からの矛盾の証明が作れてしまうことが示せる[*15]．
>
> — (第 1 不完全性定理)

> 同様の公理系 T の無矛盾性は，この公理系自身から証明できない— つまり，T の言語でコードしたときに T からの演繹となるようなメタ

[*13] 第一不完全性定理については，ここで述べたのはロッサーによる改良 [Rosser 1936] を加えたものである．

[*15] これは言葉をかえると，T が無矛盾とすると，φ^* も $\neg\varphi^*$ も T から証明できない，ということである．このような φ^* は T から独立である，という．T から独立な命題があるとき，T は不完全である，という．これはここで導入した完全性の概念の否定ではないことに注意する: 矛盾する理論は完全でも不完全でもない．

な立場での無矛盾性証明があったとすれば，それを用いてこの公理系からの矛盾の証明が作れてしまう． — (第 2 不完全性定理)

ZFC や NBGC は上の T に対する条件を満たすものとなっている．このことと，ZFC や NBGC が (我々の知るかぎりすべての通常の) 数学を内包することから，数学は完全でなく，その無矛盾性を通常の数学の中で証明することもできないことがわかる．

ここで注意しておかなくてはいけないのは，第 2 不完全性定理は ZFC や NBGC などの無矛盾性を証明する手立てがないことを主張してはいるが，これらの理論が矛盾することを主張しているわけではないことである．むしろ ZFC や NBGC で展開される数学自身が，これらの公理系が無矛盾であることの強い状況証拠になっている，と言うことができるだろうし，このことから，集合論を専門に研究している数学者で，ZFC や，ZFC によく研究された巨大基数の公理のどれかを付加した体系の無矛盾性を疑っている人は，殆ど誰もいないと言ってよいだろう．

しかし，不完全性定理は多くの数学者を不安にしたようである．たとえば，ヘルマン・ヴァイルは，[Weyl 1946] で，

> Like everybody and everything in the world today, we have our "crisis." We have had it for nearly fifty years. Outwardly it does not seem to hamper our daily work, and yet I for one confess that it has had a considerable practical influence on my mathematical life: it directed my interests to fields I considered relatively "safe," ...

と述べている．ヴァイルの上でのような言明を含め，このような不安から，数学の研究を，(後で述べるような意味で，その無矛盾性の保証のあるような) 弱い体系での数学に限定して行なうべきだ，と考える数学者 (や数理論理学者) が少なからずいるようである．第 1 節でも述べた，クローネカが，カントルの集合論を頑に拒否したことは，このような姿勢の先駆としても理解できそうである．

不完全性定理以降の数学では，この不完全性定理現象のぎりぎりの境界上での綱渡りをすることが多いので，不完全性定理をきちんと理解していないと，数学の研究は目隠しをして綱渡りをするような状況になってしまうことが多いし，綱から落ちて奈落の底に転落してしまう危険性も大である．

たとえば，前節で，「レヴィ＝モンタギューの反映定理の帰結の一つ」として，

(*) ZFC で，任意の具体的に与えられた ZFC の有限な部分公理系のモデルで，その要素関係が本物の要素関係と一致するようなものの存在が証明できる

---

*15 ある公理系 T が完全であるとは，T の言語で記述できる文 φ のすべてについて φ かその否定 $\neg\varphi$ のどちらか片方が T から証明できることである．

という結果を紹介したが，ここでの「任意の具体的に与えられた ZFC の有限な部分公理系」という回りくどい言い方は必須であることが，以下のような考察を経て初めて理解できる: 仮にこれを「すべての ZFC の有限な部分公理系」と言い換えたときの定理が成り立っているとすると[*16]，コンパクト性定理から，ZFC のモデルが存在することが言えてしまい，そのことから，ZFC の無矛盾性が帰結できるので，第 2 不完全性定理により，ZFC から矛盾が導き出せてしまう．もちろん，第 2 不完全性定理により，このことが，まさに ZFC が矛盾することの証明になっている可能性がないとは言いきれないわけだが，(*) の証明を，「すべての ZFC の有限な部分公理系」に置き換えて得られる主張の証明に一般化できるかどうかをチェックしてみると，この拡張形を証明するには，証明の途中で set-like でない整順的半順序クラス上の再帰的定義を行なわなくてはならなくなることが分かり[*17]，そのような再帰法は一般には成り立たないので，この拡張された主張の "証明" が，ここで破綻してしまっていることを，確かめられる．

第 1 節で，集合論が数理論理学を数学に融合する学問として発展することになったことが，一般の数学者が集合論を理解することの妨げの一つになっている，と述べたが，上でのような種類の議論が定理の理解のために必要になることは，まさにそのような状況の例の一つである．

4 コーエンの強制法と強制法以降の集合論

perfect

ゲーデルの不完全性定理は，多くの数学者に，集合論のような強い理論の枠組で数学をすることに対する不安を与えたようである．ヴァイルの発言については既に前節で引用したが，フォン・ノイマンも，不完全性定理以降，集合論での研究を実質的にやめてしまった (このことに関する議論については [渕野 2013a] も参照されたい).

それとは逆に，ゲーデル自身は不完全性定理の確立の後，集合論，特に，連続体問題の研究を開始している．この研究でゲーデルの得た研究結果は，[Gödel 1940] に細説されているが，そのうちの主要な結果は:

(**) ZF が無矛盾なら，ZFC も無矛盾である．更に，ZF が無矛盾なら ZFC

---

*16 この 2 つの表現の違いは微妙だが，前者は，ZFC の有限な部分公理を超数学で「具体的」に 1 つとったときに，それに対する議論を指しているのに対し，後者は，ZFC の内部でのオブジェクトに対する (集合論を記述している形式的体系の) 量化子の意味での「すべての」(たとえば自然数全体の集合 ω の要素にコードされている論理式の) 有限集合の全体を指している．

*17 半順序クラス $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ 上の半順序クラス関係 $\mathcal{R}$ を持つクラス $\mathcal{X}$) が set-like であるとは，すべての半順序クラス $\mathcal{X}$ の要素 x に対し，x より ($\mathcal{R}$ に関して) 前にある $\mathcal{X}$ の要素の全体 $\{y \in \mathcal{X} : y \mathrel{\mathcal{R}} x\}$ が常に集合になることである．

に一般連続体仮説 (GCH) を公理として付け加えた体系も無矛盾である

というものである．上で，「更に」と書いたのは，シェルピンスキーによって，ZF と一般連続体仮説から，AC が導き出せることが，ゲーデルの上の結果の少し後に証明されているからである．

上の結果は，ZF から AC や GCH が証明できる，と言っているわけではない．ZF の中で，構成的集合のクラスと呼ばれる，順序数をすべて含む推移的なクラス L として，ZFC の公理のすべてを満たすようなもののうち最小のものが構成でき，そこで GCH も成り立つ[*18]，ということから，上の主張 (**) が導かれている．

第 1 不完全性定理により，ZF や ZFC は (それらが無矛盾だとすると) 完全ではないので，AC や CH が ZF や ZFC から独立である，ということはあり得る．[Gödel 1947] [*19] を見ると，ゲーデルはこれらの “公理” の独立性を確信していたことがわかる．また，ゲーデルは，発表こそしなかったが，AC の ZF からの独立性の証明を得ていたらしい (たとえば，[Moore 2011] を参照)．

AC の ZF からの独立性や，CH の ZFC からの独立性，また GCH の ZFC + CH からの独立性は，コーエンによって 1960 年代の前半に確立されることになるのだが，ゲーデルの結果 (**) が，集合の全体のクラス[*20] を制限することで得られたのに対し，独立性証明では，集合論の宇宙を何等かの方法で外側に拡張しなくてはいけないことになる (たとえば $V = L$ が成り立っているとすると，L の絶対性と，L の最小性から，V の自明でない内部モデルは存在しない)．ところが，V は既にすべての集合からなるので，これを拡張する，というのは一見不可能に見える．この見かけの不可能性にもかかわらず，コーエンは，集合論の宇宙を拡張して連続体仮説の成り立たない (したがって一般連続体仮説も成り立たない) 集合論の宇宙を構成する方法，とみなせる，強制法 (forcing) と呼ばれる構成法を確立して，この手法を用いて，ZFC の $\in$-モデルのジェネリック拡大あるいは，強制拡大 とよばれる拡大モデルで CH を満たさないものを作り，これを用いて，(ZF が矛盾しないなら)，連続体仮説の否定が ZFC と矛盾しないことを証明している．またこのようにして構成した集合論の宇宙の内部モデルを考えること

[*18] 順序数をすべて含む推移的なクラスで，ZFC の公理のすべてを満たすものは，内部モデル と呼ばれる．したがって，L は最小の内部モデルである．ただし，ここでも，(*) でと同様に，「ZFC の公理のすべてを満たす」は，メタ定理としての主張で，ZFC + GCH の公理を，1 つ (あるいは有限個) を具体的にとったとき，それが L で成り立つことが (一様なやり方で) 示せる，ということを主張しているにすぎないし，この主張が，それ以外の意味では定式化しようがないことも，少し考えてみると理解できるはずである．

[*19] [Gödel 1947] は以下に述べるコーエンの結果より前に書かれている．この論文は，コーエンの結果が得られた直後に改訂版が出ているのであるが，この改訂版では，コーエンの結果から必要となる多少の補足を補注として補う形で出版されている．

[*20] このクラスは，集合論の宇宙 (universe) と呼ばれて，記号 V であらわされることが多い．

で，AC の否定が ZF と矛盾しないことも[*21] 証明している．

ゲーデルの結果も，コーエンの結果も，ヒルベルトの意味の厳格な有限の立場からの相対的無矛盾性[*22] の証明として書き下すことができるが，特にコーエンの結果の場合には，ここで多少の予備知識が必要となる: まず，ZFC のモデルの存在は ZFC から証明できないので[*23]，そのようなものを考える代わりに，ZFC の十分に大きな有限部分 F のモデルを考えることにする．実際，レヴィ=モンタギューの定理の系である (*) を用いて，F の $\in$- モデル M_1 がとれる．この M_1 の可算な初等的部分構造 M_0 を，レーベンハイム=スコーレムの定理を用いてとり，M_0 のモストフスキー崩壊を M として，この M に関して上で言ったような強制拡大がとれることを示し，このことと，F が十分に大きいことを除いて任意であることから，もし ZFC からの CH の証明 P があったとすると[*24]，P を変形して ZFC からの矛盾の証明が作れてしまうことが示せるのである．

第 1 節で，『カントルが「連続体問題」に関して，何らかの答を得ていた，という奇蹟は，例えば，フェルマーがフェルマーの定理の証明を本当に得ていた，という奇蹟に比べても何重にも起りにくいものになっていたと言うことができるだろう』と書いたのは，上で述べたような 20 世紀中盤に証明された，幾つもの数理論理学の定理が証明の枠組みの構成に用いられていて，独立性証明はそれらなしでは行えそうには思えない，という事情をも背景として言っていたのである．

コーエン自身の仕事は，[Cohen 1966] で解説されている[*25]．この独立性証明で 1966 年にフィールズ賞を受賞しているが，受賞理由は連続体仮説の独立性の証明であり，強制法の導入ではなかった．実際には，コーエンによって導入された強制法は，1960 年代から 1970 年代にかけてソロベイをはじめ，コーエンの仕事に触発されて研究に参加した若い数学者 (や，この新しい手法を消化するだけの知力を保っていた，当時，まだ年をとっていなかった数学者[*26]) らによって，急速

[*21] この場合ももちろん ZF が矛盾しない，という仮定の下での議論である．

[*22] 相対的無矛盾性とは，理論 T が無矛盾だとすると T を拡張する T' も無矛盾である，というタイプの主張のことである．

[*23] もし ZFC で ZFC のモデルの存在が示せたとすると，その証明を拡張して ZFC からの ZFC の無矛盾性の証明が得られるので，第 2 不完全性定理により，ZFC が矛盾することが，このことから示せてしまう．

[*24] P は有限なので，そこでは ZFC の公理のうち有限個しか使われていないから，それらの公理の集まりに対する考察を，上での “ZFC の十分に大きな有限部分” に対する議論につなげることができる．

[*25] 現在では，[Cohen 1966] は，歴史的な文献ととるべきで，現在強制法の勉強には，教科書としては，たとえば，[Kunen 1980] を読むのがよいだろう．

[*26] たとえば，モストフスキーは，1966 年には 53 才だった．

に整備拡張されて，様々な問題に応用されていった[*27]．

しかし，メインストリームの数学は，連続体仮説の独立性の証明が確立されたことで，集合論の研究は終ってしまった，というような勘違いをしてしまったのではないかと思う．何かの賞を受賞すること自身がそれほど重要とも思われないが，コーエンに続く集合論の研究者が誰もフィールズ賞を受賞することなく，今日にいたっている，という状況は，他には説明がつかないだろう (このことに関する議論は [渕野 2014] も参照されたい).

コーエンの強制法の修正／一般化である現代の意味での強制法の応用例のうち，結果の意義や重要性の説明が比較的簡単にできそうな，強制法以降の早い時期での研究成果を 3 つほど紹介しておきたい．この 3 つの例は，3 つとも，第 1 節でも触れた，2018 年の秋に予定している，筆者の Katowice での講義では，技術的な細部も含めて取り上げる予定のものである．

紙数の関係で内容に踏み込んだ解説はできないので，子細については，付記した参考文献 (または，執筆中の [Fuchino 2017–] (の 2018 年後半での version)) を参照されたい．以下の (A), (B), (C) の主張は，どれも ZFC から独立である:

(A) (スースリン仮説) 順序構造としての実数体 $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の順序型は，(1) 最小元，最大元は存在しない; (2) 稠密; (3) 完備; (4) 可分であること，として特徴付けできるが，(4) を (4)' すべての互いに素な区間の族は可算である，で置き換えたものも，この順序型の特徴付けになっている ([Wikipedia: Suslin's Problem], [Kanamori 2011]).

この命題の独立性は，[Tennenbaum 1968], [Solovay-Tennenbaum 1971] で確立されているが，特に後者では，強制拡大の超限回の反復という手法が導入され，この手法で強制拡大で反例となりうる状況を逐次つぶしてゆくというアイデアにより，スースリンの仮説が ZFC + ¬CH と矛盾しないことが示されている．その後 Jensen によって，この命題は，ZFC + CH とも独立になることが示されている．特に，CH とスースリンの仮説は，ZFC 上で互いに独立である．また，ここでは子細を述べる余裕はないが，シェラハによる，これらの結果を更に拡張する，いくつかの比較的最近の結果も，知られている．

(B) (ボレル仮説)[*28] 強測度ゼロの実数の集合は可算集合に限る
([Wikipedia: Strong measure zero set]).

ここで，実数の集合 X が，強測度ゼロであるとは，任意の正の実数の列 δ_n,

[*27] 強制法の応用の多くは，(数学的な) 命題の集合論の体系 (ZFC や ZFC に何らかの公理を付け加えて得られる体系など) からの独立性の証明であるが，独立性がかかわっていない数学の定理の証明でも威力を発揮することがある．

[*28] Armand Borel の関与しているボレル仮説もあるが，ここで述べているのは，ボレル測度と言ったときのボレル ('Emile Borel) による仮説である．

$n < \omega$ に対し，幅がそれぞれ δ_n 以下の区間 $I_n \in \omega$ の和集合で X が被覆できることである．

CH を仮定すると，ボレル仮説の反例が作れる ([Sierpiński 1928])．これに対し，レイバーは，countable support iteration と呼ばれる新しい種類の強制拡大の超限回反復の手法を用いて，ボレル仮説が ZFC 上で無矛盾であることを示している．

(C) 区間 $[0,1]$ 上のルベーグ確率測度を拡張する確率測度で，$[0,1]$ のすべての部分集合に対して定義されたものが存在する

([Wikipedia: Real-valued measurable cardinal], [Kanamori 2009], §16).

CH から上の主張の否定が証明できる ([Banach-Kuratowski 1929])．更に ウラムは，連続体の濃度が，最初の弱到達不可能基数より小さいときには，上の主張の否定が導かれることを証明している ([Ulam 1930])．ソロベイは，ランダム強制 (random forcing) とよばれる強制拡大の方法の超限回の反復を用いて，この命題が ZFC 上無矛盾であることを証明している ([Solovay 1971])．ここでは，ZFC 上無矛盾というのは厳密に言うと正しくなく，この証明では，可測基数と呼ばれる巨大基数の存在の仮定から出発して議論している．つまり，得られた結果は，ZFC + “可測基数が (少なくとも一つ) 存在する” が無矛盾なら，ZFC + (C) も無矛盾である，というのが得られている結果である．この可測基数の存在の仮定がちょうど必要な条件となっていること (つまり，上の主張 (C) と，可測基数の存在が ZFC 上で無矛盾等価となること) も示せるので，ソロベイの上の結果は，(少なくともこの形のものとしては) ここでの “測度問題” の最終的な解答となっている，と言えることを注意しておく．

5 ゲーデルの加速定理と数学の自由性 — 22 世紀の数学としての集合論

goedel-incompleteness

前節の最後に述べたような結果を含む強制法以降の集合論の華々しい成果にもかかわらず，集合論は数学を研究する枠組として強すぎる，という感覚を持つ数学者や数理論理学者も少なくない．集合論は認めるが，巨大基数の公理は矛盾するかもしれないので研究をしてもしょうがない，と考える人も (現在でも！) いる — 第 3 節でも述べたように，第 2 不完全性定理によって ZFC の無矛盾性が証明できないことは，ZFC が矛盾していることを意味するわけでは全くないのだが．

一方，同様に第 2 不完全性定理の適用対象である初等数論 (ペアノの公理系 (PA) で展開できる数論) には，拡張された有限の立場と言えるような立場からの無矛盾証明 (ゲンツェンの定理) も存在する．逆数学 (Reverse Mathematics) と呼

ばれる研究分野での研究の進歩により，古典的な数学[*29]は既に，その無矛盾性がPA の無矛盾性から帰結できるような，したがって，ゲンツェンの無矛盾証明がその無矛盾性の保証になっているような，弱い集合論の中で展開できる (つまり，定理の命題を，この体系の言葉で書き下すことができ，その証明もこの体系の中で行える) ことが分ってきている．

もし，現代のクローネカが，このことを論拠として「数学とはこの無矛盾性の保証のある弱い集合論での研究でなくてはならない」と言って，集合論の研究を迫害しようとしたときには[*30]，現代の集合論の研究者には反論の余地があるだろうか？

そもそも，この上で述べたような，集合論の研究者にとって分が悪くなるような状況はゲーデルの不完全性定理で明らかになったわけだが，その一方で，不完全性定理のバリエーションの別表現の一つと見つこともできるゲーデルの加速定理と呼ばれる定理[*31]は，集合論研究を含めた，無矛盾性の強さのより大きい体系で数学研究を行なうことが，無矛盾性証明の可能な弱い体系での議論のみを数学とする，という狭義の限定的立場から見ても，大きな意味を持つだけでなく，不可欠でもある，ということを示唆している，と解釈することができる．

ゲーデルの加速定理の一つのヴァリアントは，以下のように記述することができる[*32]．まず，考察する体系でのすべての証明を P_n, $n \in \mathbb{N}$ となんらかの具体的な方法で枚挙しておく[*33]．

定理 (ゲーデルの加速定理 [**Gödel 1937**]) T を，少なくともその中で初等算術の展開できるほどの強さの集合論を含むような具体的に与えられた理論として，

(***) $\tilde{T}$ を T の拡張で，$\tilde{T}$ は T の無矛盾性 (の主張に対応する T の言語での命題) を証明するものとする．

このとき，任意の具体的に与えられた関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し，

---

*29 古典的と言っても，20 世紀になってから得られた数学的結果の多くも含む．

*30 これは既に用いていた表現でもあるが，以下では，この「現代のクローネカ」の立場を，「限定的」と形容することにする．

*31 [渕野 2018a] では，第 2 不完全性定理のゲーデルの加速定理からの証明が与えられている．

*32 証明を含む詳細については，[渕野 2016] を参照されたい．[渕野 2018a] でも，ゲーデルの加速定理の同様な解釈に関する議論がなされている．

*33 ω と $\mathbb{N}$ の区別については，脚注*6 を参照．例えば，証明を文字列と見て記号列の長さを加味した辞書式順序で並べることで記号列全体の枚挙ができる．ある記号列が，与えられた集合論の形式的体系での証明かどうかを判定するアルゴリズムは存在するから，ここでの記号列の全体の枚挙を辿って，ここでの体系での証明でないものを捨てながら枚挙することで，P_n, $n \in \mathbb{N}$ が得られる．

T の言語での論理式 $\varphi(x)$ で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$T \vdash \varphi(\underline{n})$ だが，T からの証明は，$P_0, P_1, \ldots, P_{f(n)-1}$ の中には存在しない，しかし，$\tilde{T} \vdash (\forall x \in \omega)\varphi$ が成り立つ，

という性質を持つものが存在する．

ここで，$\underline{n}$ は数 n の数表記 (numeral) を表わす．“$T \vdash \varphi(\underline{n})$” は「$T$ から $\varphi(\underline{n})$ が証明できる」という超数学での主張の略記である．$\varphi(\underline{n})$ の証明があれば，その証明に数表記 $\underline{n}$ の複雑さに関する一次式の値くらいで抑えられる複雑さの証明を付け足すことで，$\varphi(\underline{n})$ の証明が得られることに注意しておく．このことと，上の f を任意に強く増加する関数として選べることから，この定理の (T から $\tilde{T}$ に移行したときの証明の)「加速」という名称が由来しているのである．

この定理の対象としている T と $\tilde{T}$ の組に対する条件は，一見，人工的に思えるかもしれないが，この条件を満たす状況は集合論の部分理論や，集合論を拡張する多くの理論の間で自然に成立する．たとえば，ZC から[*34]，上で述べたようなペアノの公理系 (に対応する体系) を含む弱い集合論の体系のモデルの存在が言えるので，そのような体系の無矛盾性が ZC から証明できることがわかる．ZFC では，$V_{\omega+\omega}$ が ZC のモデルになることが証明でき，そのことから，ZFC で ZC の無矛盾性の証明ができる．κ を巨大基数のうち一番小さい種類である到達不能基数とすると，V_κ が ZFC のモデルとなることがわかり，そのことから，ZFC に到達不能基数の存在の主張を加えて得られる体系で，ZFC の無矛盾性が証明できることがわかる etc., etc. また，(***) での T と $\tilde{T}$ の間の関係は推移的なので，たとえば，上の例から，ペアノの公理系 (に対応する体系) を含む弱い集合論の体系と ZFC の間にも，上の T と $\tilde{T}$ の間の関係が成立する．更に，T と $\tilde{T}$ の間に互いに (***) の関係にある理論の長い列[*35] を挿入できる場合 (ペアノの公理系 (に対応する体系) を含む弱い集合論の体系と ZFC はこの関係にある) には，ゲーデルの加速定理で述べられているような証明の加速の可能性が，その列の長さ分だけ強化されている，と解釈することができるだろう．

このような T と $\tilde{T}$ の組では，第 2 不完全性定理が示すように，T では証明できない命題で $\tilde{T}$ で証明できるものが存在するし，そのことは，言葉を変えれば，$\tilde{T}$ が実は矛盾した理論になっている，ということの可能性は，T がそうであることの可能性より高い，ということでもある．しかし，そのリスクの代償として，$\tilde{T}$ では，この理論が強い分だけ，T で証明できるが，証明を書き下したり，それを見つけ出したりすることが，困難だったり，物理的に不可能であるような命題 φ

[*34] ZC は ZFC の公理系から，フレンケルの導入した，置換公理と呼ばれる公理群を除いて得られる体系で，[Zermelo 1908] で導入された体系 (の現代化) に対応すると考えられる体系である．

[*35] 具体的に記述できるかぎり任意の長さの加算超限順序数をそのような列の長さとして採用することができる．

について，$\tilde{T}$ では簡単な証明が存在する可能性がある．この可能性は，とりあえずは可能性でしかないが，その反面，そのような場合が実際にありうる，ということを，ゲーデルの加速定理は示しているわけである[*36]．

特に，(***) での T と $\tilde{T}$ として，それぞれペアノの公理系 (に対応する体系) を含む弱い集合論の体系と ZFC (やその更なる拡張) を考えると，ゲーデルの加速定理がその可能性を指摘しているような状況から，もし，現代のクローネカたちが，限定的な数学のみが意味のある数学である，と主張したとしても，限定的な数学が何であるかを見極めるためには，ZFC (やその更なる拡張) での数学の知見や，それらの理論を含む数学理論たちについての超数学での考察が不可欠であることは，認めざるを得ないことが，わかる．

本稿の最初に引用した，[Cantor 1883] でのカントルの「数学の自由性」に関する言及は，広義の数学という意味で「科学の自由性」と読み替えたときにも，十分に意義を持つものと思うが，少なくとも，狭義の「数学」に対しては，この自由性が，この学問の発展にとって必須ですらあることが，上のような議論で「数学的に」結論できるのである．

ゲーデルの第 1 不完全性定理は，数学の無尽蔵性と解釈することもできる (この解釈に関しては，[渕野 2013],[渕野 2016] 等も参照されたい)．しかし，数学の進歩の速度の加速が，数学の難しさの増加の加速につながり，科学が人間の知性の限界につきあたってしまう，という状況が起りつつあるように思える．ないしは，それが近々起ってしまいそうに思える．もちろん，コンピュータの証明支援装置，思考支援装置としての採用は，この閉鎖的な状況の部分的な打破にはなるのであろうが，(人類にとっての) 数学が，人間が理解し appreciate できるための証明を発見する，ということである限り，コンピュータにすべてをまかしてしまう，という形の解決はありえないだろう．この意味で，集合論や更にその拡張を含む，無矛盾性の強さのより高い理論での考察と，この考察を超数学で考察することで高次の証明を得るという，(旧来の数学の継承にとっては) 新しいタイプの数学研究を行なうことで，ゲーデルの加速定理の現象の追い風に思考の加速を得ながら，人間にとって理解可能な数学の領域を拡張してゆくことが，近未来にお

[*36] ここで述べたような，極端な加速ではなくても，T でアドホックな証明しか与えられなかった定理に T を拡張する $\tilde{T}$ で見通しのよい証明が与えられる，あるいは，最初に $\tilde{T}$ で見通しの良い証明が得られていて，それを足掛りにして T での証明が得られる，といった展開の例は数学史の中に多数見出すことができる．実際，初等数論を含む理論を拡張したときには，常にある種の加速現象が起ることが知られている (Ehrenfeucht-Mycielski の定理 [Ehrenfeucht-Mycielski 1971])．ゲーデルの加速定理は，更に，拡張された体系の consistency strength が上がったときには，このような加速現象で，拡張された体系では feasible な証明が存在するが，もとの体系ではそのようなものが存在しない例があることを示している．

ける (人類の知性の尊厳[*37] としての) 数学の存続のための重要な鍵の一つとなる，ということは十分にありうるし，むしろ，それ以外のシナリオはありえないようにも思えるのである．

[*37] この “人類の知性の尊厳” (l'honneur de l'esprit humain) という表現は，ヤコビが 1830 年にルジャンドルに宛た手紙の中で述べている有名な言葉である．

参考文献

[Banach-Kuratowski 1929] Stefan Banach and C. Kuratowski, "Sur une généralisation du problème de la mesure", Fundamenta Mathematicae, Vol.14, (1929), 127 – 131.

[Cantor 1883] Georg Cantor, „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre — ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen", Commisions-Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, (1883).

[Cohen 1966] _____, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Dover Books on Mathematics (2008); edition originally published by W. A. Benjamin, (1966).

[デデキント 1872/1888] R. デデキント; 渕野 昌 (訳／解説), "数とは何かそして何であるべきか", (Richard Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) と „Was sind und was sollen die Zahlen" (1888) の日本語訳および解説), ちくま学芸文庫, (2013), 1 – 336.

[Ehrenfeucht-Mycielski 1971] Andrzej Ehrenfeucht and Jan Mycielski, Abbreviating proofs by adding new axioms, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.77, No.3, (1971), 366-367.

[渕野 2013] 渕野 昌, "[[[不完全性定理に挑む] に挑む] に挑む]", 科学基礎論研究, Vol.41, No.1, (2013), 63–80.

[渕野 2013a] _____, "フォン・ノイマンと公理的集合論", 現代思想, 2013 年 8 月増刊号, (2013), 208–223.

[渕野 2014] _____, ""コーエンの強制法" と強制法", 数理科学, 2014 年 10 月号, No. 616 (2014), 75–83.

[渕野 2016] _____, "集合論 (= 数学) の未解決問題", 現代思想, 2016 年 10 月臨時増刊号 総特集＝未解決問題集, (2016), 109–129.
https://fuchino.ddo.jp/misc/the-problem-in-set-theory-x.pdf,

[渕野 2018] _____, "『無限のスーパーレッスン』 の hyper-critique",
https://fuchino.ddo.jp/misc/superlesson.pdf, 2021 年 03 月 16 日 (00:25 JST) 版.

[渕野 2018a] _____, "数学と集合論 — ゲーデルの加速定理の視点からの考察 —", 科学基礎論研究, Vol.46, No.1 (2018), 33–47.

[Fuchino 2017–] Sakaé Fuchino, https://fuchino.ddo.jp/katowice/index2018.html, (2017/2018 の Katowice (Poland) での講義 "Iterated forcing and its applications" の lecture notes (work in progress) と関連資料/文献, 2017–)

[Gödel 1931] Kurt Gödel, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol.38, No.1, (1931), 173–198.

[Gödel 1937] _____, „Über die Länge von Beweisen", *Ergebinisse eines mathematischen Kolloquiums* 7, (1936), 23–24.

[Gödel 1940] _____, "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory", Princeton University Press, (1940).

[Gödel 1947] _____, "What is Cantor's Continuum Problem?", The American Mathematical Monthly, Vol.54, No.9, (1947), 515–525.

[Jech 2001/2006] Thomas Jech, "Set Theory", The Third Millennium Edition, Springer, (2001/2006).

[Kanamori 1996] Akihiro Kanamori, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen", The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.2, No.1, (1996), 1–71.

[Kanamori 2009] _____, "The Higher Infinite", Second Edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, (1994/2003/2009). 日本語訳: 渕野 昌訳, "巨大基数の集合論", シュプリンガー・フェアラーク東京, (1998), I – VI, 1 – 554.

[Kanamori 2011] _____, "Historical remarks on Suslin's Problem", in: Juliette Kennedy and Roman Kossak (eds), "Set Theory, Arithmetic and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies", Lecture Notes in Logic, Vol.36, Association for Symbolic Logic, (2011), 1-12.

[Koellner 2016] Peter Koellner, "The Continuum Hypothesis", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/continuum-hypothesis/.

[Kunen 1980] Kenneth Kunen, "Set Theory", An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980).

[Kuratowski 1921] Kazimierz Kuratowski, "Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles", Fundamenta Mathematicae, Vol.2, (1921), 161–171.

[Luzin 1917] Nikolai N. Luzin, "Sur la classification de M. Baire", Comptes Rendus Hebomadaires des Séances de l' Académie des Siences, Paris, 164 (1917), 91-94.

[Martin 1975] Donald A. Martin, "Borel determinacy. Annals of Mathematics", Second Series, 102 (2), (1975), 363–371.

[Martin 1982] _____, "A purely inductive proof of Borel determinacy", Recursion theory, Proc. Sympos. Pure Math (Proceedings of the AMS – ASL summer institute held in Ithaca, New York ed.), (1982), 303–308.

[Mathias 1992] Adrian Mathias, "The Ignorance of Bourbaki", In: Mathematical Intelligencer 14, (1992), 4–13.

[Montague 1955] Richard Montague, "Nonfinitizable and essentially nonfinitizable theories" (Abstract), Bulletin of the American Mathematical Society, 61, (1955), 172–173.

[Moore 2011] Gregory H, Moore, "Early history of the generalized continuum hypothesis: 1878-1938", The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.17, No.4, (2011), 489–532.

[Solovay-Tennenbaum 1971] Robert M. Solovay and Stanley Tennenbaum, "Iterated Cohen extensions and Souslin' s problem", Annals of Mathematics, Ser.2, Vol.94, (1971), 201–245.

[von Neumann 1923] J. von Neumann, „Zur Einführung der transfiniten Zahlen", Acta litteraruma ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum 1", (1923), 199 – 208.

[Rosser 1936] John Barkley Rosser, “Extensions of some theorems of Gödel and Church”, Journal of Symbolic Logic, Vol.1, (1936), 87 – 91.

[Sierpiński 1928] Wacław Sierpiński, “Sur un ensemble non denombrable, dont toute image continue est de mesure nulle”, Fundamenta Mathematicae, Vol.11, No.1, (1928), 302–304.

[Solovay 1971] Robert M. Solovay, “Real-valued measurable cardinals”, Axiomatic set theory, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, Vol.XIII, Part I, American Mathematical Society, (1971), 397 – 428.

[Tennenbaum 1968] Stanley Tennenbaum , “Souslin’ s Problem”, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 59, (1968), 60 – 63.

[Ulam 1930] Stanisław Ulam, „Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre“, Fundamenta Mathematicae, Vol.16, (1930), 140–150.

[Weyl 1918] Herman Weyl, „Das Kontinuum: kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis“, *Veit und Comp., Leipzig* (1918), English translation: “The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis”, translated by Stephen Pollard and Thomas Bole, Thomas Jefferson University Press, (1987). Corrected re-publication, Dover (1994). [日本語訳]: ヘルマン・ヴァイル著，渕野昌，田中尚夫 翻訳／解説，“連続体”， 日本評論社，(2016).

[Weyl 1946] _____, “Mathematics and Logic”, The American Mathematical Monthly, Vol.53, No.1, (1946), 2–13.

[Wikipedia: Real-valued measurable cardinal]
https://en.wikipedia.org/wiki/Measurable_cardinal#Real-valued_measurable

[Wikipedia: Strong measure zero set]
https://en.wikipedia.org/wiki/Strong_measure_zero_set

[Wikipedia: Suslin’s Problem]
https://en.wikipedia.org/wiki/Suslin%27s_problem

[Zermelo 1908] Ernst Zermelo, „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I“, Mathematische Annalen, 65, (1908), 261–281. 日本語訳: “集合論の基礎に関する研究 I”, [デデキント 1872/1888] の日本語訳に付録 B として収録.