自己隔離期間の線型代数 I

Linear Algebra in Self-confinement I

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

cover design and illustrations by panpanya

2022 年 12 月 23 日

♦ Run mendex mainfilename.idx

run `M-x hyper-toc` to correct `mainfilename.toc`

run `M-x hyper-ind` to correct `mainfilename.ind`

The source codes of these commands are in: `~/TeX/books/lin-alg/lin-alg-in-confinement.tex`

Watermark to be added using PDF Reader Pro

crop by PDF Expert

compatible: $<$ is $-$ with an algebraic strucrture: 共存する
congruent: operations and relations with an equivalence relation: 両立する
follow: 従う
represent: 表徴する

For more, see: `~/TeX/books/lin-alg/lin-alg-in-confinement.memo`

2022 年 12 月 23 日 (16:16) 版

以下のテキストは，仮題 『自己隔離期間の線型代数 I
Linear Algebra in Self-confinement I』 として出版 (の予想) されている書籍の原稿の，テスト ＋ 拡張版です．出版されるものには収録しない予定の証明やナレーションの細部や，出版前／後の補筆修正，執筆予定の英語版のみに収録を予定している materials や，執筆に際してのメモ等も含みます．これらの内容を含む，テキスト内の拡張は，日本語版の出版書物に収録予定のテキストと区別できるように，dark electric blue (この段落の色) のフォントで組版されています．

批判／コメント／間違いの指摘／改良の可能性の示唆 etc. を歓迎します．`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp` までご連絡ください．

前書き

野原をさまよう神々のために
まずたのむ右や
左の椎の木立のダンナへ
椎の実の渋さは脳髄を
つき通すのだが
また「シュユ」の実は
あまりにもあますぎる！
— 西脇順三郎，『壌歌』*1

intro

本書の著者は，2020 年度前期，コロナ・ヴィールスのパンデミックの下，神戸大学で「線形代数 1, 2」の online 授業を担当しました．online 授業といっても，Moodle™ のインスタンスとして実現された，BEEF と名付けられた神戸大学の online 学習システム上に，講義のファイルや，宿題の assignments などを，週ごとに順次 upload してゆく，という形式の講義だったのですが．

本書の第 I 巻の前半は，この講義の教材として書いたテキストに手を加えて出来上ったものです．本巻の後半は，主に，それより前に行なった対面講義での講義記録をもとに書き上げたものです．これに対し，付録は，書きおろしで，これは，ずっと，きちんと書き出してみなくてはならないと思っていて，通常の講義の枠に入りきらないため，手をつけずに放置してあった事柄を，細

*1 これは，二千行の長詩である，西脇順三郎『壌歌』(1969 (昭和 44 年) [48]) の，一番最初の七行です．もちろん，「まずたのむ右や／左の椎の木立のダンナへ」は，芭蕉の「先づ頼む椎の木も有り夏木立」の本歌取りですが，芭蕉の句が，仮の安住の地に到達した安堵を歌っているのに対し，『壌歌』では，この「まずたのむ」は，二千行への旅立ちへの，旅の安全の祈祷となっています．しかも，椎の実とそれから連想された茱萸の味への言及が，プルーストのマドレーヌとなって，この長詩の意識の流れへの入口を形成しています．

本書の著者は，迂闊にも，本書の第 I 巻を，ごく軽い気持ちで書き始めてしまったのですが，書き出してみてから，実は大変な計画を始めてしまったことに気がついて，青ざめています．椎の木立の檀那への祈願が，ここでも必須となっているかもしれません．

説したものです．特に，角度の導入の議論は，常識的なものではあるかもしれませんが，調べたかぎり，ここで書いたような形で，細部にわたって議論している文献は，他になく，本巻の大きな特徴の一つになっていると思います．

Online 講義では， off-line の in-person な[*2]講義に近づけるために，ネット会議のツールなどを用いる工夫がなされることが多いようです．しかし，数学や，理学一般の講義では，online，off-line にかかわらず，in-person な講義は，必ずしも理想とすべきモデルではない，ように思えます．それは，数学や，更に広く，理学一般に関する講義では，理解するために，受講者各人が，各人の思考の速度で考える必要があるからです．これは，頭の良い人がより速く考えられる，というような簡単なものですらありません．深い理解に到達できる人は，他の人より深く広く関連事項にまでわたって考えることになるため，むしろ，何も考えずに与えられたものをうのみにする人より，ずっと時間を要する，ということだって十分にあり得ます[*3]．

何十人もの受講者のいる in-person な講義では，受講者は，講師の説明のテンポに合せて講義についてゆくしかないので，講師の側が，説明のテンポをどう設定したとしても，受講者たちの考える速さの多様さのため，受講者の多くが，自分で考えながら，講義についてゆける，あるいは逆に，説明のテンポの遅さに，しびれをきらさずにいられる，という状況を作ることは，殆ど不可能に思えます．一対数人の講義なら，講師の説明を質問で遮って，補足説明を要求することなどもできるでしょうが，数十人のクラスで，しかも tight なシラバスが固定されている場合には，これはなかなか難しいことのように思えます．

他方，多くの教科書は，in-person な講義で，補足説明が，加えられることを念頭に書かれているので，説明が十分でなかったり，誤読の可能性を下げるための，言葉の使い方の工夫が，十分になされていなかったりするものも，少

[*2] COVID-19 以前には「普通の」講義でしかなかった「対面講義」が，英語の “in-person lectures” (米国では “seated classes” とも言う) や，ドイツ語の„Präsenzvorlesungen“ など，多くの言語で新しく命名されているのは，興味深い現象と言えます．

[*3] 本書が，同様のテーマを扱っている，他の教科書より，ずっとページ数の多いものになっている理由の一つは，行間 (つまり，読者自身が頭の中で (あるいはノートに書き出して) 補完しなければならない内容のギャップ) をできるだけ空けないような説明を心掛けているからですが，それに加えて，この，「頭の良い人」が (普通の) の線型代数の講義を聴いたときに，彼女／彼の頭の中で起るであろう思索の連鎖の再現のようなものを，試みているからでもあります．

なくないように思えます．また，そのような教科書は，講義で使われる，ということに特化して書かれていることが多いので，授業で扱いにくい内容については，省略されることが多く，しかも，そのような省略された内容の，よくまとまった解説が，どこにあるかが，容易には分らないことが，少なくありません[*4]．だから，数学，例えば，線型代数 (を含む，数学の基礎的な部分) の，効率の良い学習[*5]は，講義で用いる教科書として，日本で沢山出版されている，従来の教科書の一つを読むことでは，実現できないようにも思えるのです．

本書のテーマである「線型代数」は，数学的，自然／人文科学的に，世界(universe)を理解しようと試みるときに，その基礎となる理論です．

連立一次方程式の理論は，線型代数の大きな部分を占める話題ですが，in silico で[*6]数値モデル (例えば，天気予報のための気圧配置の数値モデル) を作るときには，多くの場合，最終的には連立一次方程式 (変数の数は，手計算では絶対に処理できない大きさのものになります) の数値解を求めることに帰着されるので，線型代数は，そのような計算モデルでの計算の理論の基礎にもなります (連立一次方程式については，本書，第 I 巻の第 5 章で取り上げます)．

一方，線型代数は，現代の数学の最先端での，様々な議論を理解すための基礎を，提供するものでもあります．もちろん，線型代数とは直接的な関係の殆どない，現代的な数学理論もあり得ますが，線型代数の理論の理解を通じて得られることになる，数学理論の理論展開のあり方についての知見は，読者が，将来，(そのような，必ずしも線型代数とは直接関連しないかもしれない分野での) 理論展開と対峙する際にも，大きな助けになるはずです．

線型代数が，科学や数学の中で，このような重要な役割を担っていることか

[*4] 教える側にとっても，普通の教科書でごまかして書いていることを，きちんと講義で扱ってみようと思い立ったときに，そのために参考になる文献が (日本語や英語を含む幾つかの言語で検索しみても)，なかなかうまく見つからない，という状況は，かなり頻繁に起ります．

[*5] ここでの「効率の良い」は「手っ取り早く分った気になる」という，多くの人が「よく分かる」という形容詞に込める内容を言っているのではなく，「考えにつまってしまったり，試行錯誤を不必要にすることなく，本質的な理解に至ることができる」，という意味で言っているつもりです．

[*6] “in silico” は，もともとは bio-science で最初に用いられるようになった (偽) ラテン語表現で，生体内で状況を調べる “in vivo”, 試験管やシャーレで実験する “in vitro” — “vitro” (ガラス) というラテン語の単語は，ポルトガル語を経由して，「ビードロ」 として日本語にもなっています — に対して，コンピュータ・チップ (シリコン) の上で計算実験することを意味します．

ら，「線型代数」，または，「線形代数」[*7] という名前の講義や，講義のシリーズは，多くの大学の初学年の数学の必修科目の一つとして，開講されています．

◆ “線形代数” となっていないかチェックする．

しかし，この「科学的に世界を把握するときの基礎となる」また，「数学の先端の，様々な議論を理解するときの基礎となる」基礎理論の，深い理解を得るための勉強をすることは，日本の大学受験のための試験勉強が，唯一の勉強のモデルになってしまっている可能性のある，大多数の大学一年生にとっては，そう簡単なことではないようです．そのため，数学の必修科目としての線型代数を教える講義を担当されている先生方の多くは，むしろ，大学の入学試験の準備のようなタイプの勉強をすれば，単位が取れるような教科として，つまり，本格的な教科書に書いてあるようなことは，すべて無視して，何をやっているのかが分らなくても，機械的に計算をすれば，答が出るような演習問題を果し，問題を解いたことのご褒美として，単位をとってもらう，というような逃げに出ていらっしゃるのではないか，と思います．「数学科の学生のための講義ではないのだから，本格的なことを教える必要はない」というような言い訳も，よく聞きます．もちろん，日本の大学でのように，講義に「熱心に」出ている人には単位を出す，ということが想定されているような教育システムで，それ以外の方策は，なかなか思いつかないでしょう．本格的な講義を実施して，成績評価の方は，大学入試のようなフェイクを行なう，という折衷案もあり，私の，日本での講義も，そのような線にそったものになることが多かったのですが，in-person の講義で，これをやると，本格的な講義についてくるだけの能力のない学生に，分らない講義に出席する苦しみを与えてしまうことに終始してしまいかねないので，その意味では，非建設的な結果を招いてしまう危険があります．教える側にとっては，(質をとって量を無視することにさ

*7 本書では，「せんけい」という言葉に，幾何学的な「直線」の直観 [*8] と直接的にかかわる「せんけい」性が問題となっているときに「線形」という漢字をあて，もっと抽象的な「せんけい」性が問題になっているときに「線型」という漢字をあてる，という使い分けをしていますが (例えば，「線形順序」対「線型写像」など)，一般には，「線型」と「線形」は，区別せずに同じ意味で使われることが多いようです．

*8 本書，特に，本第 I 巻で，“**幾何学的直観**” と言うときは，そこで言及されているのは，現代の幾何学に基く直観というより，多くの場合，「空間」に関する古典物理学的な直観に支えらた，“幾何学的直観” です．もう少し近代的な幾何学については，本書の第 II 巻でとりあげられることになります．これに対し，“代数的” と言うときには，本巻でも，必要に応じて説明されることになる，20 世紀以降の，近代的な抽象代数の意味での “代数” が，含まれていることもあります．

◆ 近代的な幾何について第 II 巻で述べる．

えすれば) 本格的な講義についてこられる学生，あるいは，理解については，いささか消化不足でも，興味をもって聞いてくれる学生が，受講者の中に何人かでもいれば，その講義を行なうことの意義は，十分に見出せるだろう，とは思うのですが.

これに対して，on-demand 型の online 講義では，講義についてこられる能力のない学生に，無駄な時間を過すことを強要せずに，本格的な講義を行なうことができます．しかも，ネット上の教材を，tune up すれば，努力で補うことで，なんとか講義についてこられる，というレベルの学生が，実際に講義についてきてくれる割合を上げることも，(ある程度は？) 可能に思えます.

本書は，上で述べたようなことを背景として，(講義で使うための教科書というよりは，むしろ) 読者にとって，これを読むことが，深く考えることの入口となるような，そして，読みながら考えることで学習を完結できる (ことが期待できる) 教科書／自習書として書かれたものです．本書の表題に「**自己隔離期間の**」と入れたことの由縁です．ですから，この「自己隔離期間の」は，「本来の in-person な講義の代用品としての」，というような消極的な意味で言っているのではなくて，むしろ，「自己隔離期間」を口実として，“本来こうであるべき講義” としての教科書／自習書を上梓する，という目標の表明のつもりです.

本書の第 I 巻 (あなたが今手にとっているこの書籍) は，日本の大学の学部 1 年の線型代数の講義で，通常取り上げられる範囲を，ほぼカバーするものになっていますが，それに加えて，この本が，読者にとって，最初に読む，現代的な数学への入門書となりうることも，意図して書かれています．第 2 章, 付録 A, 付録 B 等で書いたことは，その際の基礎として，十分な精度を持つものとなっています.

これに続く第 II 巻と，第 III 巻では，線型代数の，更に高度な話題について考察しますが，それと平行して，第 II 巻では，線型代数から入ってゆくことのできる，現代的な数学理論のいくつかについて，第 III 巻では，線型代数から見た物理学，特に量子力学についても，論じます.

本書，特に本書の第 I 巻の特徴のいくつかは，以下ように述べることができます.

（1）本書の読者が，数学での予備知識を殆ど持ってない可能性も意識して，

本書では，数学で用いられる独特の言葉使いや，論理や，証明の方法などに関する注意も含めて，通常の教科書では，既知として触れていない事柄についての解説を，豊富に加えてあります．これは，in-person な講義の教材として使われるときには，講師が，補足説明するはずの内容ですが，多くの場合，講師が通常の講義で補足説明できる範囲を越えた，詳しい説明が加えられています．そのような種類の説明は，主に，第 2 章「前提知識，記法や論法など」に，まとめてあります，また，それ以降でも，必要になったところで，こまめな説明が加えられています．

（2）大学の一般教養科目の数学で教えられている，線型代数や，解析学 (微分積分) の講義は，証明，あるいは，証明の細部の多くを省いて行なわれることが多いようです．現実には，数学的な証明を理解することのできるだけの知性のリソースを持っていない人が，高等教育を受けている，あるいは，かつて受けた人のうちの殆どなのかもしれませんが [*9]，そうだとしても，数学の証明が追えたり，簡単な証明を自分で作って，数学的な事実関係を確かめてみることができる，というような能力の欠けている人に，科学的な判断が，正しく出来るとは，到底思えません．更に，線型代数に関して言えば，その理論の教えるところを，証明の細部を把握することなく，理解できる，などということは，どう考えても不可能な夢のように思えます．

一方，数学的証明が，何であるかを，理解できる能力に欠けている大多数の人に，その理解を無理強いするのは，虐待でしかないかもしれません．しかし，数学的証明が，何であるかを理解できる能力を，潜在的には持っているが，そのために必要なトレーニングを，正しく受ける機会に恵まれなかったために，その能力が埋もれたままになっている，という人の数も，そんなに少なくないのではないか，という気もします．この「数学的証明が，何であるかを理解で

avant-guerre

[*9] 今の状況に比べて，高等教育が，もっと，ずっと選ばれた人たちへのものだった，第二次世界大戦前の日本でも，微分積分に関して，「微かに分って，分った積もりになる」というジョークがあったことからも推測できるように (私がまだ学生だったころに，年配の先生からこの話を聞いた憶えがあるので，これが，戦後の "駅弁大学" より前の時代のジョークであることは，かなり確かだと思います)，日本での数学教育の状況は，今と，それほど違っていなかったのではないかと思われます．なお，ここで，線型代数ではなく，微分積分に関する逸話の例を出しましたが，「線型代数」という名前の講義科目や，それに対応する，理論の体系に関する講義科目は，戦前には存在していなかったようです．このことについては，例えば，[35] を，参照してください．

きる能力を，潜在的に持っている」人たちに，線型代数を経由して，証明の子細を含んだ本物の数学を，きちんと学ぶための入口を提供したい，という希望が，本書の執筆の，大きな動機の一つとなっています．特に，本書に現れる命題 (数学的な主張) たちには，ごく一部の例外を除くと，すべて，(普通の教科書では，省略されているような細部についての，明示的な説明も含む) 詳細な証明がつけてあります[*10].

(3) 著者の研究分野の 1 つは，数理論理学ですが，本書では，例えば，デデキントの „Was sind und was sollen die Zahlen?（『数とは何か，そして何であるべきか』）“ [11] の延長線上にあるような，現代の数理論理学の意味での，数学の基礎付け[*11]については，全く触れられていません．これについての，記述は，例えば，著者が，本書と平行して執筆している [21] や，そこで引用している文献などを，参照してください．これに対して，デデキントの „Stetigkeit und irrationale Zahlen“（『連続性と無理数』）[12] の意味での，古典的な数学の基礎 (付け)[*12] については，詳しい議論がなされています．

logic-foundation

♦ comment out したパラグラフあり

[*10] 例えば，第 2.4 節で例として挙げた，ベルトラン仮説 (チェビシェフの定理，定理 2.18) の証明は，省略されていますが，どこで証明を見ることができるかについては，そこで説明してあります．

[*11] ここで，「デデキントの „Was sind and was sollen die Zahlen?“ [11] の延長線上にあるような，現代の数理論理学の意味での数学の基礎付け」と呼んでいる事柄には，日本語では，「数学基礎論」と呼ばれることもある，数理論理学 (mathematical logic) の研究と関連する，自然数の体系や集合に関する議論の枠組を与える理論や，その無矛盾性や，相対的矛盾性に関する議論，また，そのような，複数の体系の間の，無矛盾性の度合の比較に関する議論，等が，含まれています．

[*11] 「デデキントの „Was sind ...“ の延長線上にあるような，現代の数理論理学の意味での数学の基礎付け」については，本巻では全く触れない，という方針の背景は，これについて議論するには，通常の数学の体系の中での議論 (われわれが通常行なっている数学の議論が，これに相当します) と，この数学の体系を外側から見て議論をする，meta-mathematics との間の視点の移動を，頻繁に行なう必要があり，これは，通常の数学の体系の中での議論についてのイメージのまだ十分に確立していない初心者には，分かりずらく，misleading ですらあるかもしれない，ように思えるからです．

[*12] ここで，「デデキントの „ Stetigkeit und irrationale Zahlen“ [12] の意味での古典的な数学の基礎付け」と言っているのは，(ナイーヴな[*13]) 集合論の枠組の中で，幾何学的直観や，古典解析学 (ε- δ 論法以前の解析学) の直観に由来する論理のほころびを，概念の再定義や，数学的な要請[*14]で補って，これらの幾何学的，古典解析学的な直観が，そこにうまく統合されるような，厳密な，数学の展開の筋道をつけることです．

[*13] “ナイーヴな” という形容詞については，付録 A の脚注*4 を参照してください．

[*14] 例えば，(後に，付録 B で導入されることになる概念を用いて言えば)，「実数の全体とは，有理数の全体の完備化と，その上に有理数上の四則演算を連続関数として拡張したものか

（4）上にも書いたように，本書は，講義で使われたり，独習書として読まれるときに，in-person な補足がなくても，読者が，全体の流れを見失わず，しかも，議論を細部まで理解できる，ということを，目標の一つとして，書かれています．そのことを頭に置いて，教科書の内容に補足説明を加える講師の役割を，脚注に与えています*15．この役割分担を示唆するために，本文は，漢文調に近い，堅い文体で書かれているのに対し，脚注は，主に「です／ます」調の文体で書かれています*16．in-person な講義で用いられる (virtual でない) 教科書は，この教科書を使って講義をしている講師の行なう補足説明や雑談の内容を知らないわけですが，本書の本文は，脚注で述べられたことも知っていて，脚注で述べたことへのリファレンスが，本文から張られることもある，というメタフィクション的な設定*17がなされています．

（5）本書では，読者が，数学科の学生であることは，全く仮定されていません．しかし，上でも既に触れたような，「数学科の学生のための講義ではないのだから本格的なことを教える必要はない」，「証明や，その子細は教える必要がない」というような姿勢とは対極にある立場で，数学科の学生であるかど

らなる構造体 (連続体) である」とする，ということも，この「数学的要請」に含まれます．実数の全体をこのように規定することで，幾何学的直観や，古典解析学での直観を，そこに，うまく融合することができるようになることは，付録 A や，B で，検証されることになります．

*15 脚注には，in-person な講義でもそうであるような，雑談や，脱線も盛り込まれています．これは，著者にとっては執筆の憂さ晴らしも兼る，とも言えるかもしれませんが，読者にとっては，「またこんなしょうのないことを書きやがって」と憤慨できる機会を，与えてくれるものになってる，かもしれません．

*16 この前書きでは，本文も「です／ます」調で書かれていますが，これは，ここでは，本書の著者が読者に，直接話しかけようとしているからです．これに対し，本書の本文が文語調になっているのは，著者を通じて，数学が，読者に話しかけているからです．

*17 日本では，昔，筒井康隆が「メタフィクション」をしきりに唱えていた時期がありましたが，著者が，ここで，メタフィクションとして起想しているのは，むしろ，例えば，イタロ・カルヴィーノの [4] です．ちなみに，[4] (著者は，イタリア語が自由でないので，この小説はドイツ語訳で読んでいるのですが) では，主人公は読者自身で (だから文章の主語は，倉橋由美子の小説のように，「あなた」です)， しかも「あなた」は各章で落丁のある本を読みだして，その本が，川端康成風だったり，ホルエ・ボルヘス風だったり，ガルシア・マルケス風だったり,... する，というもので (各章が仕切り直した始まりを持つというのは，大島渚監督の『帰ってきたヨッパライ』のようでもあるし，筒井康隆の『夢の木坂分岐点』のようでもあります)，読者は，((不思議な読書経験) の不思議な読書経験) の読書経験を，することになります．ちなみに，武満徹の晩年の本棚の写真に写っている本の中にも，[4] の日本語訳があります．

うかに拘わらず，数学を学ぶなら，本物の数学をきちんと学ぶ必要がある，という判断のもとに，書かれたものです．しかも，自習書としての使用にも堪えることを，目指して書かれています．本書で，数学での固有な言い回しの解説や，考え方の分析が，こまめに加えられているのは，主に，初心者や，数学を専門としない読者に対する配慮のためです．

（6）本書の成立の契機となった，神戸大学での 2020 年度の線型代数の講義では，『三宅 敏恒，線型代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ』[43] が，教科書として指定されていました．このため，本書の第 I 巻では，いくつかの場所で，[43] の採用している証明や構成のアイデアを踏襲していますし，第 I 巻の章立ての構成に関しても，[43] からの影響を受けています [*18]．

[43] は，代数的なナレーションによる，コンパクトでエレガントな記述のなされている教科書ですが，背後にある幾何的な直観に関する説明は思いきって切り捨てられています．むしろ，幾何的な直観というものの存在を否定すらしているように見えます．

この点に関しては，本書では，[43] とは異なり，いくつかの箇所では，(代数的な) エレガンスや，コンパクトさは，意図的に放棄して，むしろ，読者が，幾何学的な直観を背景とする把握を含む，多角的な理解の得られるような記述を目指しています．また幾何学的な直観が，代数的な厳密性に，どのように統合されているのか，ということについて，第 4 章や，付録 A, B, C などで，細説しています．これらの章で書かれていることは，数学的な常識に属す，とも言えるので，そのようなものをわざわざ書くのは，はしたない，と思う数学者もいるかもしれません．しかし，逆に，まさにそれが常識であるために，容易に読むことのできる参考書のどこにも書いていないし，細説する必要のない事柄である，と勘違いされていることさえ，あるのではないかと思います．

(7) 「読者が，数学科の学生であることは，全く仮定されていません」と，(5) で書きましたが，実は，読者が，大学生 (以上) の予備知識持っていることも，仮定していません．本書を読む時間 (と思考のリソースの余裕) が十分にあれば，高校生でも，十分に理解できるはずです．更に，本書の付録 A では，三角関数の基礎についても細説したので，その結果，必要になる予備知識の点

[*18] 例えば，補題 4.10, (2) で述べることになる，シュヴァルツの不等式の証明や，定理 6.40 の証明は，[43] にあるものに補筆したものです．

からは，中学生でも読みこなせるものになっているはずです．

ただし，三角関数の解説を付録として書いたのは，中学生を読者に加えることが，その主な目的だったわけではなく，むしろ，(6) でも触れた，幾何学的直観と，本書でのような枠組での，線型代数的な議論を，どう融合できるのか，という問いに，満足のゆく説明をつけることが，その主な目的でした．これを出来るだけスムーズに，(しかも，最低でも，[12] に対応する精度で) 行うにはどうしたらよいかを熟考した結果が，この付録 A と，それを補足する付録 B という構成になっています．これが成功したものになっているかどうかは，読者の批判を仰ぐところです．

（8）上の脚注*9 でも，戦前の日本での数学教育について触れましたが，本書では，線型代数を含む数学の歴史や，記号法の歴史的由来などについても，積極的に言及しています．これは，数学の「多角的な理解」には，歴史的な背景の知識も含まれると考えるからです．ただし，一部の啓蒙書にあるような，面白おかしい逸話を引用して読者の注意をひく，というような種類の歴史講話ではなく，真摯に，人類の数学史や文化史の，ここで議論している数学の結果との関わりについての言及を目指しているつもりです．そのために，数学の歴史に関する文献や一次資料には，出来る範囲では [*19]，きちんと目を通しているつもりですが，思い違いや，重要な観点の欠落，などがあるかもしれません．もし歴史の専門家の方が，問題点を発見された場合には，指摘していただけるとありがたく思います．

(9) 本書で導入される用語の多くでは，対応する，英語の単語や，表現を，括弧に入れて補ってあります．これは，一つには，数学で使われている記号が，ヨーロッパや，アメリカ，イギリスでの言葉とつながっていることが多いので，英語の用語を見ることが，記号法の由来の理解につながることが多く，そのことが，使われている記号に慣れるための近道にもなる，と思うからです．

例えば，第 2 章で見ることになるように，関数は，文字 f で表わされることが多いのですが，これは，“関数” の英語での対応する用語が，“function” である [*20]，ということを知っていると，これに掛けた記号の選び方になっている

---

*19 例えば, 前にも書いたように, 著者はイタリア語が不勉強なので, ペアノ (Giuseppe Peano 1858 (安政 5 年)〜1932 (昭和 7 年)) の原論文 [52], [53] には，きちんと目を通していません．

*20 ヨーロッパの言語は同系列なものが多く，同じようにラテン語から用語を借用しているの

ことが理解できます．

また，線型代数では，多くの場合，用語の原語は，英語になっていたり，ドイツ語 (やドイツ語から英語に借用された表現) になっていたりもするのですが，それを確認することは，(8) や，上の脚注でも触れたような，数学史の背景を確かめることにも，繋がります[*21]．

多くの数学書は，日本語に翻訳されており，日本人の著者による日本語の数学書も少なくありませんが，21 世紀における，科学者の共通語としての英語の地位や，英語で教科書やモノグラフを書く人の数や質を，(日本語でそれをする人の数や質の総量との比較で) 考えると，日本語に固執するのは，あまり得策ではないように思えます．その意味でも，本書で導入される用語に対応する英語の表現を確認しておくことは，読者が，本書から更に進んで勉強／研究を続けるときの助けになるだろうと思います．

ついでに言うと，英語で書かれた教科書や専門書の，日本語訳では，日本語が間違っていることが多く，訳書を多く読むことは，読者の，日本語や，精神の健康にとって，あまり良いことではないような気がします[*22]．

実は，本書で，キーワーズに対応する，英語の語句や，表現が，挙げられていることには，読者にとって，次のような，もう一つの大きな利点があります: それは，読者が，この英語表現のキーワードを使って，英語版の Wikipedia をはじめ，英語で書かれた参考資料を検索してみることが容易となる，ということです．

Wikipedia は，誰でも自由に編集ができる，という性格上，どの言語でも，項目によっては，問題のある内容が含まれていたり，全体としては問題がなく

で，この “関数” の例でも，英語だけでなく，ドイツ語，フランス語，イタリア語，ポーランド語の，„Funktion“, «fonction«, “funzione”, “funkcia” など，他の多くのヨーロッパの言語でも，同系の，“f” で始まる単語が，用いられています．

[*21] 例えば，5 ページの脚注でも説明することになるように，単位行列を，記号 E で表わす，という，日本で採用されることの多い記法が，もともとは，ドイツ語の „Einheit“ (単位) という単語に由来する，という事実は，この用語が導入された頃に，ドイツが，(線型代数のこの用語と関連する) 数学研究で，世界での中心的な役割 (の一つ) を果していたこと，を示唆していますし，かつての (主に第二次世界大戦終結前)，日本の数学者が，ドイツ語で書かれた教科書を経由して数学を学んでいたことが多かった，という事情をも示唆しています．

[*22] 翻訳の粗探しをして，日本語力を研く，ということも考えられなくもない，かもしれませんが，これは，頭痛のしてくるような，あまり健康的とは言えない作業になってしまうような気がします．

ても，文中に，突然，全く意味をなさない主張が，挿入されている可能性も，常にあります．しかも，きちんとした内容のものが，ある日に書き換えられて，おかしな内容のもの入れ替わっていない，という保証すら，全くありません．そのため，これは，いずれにしても，細心の注意を払って，批判的に読む必要があるものですが，少なくとも，著者が本書を執筆している 2022 年の段階では，数学や数理科学に関する項目では，英語版の Wikipedia は，日本語版の Wikipedia に比べて，はるかに信頼のできるものになっています．特に，日本語版 Wikipedia の項目では，そうと明記せずに，英語版の翻訳または翻案になっているものが多く，これらは，外国語の本の，日本語への間違った翻訳，ないしは，間違った日本語への翻訳について言ったような問題点が，更に極端な形で，散見されることが多いように感じます．

この，日本語版の Wikipedia の数理科学に関する項目があまり信頼できない，という状況は，客観的な事実，絶対的な真実，という概念を，受け入れられない，あるいは，そのような考え方自体が，そもそも欠落している，日本の科学文化の，問題点の，一つの現れでもあるかもしれません．これは残念なことですが，そして，実際には，日本語版の Wikipedia でも，項目によっては，よく書けたものもないわけではなく，数理科学以外の分野での項目では，もう少しましな状況が見られることもあるのですが，少なくとも，数学に関連する項目に関しては，初学者は，(日本語の数学用語をチェックしたり，更なる文献の検索のために，そこで挙げられている文献表を参照する，というような目的以外では) 日本語版の Wikipedia は，避けるべきであるように思えます．

♦ ここで数パラグラフ初稿に書いたことを削除している．

著者は，日本の大学の化学科で，量子化学に関連した卒業論文を書いて卒業した後，同じ大学の，数学科の 3 年に編入して数学を専門に勉強しはじめた，という経歴を持っています．線型代数を集中して勉強したのは，この卒業論文のための勉強 (卒業論文は，偏微分方程式の近似解を求めるための，固有値の数値計算がその鍵になるものだったので，線型代数の基礎の理解は，そこでも必要となっていました) と，編入試験のための準備の期間でした．当時，手元にあったのは [3], [58] などの日本語の教科書のみで，これらの教科書を参考にして，自己流で理論を再構成する事を試みたのですが，今思い返すと，当時の著者の数学力では埋められないギャップが，いくつも残ってしまっていました．

本書の執筆は，線型代数を入り口として，現代的な数学への入門を目指す読者のための教科書／独習書を書く，ということが，その第一の目標ではありますが，著者自身の中での，より具体的な目標は，当時の，まだ化学科の学生だった頃の，自分が手にすることができていたら，もっとずっと効率よく，深く数学の理解が進んだであろう，と思えるような自習書を書く，ということです．もちろん，時間を遡って，本書を，当時の私自身に手渡すことは，できようがありませんが，本書が，当時の著者のように，普遍科学としての数学を広く学ぶことを目指している読者の手に渡り，彼女／彼の数学の理解を助け，更には，数学／科学の創造への参入への足掛かりの一つとなったとすれば，本書での，著者の目論みは，十二分に達成されたことになる，と思っています．

2022 年 12 月 23 日, 神戸にて

渕野 昌

本書の構成

自己隔離期間の線型代数 I

general-plan

(本巻，— 線型代数からの数学入門)

自己隔離期間の線型代数 II

— 線型代数から数学の森に分け入る

自己隔離期間の線型代数 III

— 線型代数から物理学の宇宙を眺望する

♦ III の扉に寺田寅彦の和歌を引用する.

凡例

（a）本書の脚注は，章ごとの番号付けになっている．脚注を引用するときには，引用している箇所と同じ章にある脚注の場合には，単に「脚注 *??」として引用し，他の章の脚注のときに限って，「第??章の脚注 *??」という形式で引用することにする．なお，本書での脚注の役割については，「前書き」の (4) を参照されたい． legend

（b）本文でのパラグラフが，“…：＿＿＿＿” という構文になっているときには，“＿＿＿＿” の部分は，主張 “…” の理由 (証明) を述べている．このことを強調するために，“＿＿＿＿” を “... だからである．” というように締めくくっている場合もあるが，文章のバランス上の問題で，そのようにできない場合もある．だだし，同じ構文は，もう少し通常の，“…．．つまり，＿＿＿＿ である” の意で用いられている場合もある．

論理的な帰結として，“主張Aから，主張Bが，導かれる”，ということを “Bは，Aから，従う” と表現することもある[*23]．

（c）「それぞれ」という単語を，英語の respectively (あるいはドイツ語の „beziehungsweise“ あいるはフランス語の «respectivement» など) に対応するものとして用いる．例えば，“a, b, c, d を，それぞれ w, x, y, z とする” と書いたときには，“$a = w$, $b = x$, $c = y$, $z = d$ とする” という意味である．

（d）「または」，または，「または，それぞれ」という表現も，英語では，

---

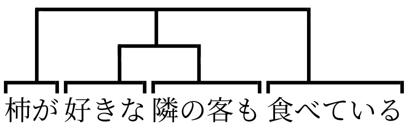
*23 ここでの，“Bは，Aから，従う” は，“B follows from A” の (あまり出来のよくない) 直訳として考えています．従来の日本語には，論理的な帰結をあらわす表現が欠如しているので，これに類する表現は，いずれにしても，不自然にならざるを得ないところがあります．ここでは，“BはAから導かれる” と言うこともできますが，こう言うと，「Bの，Aからの導出は簡単でない」，というニュアンスが出てしまうことがあるので，文脈によっては，別の表現をしたくなることもあり，“BはAから従う” は，そのようなときの代案の一つです．

respectively を使って表現できる，拡張された parallel construction の文に対応する主張を，記述するために用いる．

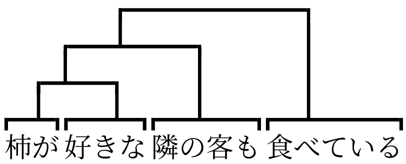
例えば，“$O \subseteq X$ が，点 (または，線) であるとは，O が，X の 0-次元 (または，1-次元) のアファイン部分空間であることとする．” という，一つの文で，“$O \subseteq X$ が，点であるとは，O が，X の 0-次元のアファイン部分空間であることとする．” という主張と，“$O \subseteq X$ が，線であるとは，O が X の 1-次元のアファイン部分空間であることとする．” という，主張の 2 つを，纏めたものと理解する．

同様に “$O \subseteq X$ が，点 (または，それぞれ，線，平面) であるとは，O が，X の 0-次元 (または，それぞれ，1-次元，2-次元) のアファイン部分空間であることとする．” という，一つの文で，“$O \subseteq X$ が，点であるとは，O が，X の 0-次元のアファイン部分空間であることとする．” という主張と，“$O \subseteq X$ が，線であるとは，O が，X の 1-次元のアファイン部分空間であることとする．” という主張と，“$O \subseteq X$ が，平面であるとは，O が，X の 2-次元のアファイン部分空間であることとする．” という主張の，3 つを，纏めたものと理解する．

(e) 例えば，“柿が好きな隣の客も食べている” という文は，少なくとも，



♦ figur-intro-0x.pdf



♦ figur-intro-01x.pdf

の二種類の，parse (文法構造分析) が，可能だが，

“柿が，好きな隣の客も，食べている．”

と，句読点を入れることで，一番目の，よりシュールレアリスティックな内容を持つ文が，意図されたものであることを，明確にすることが，できる．

本書の著者は，本巻の執筆の前後に，必要から，アメリカの大学で果たさ

れるレポートの作文などで，準拠すべき正書法として，指定されることの多い，MLA (Modern Language Association) format を精査する機会があった．MLA の format には，句読点の打ち方に関する，細かい規則が含まれているが，そこでの規則は，その規則に従うことで，文の文法構造が，一意に parse できる文章が，生成される，ことを目標として設定されていることが，見てとれる．そして，これは，ある意味で成功している，とも言えるようにも，思える．それにもかかわらず，これは，assignments (レポート提出) で，この規則に従うことを強要された学生である．ということでもなければ，あまり従いたくない，醜い結果を生じる規則であるようにも，思える[*24]．本書の著者の MLA format に対する，どちらかと言えば批判的な立場にもかかわらず．本書での句読法は，この，MLA format から，大きな影響を受けている．

文の構造が，一意に parse されるような工夫により，意図された内容が正確に伝わるようになる，ということは，数学や科学に関する文章では，いずれにしても，至上命令とも言える．このことを優先するために，本書の本文では，場所によっては，日本語の文章の句読法としては，美文の条件から大きく外れてしまったり，更には，本来の，文章構造から来る要求とも相容れないような，句読点の打ちかたまで，敢て採用している場合もある．

(f) 本書で用いている，論理や，集合についての，記法や用語は，従来の，日本語で書かれている教科書でのそれとは，若干異る部分があるかもしれない．ただし，スタンダードからの逸脱の可能性がある，それぞれの場所では，その逸脱の理由や，その背景に関する議論などを含めた，十分な説明を加え

*24 この，MLA-format が目指していると思われる，句点法や，文体や，作文の規則が正しく設定されれば，それに従うことで，“正しい” 文章が書けるようになる，という思想は，差別の構造について議論することなく，単に差別用語とされる表現を使うことを，禁止することで，差別が克服できる，という，日本や，米国などで，蔓延している盲信に通じるところもある，問題のある考え方であるようにも，思えます．しかし，規則が，芸術的な域に達した場合には，例えば，華道でのように (例えば，[45] を参照)，型から入って精神に至る，という可能性も，皆無ではない，かもしれません．

る努力を，しているつもりである[*25]．記号法や用語の違いの理由の生じてしまっている理由の 1 つは，日本での，多くの教科書が，論理や集合に関して，前世紀の初め頃の記号法，ないし，前世紀の中盤くらいに「近代化」された記号法を，保存しているのに対して，本書では，現代の記法[*27]に近いものが使われているからである．記号法の選択は，単に著者の慣れに由来しているところもあるかもしれないが，意図されているのは，あくまでも，数学を広い視点から統一的に理解するための枠組となるような，記号法の確立である．

なお，本書の用語や記号法は，現在の高校の教材での用語や，記号法とも乖離があるかもしれないが，これは，著者の責任範囲外である[*28]．

(g) 本書の著者は，読者が，「前書き」から，「参考文献」まで，順に線形に読んでゆくことの妥当性を，否定するものではない．少なくとも，ページ順に読んだときに，循環が生じないようには，工夫して書いているつもりであるが[*29]，いくつかの分岐はある．それらの分岐を含む内容を，可読性をそこな

[*25] 本書で使われていて，他では，どこでも使われていないかもしれない，と思われる表記法の一つには，43 ページで改めて導入されることになる，自然数 n に対し，添字の集合 $\{1, 2, ..., n\}$ を $\overline{n}$ で表わす，というものがあります．この記法は，本書で非常に頻繁に用いられることになります．この記法の利点は，"i は自然数で $1 \leq i \leq n$ を満たす" という頻繁に出てくる条件が，"$i \in \overline{n}$" と，コンパクトに表わせるようになる，ことにあります ("$a \in b$" は，"a は b の要素である" ということを表わす記号です)．集合論では，自然数 n は，集合 $\{0, 1, ..., n-1\}$ のことである，として (再帰的に) 定義されるので，この定義[*26]によると，$i \in n$ は，本書での自然数の定義 (12 ページ) に基づいて言うと，"i は，0 か，自然数で，$0 \leq i \leq n-1$ を満たす" という意味になります．我々の記法 "$i \in \overline{n}$" は，これのバリエーションとなっています．因みに，ここで述べたような，集合論でのスタンダードな記号の使い方をすると，我々の "$i \in \overline{n}$" は，"$i \in (n+1) \setminus \{\emptyset\}$" と表わすことも，できます (ここで使っている "$\setminus$", "$\{\cdot\}$", "$\emptyset$" などの記号の意味については，第 2 章で細説します)．

[*26] この自然数の定義や，それから派生した記法は，本巻では，(ここでの言及を除くと) 全く使われていません．

[*27] 「現代の記法」とは言っても，これは，(かなり過去の世代に属する) 著者が，現在，数学の論文を書くときなどで普通に使っている記号法のうち，汎用性を持たないかもしれないものを除いて得られたものにすぎません．なお，記号法に関しては，第 2 章の冒頭で引用した，ディラックの言葉も参照してください．

[*28] 著者は，高校の教科書の作成や，その評価に関わったことは，一度もありません．

vic-circ [*29] ここで言っている**循環** (vicious circle) は，俗に言う，「卵が先か，鶏が先か」というような種類の状況です．昔，英語の辞書で，frankfurter (sausage) の項目の説明に wiener と説明してあって，wiener (sausage) の項目の説明に frankfurter と説明してあるものを見たことがありますが，これも，ここで言っているような意味での循環の典型的な例の一つです．

本書では，説明の都合上，見かけ上の循環が生じてしまっているところも何か所かありま

わずに書き下すために，いくつかの話題を付録に回している．それだから，これらの付録は，読者が読みとばしてもよい題材，という意味で付録になっているわけではなく，この分岐を，線形なナレーションに押し込めて説明しようとすると，説明の量の不均衡から，文脈がうまく読み取れなくなってしまう危険があり，それを回避するために，付録に回しているにすぎない．実際，本巻の執筆では，本書の著者が，執筆の際のエネルギーを多く割いて，執筆の苦しみ (= 喜び？) を味わったのは，本文での章であるより，付録 B の方であった．

線形なナレーションからの逸脱，ということでは，ある内容の説明をしている場所 α で，その場所より先の，場所 β で，導入することになる概念や結果を使うと，α での意味がより明らかになる，というような場合には，α での記述の際に，躊躇せずに (β のページ番号や該当する定理や式の番号を付して)，この β についても，言及していることが多い．また，このような場合には，できるだけ，β の説明の際にも，α への言及を戻すようにしている．これは，本書の執筆に，LaTeX や，TeX のマクロ機能や，emacs エディターの，拡張言語 (emacs lisp) を使って作成した様々な tools を，活用することで，可能になったスタイルである．本書の，このスタイルは，読者を非線形な読み方へ誘なっているもの，とも取れるが，紙媒体の本を，紙媒体の本である，という縛りの中で，ハイパーテキスト化することの試み，と見做すこともできるだろう [*30]．

20 世紀以降の文学における，意識の流れの手法や，メタ・フィクションの試みが，あえて本という旧来のメディアに固執した，人間の思考や記憶や，それにまつわる情緒感情の多層性，超時間性の把握に向けての，アプローチ，と理解できるなら，数学の理解の最適化にむけての近似解についても，あえて本という旧来のメディアで，「印刷されたハイパーテキスト」によって，実現することを試みてみるのも，一興ではないかとも思った次第である．

これに関連すること，として，「あとがきにかえて」のエピグラフ (Jean-Luc Godard 監督の言葉の引用，477 ページ) と，「あとがきにかえて」に書いた「本書をどう読むか」という節 (477 ページ〜) も，参照されたい．

なお，本書内の箇所を，ページ数で参照しているときには，TeX のページ分　♦「本書をどう読むか」

すが，そのようなところでは，その見かけ上の循環が，どのようにして解消されているのか，ということについての，丁寧な説明を加えるようにしています．

[*30] 本書の執筆に際して用いた tools については，「あとがきにかえて」の，「本書の原稿の作成に使った hardwares と softwares について」(480 ページ〜) で改めて細説します．

割の処理に関連したエラーで，参照ページが，該当個所のページの前後になっていしまっている場合もあるので，うまく見付からなかったときには，前後のページも含めて，確かめて頂きたい．

（h）「前書き」でも述べたように，本書は，旧来の意味での講義のための，教科書となることを主要目的として，書かれているものではない．特に，本書の章や節への分割は，多くの教科書でそうであるような，講義のユニットに分割することを想定して書いているわけでなく，書くべき内容に応じたものになっているため，各章や節の長さは，まちまちである．そのため，講義で使うときには，講師の工夫が要求されるだろう．各一回分の講義の分量に合せて章分けをすることに成功している名著も，少なくはないが (例えば，[51] はそのような名著の一つである)，無理に長さで調節することは，書くべき内容に，プロクルステスの寝台のような効果を及ぼしてしまう可能性も，低くないように，思える．

（i）近代，現代の芸術では，慣れていない人が見ると (“見ると” は視覚芸術の場合だが，文学や音楽では，それぞれ，“読むと” あるいは，“聴くと” である)，出鱈目(でたらめ)ではないのか，と思ってしまう場合は，少なくないようである．このような，“難しい” 芸術では，(α) 注意深く，見たり，読んだり，聴いたりして，それを，よく反芻してみると，そこに内在する一貫性(coherence)や，その作品の意義や，背後にある，美学や哲学が，見えてくる，場合もあるし [*31]，そうやってみても，(β) あまり内的な関連性が見えてこなかったり，(γ) 見えたと思った内的な関連性が，作者の意図するものなのか，あるいは，観賞者側の思い入れや錯覚にすぎないのかが，定かにならず [*32]，実は，このような不定な認識の状況が，まさに，作品で意図されたことだったりする，ということすらある．

いわゆる「専門的」な内容の教科書や啓蒙書でも，それを解読できるために必要な前提知識や，思考能力を，持たない人が，見たときには，同じような状況が起ることがあり得るが，本書を含む，大多数の理学書では，あくまで，(α) のシナリオが，想定されているものである．つまり，(前提知識や，思考能力の

*31 この場合，作品の外側 (例えば，時代の様式や他の作品の内容) へのリファレンスがはられていることもあり得るので，この “一貫性” や，意義や，美学や哲学が 認識できるためには，ある程度以上の “教養” が必要となることもあります．

*32 これは，例えば，ソルフェージュの訓練をうけたことがあり，和声学の素養もある人が，近藤譲の「和声学」の時代の作品を聴いたときに抱くことになる感想でしょう．

リソースの問題を除くと)，注意深く読んで，考えれば，謎はすべて解決する．

本書では，読者の前提知識に関しては，ほとんど何も要求していない，と言っていいようなものになるような書き方の工夫がなされているので，読者が本書の内容を理解できるかどうかは，限りなく，読者の思考能力，ないしは，思考能力の向上のみに依存するものになっていると言えると思う．本書の内容が，読者の思考能力を越えた難しいものになっているかもしれない可能性については，完全に否定することはできないが[*33]，やさしいこと[*34]を，難しく言うような，書き方にならない工夫は，十分にしているつもりである[*35]．

本書の装丁とイラストは，panpanya 氏にお願いしたが，この装丁とイラストの関係は，上の分類では，どちらかというと (α) であるよりは，(γ) に近いものになっているかもしれない．

すばらしいイラストのある一般向けの数学書／教科書の例として思い浮かぶものには，アイクナー = ツィーグラー著の [1] がある[*36]．例えば，[1] の組合せ論の章の口絵は，デューラー の有名な版画 “メランコリア” のパロディーで，背景の雑多なオブジェクトは，魔法陣 (これが本文との関連を保つものになっている) を除くと，すべて，現代の自動車の修理工場にあるオブジェクトで置き換えられ，中央のコンパスを持った天使長は，考える金髪の女性に置きかえられていて，天使の羽のように見えるのは背景の植木になっている，という大変に凝ったものである．しかし，デューラーの “メランコリア” を知らない人は，これを何かと思うであろう．

[1] は，挿絵に関することだけでなく，一つの切り口から[*37]，現代の数学を

[*33] これは，最終的には著者の問題ではなく，読者自身の問題でしょう．

[*34] 数学で，既に確立されている結果は，分ってしまえば，“やさしいこと” であることが多いものです．

[*35] これに対し，“よく分かる” と銘打った教科書の多くは，本質的な事柄については言及を避け，ポイントの定まらない説明を加える，または，そのような説明を省くことで，読者に「分った」という幻覚を植えつけるようなものになっていることに，注意します．もちろん，例外もあり，例えば，線形代数の教科書では，小寺 [50] は，“よく分かる” 教科書の中では，比較的きっちりとポイントをおさえたものになっていると思います．

[*36] これは，ここでの話とは，あまり関係のない余談になってしまいますが，本書の著者は，ベルリン自由大学に務めていた頃，この [1] の著者の一人であるアイクナー教授とオフィスが隣りだったことがありました．今，アイクナー先生を思い出すと，先生のオーストリアの訛のドイツ語が聞こえくるような気がします．

[*37] 本書では，線形代数がその切り口であるが，[1] では，「美しい証明」，「エレガントな証明」というエルデシュの精神が，それになっている．

関する幅広い俯瞰を提供する，という点において，本書とも共通する特徴を持つものになっている．

♦ [1] の chapter 7 (spectral theorem) を workout する!

(j) 本書が，読者が最初に読むことになる，本格的な数学への入門書となる可能性を意識して，特に，本巻では，読者が埋めなくてはならない行間が，出来るだけ小さなものになるような記述を心掛けている．これは，本巻が，扱っている内容に比して，他の教科書よりずっと多くのページ数を要していることの，主な理由でもある．

しかし，所々では，過度の冗長を避けるため (または，著者が書く根気を失なって，そのような口実で，書き下すことを放棄したため)，議論の細部が，敢えて省かれている箇所もある．そのような箇所を読者が見過ごさないために，“(演習!)” という注意書きが加えられていることがある．そのような箇所や，それ以外でも，埋めるべき行間の残っている箇所では，読者が，自分自身で，それらの行間を，どのように埋めるかを考えてみることが，想定されている (頭の中で考えるだけでなく，手を動かして，問題点を書き出たり，図式化したりして，整理しなおしてみることが有効／必要な場合もある)．これらの，「演習」を含め，演習問題には，解答はついていない．行間をうめるための “(演習!)” のような簡単な演習問題については，読者が，それを自分で考えてみることが重要なのであるし，チャレンジングな演習問題の場合には，それに解答をつけてしまうと，せっかくのチャレンジが台無しである．しかしそれにもかかわらず，本書の拡張版では，いくつかの演習問題には，解答や，対応する解説が付け加えられている．これは，これらの演習問題として挙げた (演習として，読者が自身で証明を試みてみるべき) 命題のうちには，後で，本文で用いられているものがあり，読者が，それらの証明を見付けられない場合に，ナレーションが完結しなくなってしまうからである．

なお，本書の拡張版の最新版は，本書を購入した読者がダウンロードして閲覧できる工夫がしてあるが，それについては，本巻の巻末の，480 ページを参照されたい．

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	異体字	日本語での読み	LaTeX マクロ
A	α		アルファ	`A \alpha`
B	β		ベータ	`B \beta`
Γ	γ		ガンマ	`\Gamma \gamma`
Δ	δ		デルタ	`\Delta \delta`
E	ϵ	ε	エプシロン	`E \epsilon \varepsilon`
Z	ζ		ゼータ	`Z \zeta`
H	η		エータ	`H \eta`
Θ	θ	ϑ	シータ	`\Theta \theta \vartheta`
I	ι		イオタ	`I \iota`
K	κ	$\varkappa$	カッパ	`K \kappa \varkappa`
Λ	λ		ラムダ	`\Lambda \lambda`
M	μ		ミュー	`M \mu`
N	ν		ニュー	`N \nu`
Ξ	ξ		クサイ（クスィ）	`\Xi \xi`
O	o		オミクロン	`O o`
Π	π	ϖ	パイ	`\Pi \pi \varpi`
P	ρ	ϱ	ロー	`P \rho \varrho`
Σ	σ	ς	シグマ	`\Sigma \sigma \varsigma`
T	τ		タウ	`T \tau`
Υ	υ		ウプシロン	`\Upsilon \upsilon`
Φ	ϕ	φ	ファイ	`\Phi \phi \varphi`
X	χ		カイ	`\X \chi`
Ψ	ψ		プサイ（サイ）	`\Psi \psi`
Ω	ω		オメガ	`\Omega \omega`

greek-letters

*日本語の読みは，英語での読みの発音に近いものを選んでいる．

目次

** 自己隔離期間の線型代数 I ii

***** by 渕野昌 (Sakaé Fuchino) ii

2022 年 12 月 23 日 (16:16) 版 ii

前書き iii

本書の構成 xvii

凡例 xix

ギリシャ文字の表 xxvii

目次 xxviii

第 1 章 舞台設定 — 行列とベクトル 1

第 2 章 前提知識 — 記法や論法などについて 11

2.1 数とは何か 12
2.2 集合と論理に関する補足 18
2.3 関数と写像 31
2.4 和と積の記法と，いくつかの数学的証明の例 42
2.5 数の体系 50

第 3 章 行列の演算 63

3.1 行列の和とスカラー倍 63

3.2 行列の積 66

第 4 章 初等幾何でのベクトルと行列 75
4.1 ベクトルの演算 76
4.1.1 n-次元ベクトル空間，ベクトルの和とスカラー倍 . . . 76
4.1.2 ベクトルの差 81
4.1.3 ベクトルの内積 83
4.2 2-次元ベクトルの演算と平面幾何 88
4.2.1 2-次元平面上の点と直線 88
4.2.2 線型写像とアファイン写像 101
4.2.3 平面上の原点を中心とする回転と，内積の幾何学的解釈 120
4.3 3-次元ベクトルの演算と空間幾何 143
4.3.1 3-次元ベクトル空間での点と直線と平面 143
4.3.2 3-次元ベクトル空間での平行移動，線形変換，アファイン変換 152
4.3.3 3-次元ベクトル空間での原点を中心とする回転 159
4.4 一般次元のベクトル空間 165
4.4.1 一般次元のベクトル空間での点と直線と平面 165
4.4.2 R-線型写像の幾何学的特徴付け 166

第 5 章 連立一次方程式 169
5.1 連立一次方程式と係数行列 170
5.1.1 一次方程式 170
5.1.2 連立一次方程式，係数行列と，ベクトルの方程式 . . . 173
5.2 2-変数と 3-変数の実数係数連立一次方程式の解集合 177
5.2.1 2-変数の実数係数連立一次方程式 178
5.2.2 3-変数の実数係数連立方程式 180
5.3 ガウスの消去法 180
5.4 基本変形による可逆性の検証と逆行列の計算 195

第 6 章 行列式 203
6.1 置換と行列式の定義 203
6.2 行列式の基本性質 221

6.3　余因子行列とクラメールの公式 242
6.4　行列式の代数的な特徴付け 248

第 7 章　線型独立性と基底　253
7.1　K^n での線型独立性 254
7.2　一般の線型空間での基底と次元 264
7.2.1　体上の線型空間 264
7.2.2　線型空間での線型独立性と基底 268
7.3　線型部分空間とアファイン部分空間 280
7.3.1　線型部分空間 280
7.3.2　アファイン部分空間 289
7.4　線型写像，アファイン写像と次元定理 294
7.4.1　線型写像と次元定理 294
7.4.2　アファイン写像 300
7.5　線型空間の同型と埋め込み 306
7.6　内積空間と正規直交系 312

第 8 章　線型写像と固有値　313
8.1　線型写像の行列表現 314
8.2　正方行列の対角化と，固有値，固有ベクトル 318
8.2.1　正方行列の対角化 318
8.2.2　固有値と固有ベクトル 320
8.3　2 次元空間と 3 次元空間での回転，再訪 331
8.4　線型変換のトレースと行列式 337
8.5　対称行列の対角化 339

付録 A　三角函数　341
A.1　角度の直観的導入と三角関数の定義 341
A.2　三角関数の加法定理，二倍角の公式と半角の公式 345

付録 B　実数体の導入と角度の導入　349
B.1　同値関係と商構造 352
B.2　実数体の導入 368

B.3 距離空間と完備化 407
B.4 角度の導入 429

付録 C 多角形に対するジョルダンの定理 453
C.1 多角形に対するジョルダンの定理 454
C.2 多角形の三角形分割 464

付録 D 簡約な階段形の行列への変形の存在と，その簡約な階段形の一意性 469
D.1 基本変形による簡約な階段形の行列への変形 471
D.2 簡約な階段形の行列の一意性 473

あとがきにかえて 477
本書をどう読むか 477
本書の pdf ファイルについて 480
本書の原稿の作成に使った hardwares と softwares について 480

参考文献 487

索引 492

記号表 498

人名 500

第 1 章

舞台設定 — 行列とベクトル

This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order. — James Joseph Sylvester, [62] matrix-vec

数などの数学的対象を，四角く並べたものを，**行列** (matrix) とよぶ [*1]．例えば，行列 A が，m-行 (横書の行，rows) n-列 (columns) からなるとき [*3]，A は，$m \times n$-**行列** ($m \times n$-matrix) である，という． 行列 A が，$m \times n$-行列のとき，A の**縦横サイズ** は，$m \times n$ である，とも言うことにする．

例 1.1

sylvester

[*1] 「行列」という日本語での用語は，「行と列からなっているもの」というような感じの命名で，"待ち行列" (これは，英語では，"queue" という) の意味の行列では，ありません．

"matrix" は，もともとは，人間や動物の子宮を指す単語だったようです．ここでの意味の "matrix" は，イギリスの数学者シルヴェスター (James Joseph Sylvester, 1814(文化 11 年，ロンドン)〜1897(明治 30 年，ロンドン)) が，この「子宮」の語義を頭に置いて (以下の第 6 章で議論することになる)「(複数の) 余因子を生みだすもの」として，1850 年 (嘉永 3 年) の論文で命名した，ということのようです (本章の初めにエピグラフとして引用した，[62] からの文章を，参照してください)．この単語は，日本語では，ドイツ語の „Matrix“ の発音を真似て「マトリックス」と音訳されることもあり (ドイツ語では「マ」にアクセントがつくので，日本語で，"マトリックスは" という pitch accent がついてしまうこと (といっても，これは東京語の場合ですが) を，阻止するために，より正確な音訳としては，「マートリクス」とするべきかもしれません)，同名の映画も，日本では，ドイツ語式の発音で，「マトリックス」と呼ばれていますが，英語では，この単語 matrix の発音は「メイトリックス」に近い [ˈmeɪtrɪks] になります．「行列」という日本語の方の由来は，明らかではないものの，この用語は，高木貞治の「代数学講義」(1930 (昭和 5 年)) では，既に使われているようです [*2]．

[*2] 高木貞治 (1875 (明治 8 年)〜1960 (昭和 35 年)) は，(西洋の数学の文脈で) 数学の研究に重要な貢献を果した，最初の日本人数学者と，考えられている人です．彼の『代数学講義』 [63] は，当時，上級の数学を学ぶ学生に広く読まれていた教科書だったと思われるので，「行列」という用語が，高木自身の発明でなかったとしても，「行列」や，本書でも後に出てくる，「行列式」という日本語の用語は，[63] で採用されたことで広く用いられるようになった，と考えてもよさそうに思えます．

fn-0

[*3] 以下では，文字 i, j, k, ℓ, m, n は，特に断らないかぎり，自然数 1, 2, 3,... (のうちのどれか) を表わすことにします ('ℓ' については後で直線を表わすために使うこともあります)． 文字が足りなくなったときには，他の文字を自然数を表わすために使ったり，これらの文字に添字をつけて，例えば，i_0, i_1 等を，ある自然数を表わす記号として用いることも，あります．

次の節でも述べるように，数学では，自然数を 0 から始める流儀の方が，むしろ主流かもしれないのですが [*4]，ここでは，特に注意しない場合には，自然数は，1 から，始まるものとしておくことに，します．

[*4] 例えば，著者の書く，(主に英語の) 数学の論文では，自然数は，常に 0 から，始まっていて，特に，著者の研究分野や，それに隣接する研究分野の数学者が，論文の想定された読者であるときには，論文の中で，自然数が，0 から始まっていることを，殊更に，断りもしません．

ex-1-0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{は，} 5 \times 4\text{-行列である．}$$

本書では，行列を，$\left[\cdots\right]$ と，角括弧で，括って，表わしているが，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

のように丸括弧で，括って表わす流儀もある [*5]．．

行列の中に並んでいる，一つ一つの数学的対象は，行列の**成分** (entry) である，という．上から数えて，i-行目，かつ，左から数えて，j-列目のところにある，行列 A の成分を，A の，(i,j)**-成分** ((i,j)-th entry) と呼ぶことにする．例えば，上の例 1.1 での行列 A では，その $(2,4)$-成分は，7 で，$(4,1)$-成分は，$\frac{1}{2}$ である．

行列の一般論では，二重添字を使って，

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

のようして行列を表わすことが多い．また，このとき，$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ と書いたり，行列の縦横サイズが，文脈から明らかなときには，更に，略して，$A = [a_{i,j}]$ と書いたりもすることにする [*6]．

行列 A が集合 S の要素を成分とするとき (つまり，$A = [a_{i,j}]$ として，すべての添字 i, j に対し，$a_{i,j} \in S$ のとき)，A は，S **上の行列**であると言うこ

[*5] $m \times n$-行列と言ったときには，m は，行列の「高さ」(行の数) で n は，行列の「幅」(列の数) であることに，注意してください．

[*6] 次の小節で，添字の集合 $\{1, \ldots, n\}$ を，$\overline{n}$ と表わす，という記法を導入します．これと，集合の要素を表わす記号 $\in$ を用いると，ここで，$[a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ と書いているものは，$[a_{i,j}]_{i \in \overline{m}, j \in \overline{n}}$ と表わすこともできます．

とにする．

既に，行列を表すのに，記号 A を使っていたが，行列は，大文字のアルファベット A, B, C などで，表わすことにする．これらは，一般の行列を表わすのに使われるが，すぐ後で見るように，E と O は，特定の行列を表わすために，とっておく．

行列の成分は，一般には何でもよいが，以下では，主に，行列のすべての成分が，数であるような場合を，扱かう [*7]．

行と列のサイズが等しい行列，つまり，ある自然数 n に対して，$n \times n$-行列となっているような行列を，**正方行列** (square matrix) とよぶ．特に，縦横サイズが $n \times n$ の正方行列を，**n-次の正方行列** (square matrix of order n) と呼ぶことにする．

成分が，すべて 0 であるような行列 [*8] を，**ゼロ行列** (zero matrix) とよぶ．$n \times n$-行列 (つまり n-次の正方行列) で，ゼロ行列となっているものを，大文字のオミクロンを使って [*9]，O_n と表わす．必ずしも等しくない m, n に対し，縦横サイズが，$m \times n$ のゼロ行列を，$O_{m\times n}$ と表わすこともある．ゼロ行列の縦横サイズが，文脈から明らかなときには，添字を省略して，単に，O と書くこともある．

♦「零行列」となっていないことを確認．

♦ $O_{m\times n}$ の記法の統一をチェックする．

正方行列のうち, 左上から右下への対角線上にない成分が, すべて 0 であるようなものを, **対角行列** (diagonal matrix) とよぶ [*10]．つまり, $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ として，A が，対角行列である，とは，任意の [*11]，異る $1 \le i, j \le n$ に対し，

---

*7 上で導入した言い回しを用いると，ここで考察することになる行列は，S をある数の体系 (たとえば (後出の) 実数の全体 $\mathbb{R}$) として，あるいは，更に一般的には，S を，(これも後で出てくる) 数の体系の一般化となっている，ある体として，S 上の行列 であることがほとんどです．ただし二三の例外もあります．例えば，7.2.2 節では，線型空間 (これも後で導入される概念です) の要素を成分とする行列が，活躍することになります．

*8 ここでの 0 は，数としてのゼロである場合も，後で導入されることになる，数の概念の一般化としての「体」(たい) のゼロ元としてのゼロの場合もありえます．

*9 多くの文字フォントでは，アルファベット大文字のオー O とギリシャ文字オミクロンの大文字は同じ活字になるので，ここで “大文字のオミクロン” と言っているのは，半ばジョークですが，π, Ω など，数学の定数にギリシャ文字を使う例は少なくありません．

*10 これが，なぜ右上から左下でないのかは，後で出てくる，行列の積の定義との兼ね合い，として説明できることになります．なお，ここで，“対角線上以外の成分が，すべて 0 である” と言ったときには，“対角線上の成分は， 0 でない” と言っているわけではない，ことに注意してください．

*11 “任意の” という表現は，数学で頻繁に用いられるものです．これは，英語の “arbitrary” に対応するものです．日本語での，これの同義語的表現には，“勝手な” という (少し古め

$a_{i,j} = 0$ となること，である．ゼロ行列 O_n は，対角行列の特別な場合である [*12]．対角行列のサイズが，$n \times n$ であることを，明記したいときには，**n-次の対角行列** (diagonal matrix of order n) と言うことにする．

n-次の対角行列 A で，**対角成分** (diagonal entries, つまり，$A = [a_{i,j}]$ として $a_{i,i}$ の形の添字を持つ成分) が，すべて 1 であるようなものを，**単位行列** (identity matrix) とよび E_n で表わす [*13]． **クローネカのデルタ** (Kronecker's delta) は，単位行列を扱うときに，便利な記法である [*14]．これは，自然数

の) ものもあって，これを使うと，ここでの，“任意の，異る $1 \leq i, j \leq n$ に対し，...” は，“勝手な，異る $1 \leq i, j \leq n$ に対し，...” と表現することもできます．言葉のニュアンスとしては，ここでの例では，“$1 \leq i, j \leq n$ となっている，異る i と j をどのようにとっても，...” である，という意味ですが，これは，もっとフォーマルな論理での言い方に近い表現では，“すべての $i \neq j$ となる $1 \leq i, j \leq n$ に対し，...” と言うのとも同じです．したがって，これらの表現は，論理的には，どれを用いても同じなのですが，出来るだけ自然な理解の仕方に適合する使い分けになるよう，心掛けています．

[*12] “**特別な場合**” という表現は，英語での “a special case” という表現に対応するもので，これは，一般の場合の命題の，一部分のみに対応する命題のことを言います．この「特別な場合」という言い回しは，“特別な重要性を持つ場合” という意味ではないので，注意が必要です．英語の “a special case” の “special” は，ここでは “general” の対義語として使われているわけですが，その意味での日本語には，一般相対性理論に対する特殊相対性理論のように，「特殊な」という形容動詞もあります．しかし，この「特殊」も「普通でない」という意味合いを含んでいるので，a special case の “special” に対する訳語としては適当でないように思えます．“general” の方の「一般」という訳語にも問題があるかもしれません．因みに，1920 年代に，アインシュタインが，日本を訪れたとき，「特殊相対性理論」と，「一般相対性理論」と題された 2 つの講演を行なったところ，後者を，一般向けの講演と勘違いして，沢山の人が聴講に来た，という逸話があります． special-case

英語版の Wikipedia での，

https://en.wikipedia.org/wiki/Special_case

には，ここでの意味での “special case” に関する，明解な説明があります．本書では，“a spacial case” という表現が，不定冠詞つきの意味で使われていることを強調するために．“一つの特別な場合” という表現の仕方をしていることもあります．

[*13] 単位行列は，現在では，英語の名称の頭文字をとって，I_n と表わされることも多いのですが，[30], [43] を含む，日本での多くの教科書では，ドイツ語の „Einheit“ (単位) の頭文字に由来する (と思われる) ‘E’ が用いられることも少なくありません．本書でも，この記号法を踏襲することにします．後に出てくる $\mathfrak{e}_k^n$ という記法もやはり，このドイツ語 „Einheit“ に由来するものと，思われますが，こちらの記号は，英語圏の記法でも踏襲されていることが，少なくないようです． Einheit

[*14] クローネカ (Leopold Kronecker, 1823 (文政 6 年)～1891 (明治 24 年)) は，ドイツの数学者です．この名前は，日本語では「クロネッカ」と表記されることも多いのですが，ドイツ語には促音がないことと，長音も基本的にはないものの，ドイツ語のアクセントが日本語の長音と似た聞こえ方をすることから，「クローネカ」という表記の方が (カタカナ読みをしたときに native speakers に理解してもらえる確率が高いという意味で) 原音に近い，

i, j に対し，$\delta_{i,j}$ を

x-1-0
$$(1.1) \quad \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき}; \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義するものである [*15]．この記法により，n-次の単位行列 E_n は，$E_n = [\delta_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ (あるいは，脚注*6 での記法により，$E_n = [\delta_{i,j}]_{i,j \in \overline{n}}$，または，添字を省略して $E_n = [\delta_{i,j}]$) などと，表わすことができる．

ex-1-1 **例 1.2**

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A を，$m \times n$-行列とするとき，A の行と列を，入れ替えて得られる $n \times m$-行列 B を，A の**転置行列** (transpose of A) とよび，${}^t A$ で表わす．つまり，$A = [a_{i,j}]_{i \in \overline{m}, j \in \overline{n}}$ とするとき，${}^t A = B = [b_{i,j}]_{i \in \overline{n}, j \in \overline{m}}$ として，$i \in \overline{n}$, $j \in \overline{m}$ に対し，

x-1-1
$$(1.2) \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

である [*16]．

ex-1-2 **例 1.3**

（1） $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ とするとき，${}^t A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ である．

と言えると思います．

:= *15 “t と記述される，数学的対象を，a と表わすことにする” という表明を $a := t$ と書きます． 日本では，‘:=’ の意味で，‘≒’, ‘≙’ などの記号が使われることもあります．

*16 ここでも，$\overline{n}$ (または，$\overline{m}$) で，集合 $\{1, \dots, n\}$ (または，$\{1, \dots, m\}$) を表わす，という記法が，用いられています．

（2） $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ とするとき，${}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ である．

ある行列の転置行列の転置行列が，もとの行列になることは，(1.2) から明らかである．つまり，

補題 1.4 任意の行列 A に対し，${}^t({}^tA) = A$ である [*17]． ❏ P-1-0

行列のうち，列の数が 1 のもの，つまり，ある自然数 m に対して，縦横サイズが，$m \times 1$ となっているものを，**列ベクトル** (column vector) とよぶ．ベクトルの，縦横サイズに言及する必要があるときには，**m-次元列ベクトル** (m-dimensional column vector) という言い方をすることもある [*18]．列ベクトルは，本書では，板書太字体 (blackboard bold) の小文字 $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ 等で表わすことにする [*19]．

[*17] 証明のできる (証明の知られている) 数学的命題で，定理と呼ぶには大袈裟だが，後で用いる可能性のあるものを，**補題** (Lemma) とよびます．ここでの補題 1.4 では，その前に，「転置行列の定義 (1.2) から明らかである」，という証明 (のアイデア) が述べられているので，証明は書いていません．そのかわりに，「証明は，上で説明したので，繰り返さない」ということを示す，区切の記号として，記号 '❏' を，置いてあります．この記号は，証明の終りを示す区切の記号としても，用いることにします．証明の終りを表わす記号としては，q.e.d. (ラテン語の “quod erat demonstrandum” (これが証明すべきことであった，の意の副文) の略) や，'□', '■', '⊠' などが用いられることもあります．著者が，ここで使っている記号 '❏' は，1990 年代に，ドイツの雑誌 Der Spiegel で，記事の終りを表わす記号として，使われていたものに因みます．ついでに，この記号の由来を，もう少し詳しく述べることにすると，この記号の LaTeX (本書の版組みに使っているシステムで，Donald Knuth の作った TeX という版組みのシステムの上に実現されているものです) のマクロは，(故) Wolfgang Rautenberg 教授が，彼の教科書 ([55] のもとになったドイツ語版) で使うために，TeXnician (TeX 使いの達人の意) だった (故) Ulrich Fuchs 君に 依頼して作成してもらったもので，著者は，Ulrich 君から，彼の書いたマクロを譲り受けて，それに，デザインの変更を加えたものを，以来 (30 年近く!) ずっと使っています (どのような変更が加えられているかは，[55] (あるいは，Der Spiegel の古い号) での記号と，本書で使われている記号を比較してみると，分ります)．

“定理”, “補題” という見出し語以外にも，“系” (けい，corollary) という見出し語が用いられることが，あります．これは，その直前に証明した定理や，補題の，比較的簡単な応用として得られる命題に付けられる見出し語です． ♦ Ulrich を index に入れるかどうか考える．

[*18] 第 7.2 節で，一般の線型空間の次元の概念が，導入されることになりますが，ここでの “m-次元ベクトル” という言い回しでの「次元」は，そこで導入される，次元の概念との，整合性を持つことになるものです (例 7.29 を，参照してください)．

[*19] 板書太字体は，もともとは，黒板などに書くときの，手書きの太文字を真似たものです．逆に，例えば，著者は，手書きでは，この書体の文字を，

同様に，行の数が 1 の行列，つまり，ある自然数 n に対して，縦横サイズが，$1 \times n$ となっているものを，**行ベクトル** (row vector) とよぶ．ベクトルの，サイズを，指定したいときには n-**次元行ベクトル** (n-dimensional row vector) という言い方も，することにする．

行ベクトルも，板書太字体 (blackboard bold) の小文字 $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ 等で，表わすことにする．

以下では，単に，m-**次元ベクトル** (m-dimensional vector) と言ったときには，m-次元列ベクトルのことを指すものとする．列ベクトル (あるいは，行ベクトル) に対しては，上から (あるいは，左から) n-番目の成分のことを，n-**成分** (n-th entry) とよぶ，ことにする．

$\mathbb{a}$ が，m-次元列ベクトルのとき，${}^t\mathbb{a}$ は，m-次元行ベクトルである; $\mathbb{a}$ が，m-次元行ベクトルのときには，${}^t\mathbb{a}$ は，m-次元列ベクトルである．

A を，$m \times n$-行列 $[a_{i,j}]$ とするとき，$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ に対し，$\mathbb{a}_j$ を，A の j-列の成分からなる m-次元列ベクトルとし，$\mathbb{z}_i$ を，A の i-行の成分からなる n-次元行ベクトルとする．

$$(1.3) \qquad \mathbb{a}_j := \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{z}_i := [\, a_{i,1}\; a_{i,2}\; \cdots\; a_{i,n} \,]$$

である．A は，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ を，この順に，左から右に束ねたもの，と見ることができ，$\mathbb{z}_1, \mathbb{z}_2, \ldots, \mathbb{z}_m$ を，この順に，上から下に積み重ねたもの，と見ることもできる．このことを，

x-1-1-0
$$(1.4) \qquad A = [\, \mathbb{a}_1\; \mathbb{a}_2\; \cdots\; \mathbb{a}_n \,], \qquad A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \mathbb{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_m \end{bmatrix}$$

などのように書きます．これに対し，本書で使っているフォントでは，板書太字体の小文字のアルファベットは，$\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}\,\mathbb{d}\,\mathbb{e}\,\mathbb{f}\,\mathbb{g}\,\mathbb{h}\,\mathbb{i}\,\mathbb{j}\,\mathbb{k}\,\mathbb{l}\,\mathbb{m}\,\mathbb{n}\,\mathbb{o}\,\mathbb{p}\,\mathbb{q}\,\mathbb{r}\,\mathbb{s}\,\mathbb{t}\,\mathbb{u}\,\mathbb{v}\,\mathbb{w}\,\mathbb{x}\,\mathbb{y}\,\mathbb{z}$ と，タイプセットされます．

ベクトルを，太文字体 (bold) の小文字 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,... で表したり，小文字に上つきの矢印を付加して，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ などと書く流儀もあります．本書では，上つきの矢印は，後で出てくる，列 (sequence, (43 ページを参照) を表わすために，使っています．

と，表わす．

A が，(1.4) でのように表されているとき，

$$
(1.5) \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\mathbb{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbb{a}_n \end{bmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\mathbb{z}_1 & \cdots & {}^t\mathbb{z}_m \end{bmatrix}
$$ x-1-1-1

である．

行列とベクトルは，線型代数の主要な登場人物たちであるが，ここまでの記述では，行列とベクトルの定義や，これらに関する基本的な記法について，有無を問わず説明しただけで，これらの概念が，線型代数で，どのような役割を演じることになるのか，ということについては，まだ，何も述べられていない[*20]．このことについては，第 3 章以降で，説明されることになる．しかし，その前に，まず，次の章では，数学で広く使われる記号や，概念や，言葉遣いについての説明を，しておこうと思う．

[*20] 数学のテキストでは，技術的なアイデアが，その意図の説明なしに，書かれていることが少なくありません．これは，粘土板や，パピルスや，羊皮紙や，紙が，稀少だった時代に，できるだけ圧縮した形で記述する必要があったことの名残りかもしれません．近代の数学論文でも，論文誌で与えられる紙数の制限から，できるだけ圧縮された，長い説明を省いた文章で，結果を述べることが求められることが，多かったのではないかと思います．

また，そのこととは，独立に，ある天才数学者の得た結果について，別の天才数学者が，理解しようとするときには，意図の説明は，かえって邪魔に思えることの方が，多いかもしれません．

しかし，この章で導入した行列やベクトルの用語について，ここまでで，それらの用途についての説明が何もなかったのは，上で述べたような事情とは異なり，とりあえずの舞台設定をしてからでないと，ここで導入された概念たちが，どのようなドラマを演じることになるかを見ることは，いずれにしてもできないからです．第 3 章以降で，このドラマの展開を，見てゆくときには，何が起っているかについての説明は，十分に加えられています．

第 2 章

前提知識 — 記法や論法などについて

sym

In mathematical theories the question of notation, while not of primary importance, is yet worthy of careful consideration, since a good notation can be of great value in helping the development of a theory, by making it easy to write down those quantities or combinations of quantities that are important, and difficult or impossible to write down those that are unimportant. — P.A.M. Dirac [13][*1]

この章で，本書で用いられることになる記法や，それに関連する数学の基礎知識について，まとめておくことにする．ここで述べることのうち，特に注意を必要とするものについては，それが後で実際に使われるときには，そこで，本章の参照すべき該当個所を明示するようにしているので，数学についての，ある程度の基礎知識のある読者は，本章は，斜めに読んで先に進んでしまってよい．

♦ チェックここから 21.04.04(日 18:28(JST))

2.1　数とは何か

numbers

本書では，幾つかの異る数の範囲を考察することになる．**自然数** (natural numbers) は 1, 2, 3,... という種類の数のことである，とする．この “ ... ” については，もっと踏み込んで議論することもできるし，いずれにしても，どこかの段階では，そうするべきことでもあるが，ここでは，これには，あえて触れないことにする．少なくとも，具体的に与えられた 4, 58, 74,... などという自然数が何かは，疑問の余地のないものだろうし[*2]，自然数の一般的な性質についても，本書で必要となる自然数全体に対する前提知識としては，足し算と掛け算が，通常の計算則のもとに実行でき，自然数上で帰納法の議論が行える，

[*1] [13] は，物理学を勉強した人は必ずどこかで習うことになる，ディラックのブラ = ケット記法の導入がなされている歴史的論文の冒頭に掲げられている文章です．この記法と関連する話題については，本書の第 III 巻で取り上げます．ただし，ここで一言，注意しておくと，ディラックがここで言っている “重要でない事柄を記述しにくくする” は，当初は，重要でない，と思われた事が，実は重要であることが後で判明する，という流れを阻止してしまう可能性も持っているので，ちょっと微妙なところがあるようにも思えます．

[*2] 本当にそうでしょうか？

ということのみである [*3]．　自然数のすべてをひとまとめに集めたものを，一つの数学的対象として扱かうときには，それを $\mathbb{N}$ と表わす．数学的対象をひとまとめにして，新しい一つの数学的対象と捉えるとき，それを**集合** (set) とよぶ．$\mathbb{N}$ は自然数の全体からなる集合である．このことを $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$，または，$\mathbb{N} = \{n : n$ は自然数 $\}$ などと表わす．

四角い表としての行列に現れる対象は，この行列の成分と言うのだったが，集合の中に含まれる対象は，集合の**要素** (element) である，という．例えば，7 は $\mathbb{N}$ の要素である．これを，7 は $\mathbb{N}$ の**元** (げん) である，と表現することもある．また，このことを 要素関係を表わす記号 '$\in$' を使って，$7 \in \mathbb{N}$ と表記する．より一般的には，ある対象 a が，集合 S の要素であるとき (つまり，a が，S の元であるとき)，この事実を，$a \in S$ で表わし，そうでないことを，

[*3] 自然数上の**帰納法の原理** (the principle of induction) には，いくつかのヴァリエーションがありますが，いちばん基本的なものは，任意の性質 $P(\cdot)$ に対して [*4]，

> “$P(1)$” が成り立ち (**帰納法の初め** (initial step of induction))，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，“$P(n)$ なら $P(n+1)$” が成り立つ (**帰納法のステップ** (induction step))
> なら，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $P(n)$ が成り立つ

というものです[*5]．ここで，“$P(n)$ なら $P(n+1)$” は $P(n)$ が成り立つとも $P(n+1)$ が成り立つとも言っているわけでなく，$P(n)$ と $P(n+1)$ のそれぞれの成り立つことの間の関係性を主張している命題であることに注意してください．

> すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$P(k)$ がすべての $k < n$ に対して成り立つなら，$P(n)$ が成り立つ，が成り立つなら，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ

という形の**累積的帰納法** (cumulative induction principle) もよく用いられることになりますが，これは，上の帰納法の一般形から，導き出すことができます (定理 2.3 を参照してください)．

[*4] ここで $P(\cdot)$ と書いたときには，“$\cdot$” は対象を入れる place-holder (パラメタと言うこもある) を表わしています．変数記号を使って，$P(x)$ と表現することもできますが，こう書くと，多項式などの表記のように見えてしまうかもしれないので，わざと無名変数の形で書いています．

“帰納法” は，英語では単に induction と呼ばれることが多いのですが，認識論での “induction” (日本語では “帰納”) とかぶるので，“mathematical induction” とよばれることもあり，この影響で，日本語でも “数学的帰納法” という表現が教科書などで見られることがあります．帰納法の使用例のいくつかは，第 2.4 節で見ることになります．

[*5] ここで，ある命題 A が “成り立つ” というような表現を使っていて，後では，ある命題 A が “真 (しん) である” という表現も出てきます．命題 A の主張 (“A である”) を “Aが成り立つ” と表現したり，“A が真 (しん) である” と表現したりもしています．数理論理学的な立場からは，厳密には，「A である」，「A が成り立つ」，「A が真である」は区別する必要のある異る概念を表現している用語と考えなくてはならなくなるのですが，ここでは，むしろ，初心者の混乱をさけるために，意識的に，素朴に，この命題 A が正しいことを表わす同じ意味の言葉として扱っています．

$a \notin S$ と表わす． ここでは，$0 \notin \mathbb{N}$ となるように $\mathbb{N}$ を定義しているが，第 1 章の，脚注*3, 脚注*4 でも触れたように，自然数の全体の集合に，0 を含める流儀もある．

幾つかの対象が，1 つの集合に，要素として属すことを，表現するときには，例えば，“$a_1 \in X$, $a_2 \in X$,..., $a_n \in X$” と書くかわりに，“$a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$” のように書くことも多い．

有限個の対象 (objects) $o_1, \ldots, o_n$ が，与えられたときに，これらをすべて集めた集合を $\{o_1, \ldots, o_n\}$ で表わす．要素の個数が有限な集合は，**有限集合** (finite set) とよばれるが [*6]，具体的に与えられた有限集合は，要素をすべて並べあげることで (原理的には) $\{\cdots\}$ という形に表わすことができる [*7]．例えば，$\{3, 4, 7\}$ は数 3, 4, 7 を要素とし，それ以外の要素は持たないような集合である．前の節で，(自然数の) 添字 i が，$1 \leq i \leq n$ を満たす，という状況が何回か出てきたが，この条件は，ここでの記法を用いると，$i \in \{1, \ldots, n\}$ と書くこともできる [*8]．有限集合 X の要素の個数を，$\#(X)$ で表わす．

2 つの集合 S, T に対し，それらの少なくともどちらか片方の要素となっているものを，すべて集めてできる集合を，S と T の**和集合** (union) とよび，$S \cup T$ で表わす． $S \cup T := \{a : a \in S$ または $a \in T\}$ で，

> すべての対象 a に対し，$a \in S \cup T$ となるのは，$a \in S$, または，$a \in T$ の (少なくとも) 一方が成り立つ，ちょうどそのときである [*9]．

和集合の構成の繰り返し適用の結果は，この演算の適用順序や演算の優先順位に依存しないので [*10]，複数の数の和や積のときと同じように，演算の実行の

[*6] 有限集合の，厳密な定義は，演習問題 2.14, (2) のヒントを参照してください．

[*7] ここで「原理的には」と言っているのは，例えば，ある有限集合の要素の数が宇宙全体に存在する原子の数より大きいとき，実際にこの集合を物理的な紙の上に $\{\cdots\}$ という形に書き下すことはできないだろう，というようなことも念頭に置いて考えているからです．

[*8] 本書では，集合 $\{1, \ldots, n\}$ を $\overline{n}$ と表わすことにする (2.33) ので，これは更に簡素に，$i \in \overline{n}$ と表現できることになります．

[*9] 命題 A と命題 B について “A が成り立つのは B が成り立つ，ちょうどそのときである” という言いまわしで，A と B が同値であることを表現します．命題の同値性については，次の 第 2.2 節 (24 ページ〜) も参照してください．

[*10] “和集合を取る演算が，適用順序に依存しない”，とは $S \cup T = T \cup S$ が常に成り立つことを指しています．これは，もう少し数学的な用語では，“和集合の演算は**可換性** (commutativity) を持つ”，と表現されます．“和集合を取る演算が，演算の優先順位に依存しない”，は，$(S \cup T) \cup U = S \cup (T \cup U)$ が常に成り立つことを指しています．これは，も

ブロックの階層構造を指定する括弧を全部とりさって表わすことにする．例えば，集合 $S_1,\ldots,S_n$ の和集合を $S_1\cup\cdots\cup S_n$ のように表わす．

集合の集まりが[*11]，添字の集合 I を使って，S_i, $i\in I$ として与えられているとき[*12]，この族に属す，すべての集合の**和集合** $\bigcup_{i\in I} S_i$ を，

(2.1)　$\bigcup_{i\in I} S_i := \{a :$ ある $i\in I$ に対し, $a\in S_i\}$　x-1-1-1-0

として定義する．添字の集合が無限集合の場合も，あり得る[*13]．X が，集合族のとき，X は自分自身の要素で添字付けられた集合 $\{a_i : i\in X\}$ (ただし $i\in X$ に対し，$a_i = i$) と考えることができるので，(2.1) の意味での和集合 $\bigcup_{i\in X} a_i$ を，取ることができるが，この集合を $\bigcup X$ と表わす．つまり，

(2.2)　$\bigcup X := \{b :$ ある $a\in X$ に対し, $b\in a$ である $\}$　x-1-1-1-1

である．2 つの集合 S, T の**共通部分** (intersection) $S\cap T$ も考察されることが多い． これは，

(2.3)　$S\cap T := \{a : a\in S$ かつ $a\in T\}$　x-1-1-2

として定義される．集合の共通部分の構成の繰り返し適用の結果も，演算の適用順序や演算の実行のブロック (階層) に依存しないので，複数の数の和や積のときと同じように，演算のブロックの階層構造を指定する括弧を全部とりさって表わすことにする．例えば，集合 $S_1,\ldots,S_n$ の共通部分を $S_1\cap\cdots\cap S_n$

う少し数学的な用語では，“和集合の演算は**結合律** (associativity) を満たす”，と表現されます．これらの性質 (法則) を繰り返し適用すると，例えば，$((S_1\cup S_2)\cup S_3)\cup(S_4\cup S_5) = S_3\cup(S_5\cup((S_2\cup S_1)\cup S_4))$ が成り立つこと，等が導けます．

[*11] ここで，「集合の集まり」と言っているのは，**集合族** (family of sets) と表現されることもあるもので，要素がまた集合になっているような，集合を指す言葉です．現代の集合論では，数学の対象はすべて集合である，という想定のもとに理論を構築するので，この立場では，「要素がすべて集合であるような集合」という表現は，単に「集合」ということと同値で，その意味ではナンセンスな表現になってしまうのですが，その場合でも，ある集合を，その要素が集合であることを意識して捉えたいときは，この集合を「集合族」と呼ぶことにした方が，心理的には理解しやすいこともあります．

[*12] この集合族を X と表わすことにすると，$X = \{S_i : i\in I\}$ です．

[*13] 添字の集合が無限集合のとき，(2.1) でのような集合が存在するかどうか不安に思う人もいるかもしれませんが，集合論では，このような集合の存在は，「和集合の公理」と呼ばれる集合論の公理の一つで，保証されます — 実は，添字の集合が有限の場合にも，集合の続の和集合の存在は，何らかの保証が必要となり，これも，今言った．和集合の公理の特別な場合として保証されています．

のように表わす．

和集合の記法と，前出の有限集合の記法を合せて用いると，集合 $\{n :$ n は 0 か，または自然数である $\}$ は，$\mathbb{N}\cup\{0\}$ とも表わすことができるが，本書では，この集合を $\mathbb{N}^*$ で表すことにする．

$\mathbb{Z}$ で，**整数** (integers) の全体 $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ を表わす [*14]．

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m : m \text{ は，ある } n \in \mathbb{N} \text{ の反数である }^{*15}\}$$

である．

分数として表わすことのできる数を，**有理数** (rational numbers) という [*16]．有理数の全体からなる集合を $\mathbb{Q}$ で表わす [*17]．

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

である [*18]．$\mathbb{Q}$ は，次に述べる実数の全体 $\mathbb{R}$ と同様に，四則演算に関して閉じている (つまり，(いくつかの) 有理数に四則演算を施した結果は再び有理数である)．一方，有理数の全体には，$\sqrt{2}$ や π をはじめとして，多くの数が属し

*14 ‘$\mathbb{Z}$’ の記号の由来は，ドイツ語の „Zahlen“ (“数” という意味の単語 „Zahl“ の複数形) でしょう．

*15 数 m が，ある数 n の**反数** (additive inverse あるいは，opposite) である，とは，m が，n の符号 (プラスマイナス) を反転させて得られる数であることです．つまり，$m = (-1) \cdot n$ です．

*16 “rational” (あるいは，この単語に対応するヨーロッパの他の言語の単語) は，「理性的な」という意味がありますが，もともとは「比率の」という意味を持つ単語です．rational number の rational は，この「比率の」という意味で使われていると思われますが，昔，誰かが，これを日本語に訳したときに，「理性的な」という方の語義と，とり違えて，「有理数」という誤訳をしてしまい，それが定着してしまったのではないかと，思います．

*17 ‘$\mathbb{Q}$’ という記号の由来は，分数 (複数) を表わす，英語の “quotients” (あるいは，ドイツ語の Quotienten またはフランス語の quotients (スペルは同じだが発音は違う) など) の頭文字でしょう．

*18 数は 0 では割れないことに注意してください．もちろん，0 で割るという計算を人工的に定義することはできますが，それをしたとして，例えば，ある数 $a \in \mathbb{Z}$ を 0 で割った結果を b であると定義することにすると，「どんな数でも 0 をかけると結果は 0 である」という計算則を保存するためには $b \cdot 0 = 0$ としなくてはならないので，「ある数を他の数でわったものに，この他の数をかけるともとの数が得られる」という計算則を保存することができなくなってしまいます．

$\mathbb{Q}$ の定義で，“$n \in \mathbb{N}$” となっていて，“$n \in \mathbb{N}^*$” ではないのは，このためです．

ていない[*19].

実数 (real numbers) とは，数直線上のある点として表現できるような数たちのことである．実数の全体の集合を $\mathbb{R}$ で表わす．数学的には，実数に関するこの説明は，自然数についての説明と同様に不満の残るものだが，ここでは，この不十分な説明で先に進むことにする．$\mathbb{R}$ の「完備性」が必要となる解析学でとは異なり，実数に関する事実で，本書で必要となるのは，殆どの場合，$\mathbb{R}$ が実数直線上の点に対応する数と考えられる $\sqrt{2}$, π, e といった数をすべて含んでいて，四則演算や冪乗や sin, log といった基本的な関数に関して閉じている (つまり，実数に対するこれらの演算の結果がふたたび実数になる) ことのみである．

$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ の近代的な数学での導入の仕方については，付録 B の B.2 節で考察する．

実数の全体に $i^2 = -1$ となる “数” i を付加して，四則演算が実数や有理数でと同じように行えるように拡張した体系を，$\mathbb{C}$ で表わす．$\mathbb{C}$ の要素は，**複素数** (complex numbers) と呼ばれる．$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ には四則演算と共存する線形な順序が存在するが [*21]，$\mathbb{C}$ にはそのような順序を導入できない．他方，$\mathbb{C}$ では，任意の一変数多項式 $p(x)$ に対して，$p(x)$ の根 (つまり，方程式 $p(x) = 0$ の解) が存在する [*22].

---

*19 $\sqrt{2}$ が有理数でないことの証明は，中学か高校の教科書にあると思いますが，この証明は，既に今から 2500 年近く前に，ギリシャのピタゴラス派の数学者たちに知られていたことでした．因みに $\sqrt{2}$ が有理数でない，というのはよく知られていますが，実は，自然数 n に対して $\sqrt{n}$ が有理数とならないのは[*20]，$n = m^2$ となる自然数 m が存在しない，ちょうどそのときであることが，証明できます．この証明はそれほど難しくないですが，(自分で再現することができなかったときには)，例えば，[20] の補題 4.1 を参照してください．π が有理数でないことの証明は，もう少し厄介なものになりますが，ヒルベルト (David Hilbert, 1862 (文久 2 年) – 1943 (昭和 18 年)) の先生だったリンデマン (Ferdinand von Lindemann, 1852 (嘉永 5 年) – 1939 (昭和 14 年)) が，π は，どの整数係数の多項式の根にもならない，というもっと強い形で 1882 年 (明治 15 年) に証明しています (分数 $\frac{m}{n}$ は，多項式 $mx - n$ の根になることに注意します).

*20 有理数でない実数は，**無理数** (irrational number) とよばれます．

*21 集合 X 上の順序が線形とは，X の任意の 2 つの要素がこの順序によって比較できることを言います．(必ずしも) 線形でない順序は，半順序とよばれることもあります．
　半順序や線形順序の厳密な定義は，脚注*81 を参照してください．線形順序が四則演算と共存する，ということの正確な意味については，以下の脚注*84 を参照してください．

*22 この事実は，**代数学の基本定理** (Fundamental Theorem of Algebra) と呼ばれています．$\mathbb{Q}$ も，$\mathbb{R}$ も，この性質を持っていません．例えば，$\sqrt{2}$ を根として持つ多項式 $x^2 - 2$ と，

2 つの集合 X, Y に対して，すべての X の要素が，Y の要素でもあるとき (つまり，

subset-0 (2.4)　すべての数学的対象 a について "$a \in X$ なら $a \in Y$" が成り立つとき，

あるいはまた，この命題の含意の部分の対偶をとって [*23]，

subset (2.5)　すべての数学的対象 a について $a \notin Y$ なら $a \notin X$ が成り立つ

とき)，X は Y の**部分集合** (subset) である，といい，このことを $X \subseteq Y$ で表わす． 特に，Y は Y 自身の部分集合だから，$Y \subseteq Y$ だが，X が Y とは異る，Y の真の部分集合である，ということを $X \subsetneqq Y$ と書いて表わすこともある．

$X \subseteq Y$ でないことを $X \not\subseteq Y$ と書く．

上で導入した数の集合に関しては，

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}^* \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$$

が成り立っている [*24]．

集合の要素のときと同様に，1 つの固定した集合 X のいくつかの部分集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ を考察する必要の出てくることがあるが，そのようなときに，例えば，$S_1 \subseteq X, \ldots, S_k \subseteq X$ という条件を，$S_1, \ldots, S_k \subseteq X$ とも略記することにする．

2.2　集合と論理に関する補足

set-logic

---

i を根として持つ多項式 $x^2 + 1$ が，反例になっています．本巻では，$\mathbb{C}$ のこの性質が本質的に用いられることはなく，これが本質的に用いられるのは，本書の第 II 巻以降です．

◆ 第 II 巻以降で $\mathbb{C}$ を係数体とする線型空間を扱かう．

本文の少し前で，本書では，実数全体 $\mathbb{R}$ の完備性と呼ばれる解析的な性質は必要にならない，と書きましたが，$\mathbb{C}$ が代数学の基本定理を満たすことの証明のためには，$\mathbb{R}$ の完備性の代数的帰結の一つ (実数の全体が実閉体とよばれる代数構造になっていること) が必要になります．

[*23] 含意については，19 ページを，対偶命題につては 25 ページの前後参照してください．

[*24] $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ については，すべての $m \in \mathbb{Z}$ が，例えば，$\frac{m}{1}$ とも表現できることに注意すれば明らかです．

集合の演算のうち，2 つの集合 S, T の和集合 $S \cup T$ と，共通部分 $S \cap T$ を，取る演算については，既に述べたが，集合 S から，集合 T を“引いて” **差集合** (set difference) を取る演算も，以下では頻繁に用いられる．これは $S \setminus T$ と表わされるもので，

(2.6)　$S \setminus T = \{a \in S \,:\, a \notin T\}$　x-1-2

として定義される．例えば，集合 $\overline{n} = \{1, ..., n\}$ を添字集合として用いているときに，添字の中から，1 つ $i^* \in \overline{n}$ を固定しておき，“i^* 以外のすべての添字 i について” 議論したい，という状況は後で何度も出てくる．この状況は，“$i \in \overline{n}, i \neq i^*$” という複文で書くこともできるが，“$i \in \overline{n} \setminus \{i^*\}$” として一つの式としてすっきりと書くこともできる [*25]．上で既に導入した記法との関連では，例えば，$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ である[*26]．

数学で用いる論理は，日常生活での「論理」とは同一でない．(数学的) 命題 A，B に対する “A なら B” (“A ならば B” と言うこともある) として表現される命題では，この差が大きく感じられることが多い．数学では，この形の (複合) 命題は，(論理的) **含意** (implication) とよばれるものだが，例えば，脚注*3 の帰納法の一般形の説明で出てきた “$P(n)$ なら $P(n+1)$” では，“$P(n)$ なら $P(n+1)$” が成り立つという主張は，$P(n)$ が成り立つことも，$P(n+1)$ が成り立つことも意味しておらず，この含意が成り立つ，ということは，“$P(n)$ が成り立つ，という状況のもとでは，$P(n+1)$ も必ず成り立つ”，という主張が成立するということである．　implication

“A なら B” という形の主張では，A を**前提** (antecedent または premise) とよび，B を**結論** (conclusion) とよぶ． 上で注意したように，“A ならば B” は，“A が成り立つ，という状況のもとでは，B も必ず成り立つ”，ということである．したがって，“A ならば B” は，

[*25] この “すっきりと” は，慣れの問題もあるので，意見の別れるところかもしれませんが，例えば，“i_0, i_1 以外のすべての添字 $i \in \overline{n}$” も “$i \in \overline{n} \setminus \{i_0, i_1\}$” として，同様に表現することができること，など，一旦慣れてしまうと，その長所の納得できる記法だと思います．

[*26] この等式の “$= \mathbb{N} \setminus \{0\}$” を，疑問に思った人もいるかもしれません．集合 A, B について，$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ で，$A \setminus \emptyset = A$ である (演習!) ことに留意すると，$A \cap B = \emptyset$ のときには，$A \setminus B = A$ となることが，分かります．特に，$a \notin A$ のときには，$A \setminus \{a\} = A$ で，これの特別な場合として，$\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ です．　setminus

x-1-2-0 (2.7)　A が成り立たない，または，B が成り立つ

と言い換えることもできる [*27].

“$P(n)$ が成り立つ，という状況のもとでは $P(n+1)$ も必ず成り立つ” では，n ごとに $P(n)$ が成りたったり，成り立たなかったりする可能性があるので，“$P(n)$ が成り立つ，という状況のもとで” という考え方は受け入れやすいが，“A なら B” での，A や B が，このようなパラメタを含まない場合には，日常語からの乖離がより強く感じられるかもしれない．例えば，“A なら B” での，A が，まだ真偽の確定していない数学の未解決問題である場合にも，“A なら B” の真偽が論理的に確定する場合があり得る [*28].

このような “なら (ば)” の “論理的” な解釈とは異なり，日常語では，例えば，「君が行かないなら，僕が行く」と言ったときには，「君が行かない」という前提は，成立している事実で，その事実のもとで「僕が行く」という行動判断としての結論を下している，というのが自然な解釈であろう．

「雨が降るなら傘をさす」という文章の例は，数学的な含意にもう少し近い判断を表明する文となっていると言えるかもしれない．しかし，数学での “A なら B” は A も B も絶対的で不変な真偽の議論のできる命題であるのに対し，この文での「雨が降る」は，傘をさすかどうかを判断しようとしている主体の置かれた時刻や場所に依存する状況であり，「傘をさす」も，主体の，そ

[*27] ここでは，“言い換える” と言葉をにごして説明していますが，これは，少し後に導入することになる，同値性の概念を用いて，「任意の命題 A，B について，“A ならば B” と “A でない，または B である” は同値である」ということです．

前提 A が成り立たないときには，“A ならば B” (つまり，“A が成り立つ，という状況のもとでは，B も必ず成り立つ”) は，無内容的 (vacuously [ˈvakjʊəsli]) に成り立ちます (“無内容的” という言い方については，本文のすぐ後で説明しています)．結論 B が成り立つときにも，前提 A の真偽によらず，“A が成り立つという状況のもとでは B も必ず成り立つ” は成り立ちます．このことから，“A が成り立たない，または，B が成り立つ” が成り立つなら，“A ならば B” は成り立つことがわかります．ちなみに，(2.7) ででもそうですが，“または” は exclusive or (つまり，どちらか片方だけが成り立つ) ではなく，inclusive or (つまり，少なくともどちらか片方は成り立つ) の意味で使われていることにも注意してください．

逆に，“A が成り立たない” も “B が成り立つ” も正しくないとき (“または” が inclusive or であることから，これが，(2.7) が成り立たないときです)，つまり，A が成り立つが B は成り立たないときには，“A ならば B” (つまり，“A が成り立つ，という状況のもとでは，B も必ず成り立つ”) は，成り立ちません．

[*28] 後で証明の例として考察することになる，ベルトランの仮説のゴルトバッハの予想からの証明 (48 ページ) は，このような状況の例の一つになっています．

の特定の時刻や場所での行動，ないし行動の決定である．

既に，脚注*27 でも触れたが，数学的な含意を含む推論で，初心者に理解しづらいと思われる状況の一つに，英語で，“vacuous truth” (**無内容的真理**) と呼ばれるものがある．脚注*3 で累積的帰納法とよんだものを思い出してみよう．これは，すべての，パラメタ x を含む数学的命題 $P(x)$ に対し，

(2.8)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，“$P(k)$ がすべての $k < n$ に対して成り立つなら，$P(n)$ が成り立つ”，が成り立つなら，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ x-1-3

という原理だったが，ここでの “$P(k)$ がすべての $k < n$ に対して成り立つ” は，“すべての対象 k に対し，k が $k < n$ となる自然数なら $P(k)$ が成り立つ” と言い換えられるので，含意を含む表現である．ここで，$n = 1$ の場合を考えてみると，我々のここでの自然数の定義から，$k < 1$ となる自然数は存在しないので，

(2.9)　“すべての対象 k に対し，k が $k < 1$ となる自然数なら $P(k)$ が成り立つ” x-1-4

という主張は**無内容的** (vacuously) に成り立ってしまう．(2.8) の仮定は，“$P(k)$ がすべての $k < n$ に対して成り立つ” なら “$P(n)$” が成り立つ，ということだったから，(2.9) が成り立つことから，$P(1)$ が成り立つことが，帰結される．

累積的帰納法の記述 (2.9) に，一般的な帰納法の仮定にある “$P(1)$ が成り立つ” という条件が (明示的には) 含まれていないのは，この理由による．

ここで得られた，$P(1)$ が成立するという事実を使うと，$k < 2$ となる自然数は 1 しかないから，(2.9) の仮定により，$P(2)$ が成り立つことが帰結され，$\cdots$ と続けることができるが，この $\cdots$ を無限に繰り返すことなく [*29]，“すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ” と結論できる，というのが，この累積的帰納法の主張するところである．

この帰納法の原理の記述でもそうであるように，数学では，人間の通常の文章の読解力の許容量を超える，入れ子の深さを持った，文章を扱わなくてはい

---

*29 そもそも「無限に繰り返す」，とは何を言っているのかは，よく考えてみると不明です．

けなくなることは，少なくない．文章の意味が一意に汲み取れ，しかも可読性も改善されるために [*30]，括弧を入れたり，行分けを行ったり，“ならば” を記号 ‘⇒’ で置き換えたりすることも多い．例えば，上の累積的帰納法は，このような処置で:

x-1-3d　すべての性質 $P(\cdot)$ に対し，

(2.8)′ すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，
$$\Big(\text{すべての } k \text{ に対し } k < n \Rightarrow P(k)\Big) \Rightarrow P(n)$$
が成り立つなら，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ

のように書き直して表現することができ，これによって，その可読性を (多少は？) 改善することができる．

ちなみに，もともとの帰納法の原理の方は，同様の記述方法により，すべての性質 $P(\cdot)$ に対し，

x-1-4-a (2.10) $P(1)$ が成り立ち，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，
$$P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$$
が成り立つなら，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ

こと，と表記できる．

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (くうしゅうごう，empty set) とよび，$\emptyset$ で表わす．後でも述べるように，集合のひとつひとつは，その要素の全体が何かで決定するので，$\emptyset$ も要素を 1 つも持たない (つまり，どんな数学的対象も $\emptyset$ の要素でない) という性質で一意に確定する．すべての集合 X に対し，$\emptyset$ は X の部分集合となる: $\emptyset \subseteq X$ は，“すべての対象 o に対し，$o \in \emptyset$ ならば $o \in X$ である” という主張であり，これが成り立つことも，“vacuous truth” (無内容的真理) として理解できる．

2 つの集合 S, T に対し，条件 $S \subseteq T$ は $S \setminus T = \emptyset$ と表現することもできる [*31]．

*30 意味が一意に汲み取れることと，可読性が高いことが同じではないことは，例えば，コメントの何も書きこまれていないコンピュータ・プログラムを思い起こしてみると明らかでしょう．

*31 これは，より正確には，本文のすぐ後に導入されることになる，“同値” という概念を用いて，“$S \subseteq T$” と $S \setminus T = \emptyset$ は同値である，と表明するべきことです．

2 つの集合 S, T が**共通部分を持たない** (disjoint) とは，S にも T にも属しているような対象が存在しないことであるが，この状況は $S \cap T = \emptyset$ と表現することができる．S と T が共通部分を持たないことを，S と T は**互いに素** (そ) である (disjoint)，とも言う．

集合 U が，互いに素な集合 S, T の和集合になっているとき，この事実を，$U = S \dot{\cup} T$ と表わす．つまり，

$$(2.11)\quad U = S \dot{\cup} T \ :\Leftrightarrow\ U = S \cup T,\ \text{かつ，}\ S \cap T = \emptyset$$ x-1-4-a-a-0

である [*32]．

集合族 X について，すべての異なる $a, b \in X$ が互いに素であるとき，X は互いに素である，ということにする，ある集合 Y が，集合族 X の (2.2) の意味での和集合となっているとき，これを $Y = \dot{\bigcup} X$ と表わす．つまり

$$(2.12)\quad Y = \dot{\bigcup} X \ :\Leftrightarrow\ Y = \bigcup X,\ \text{かつ，}\ X\ \text{は互いに素}$$ x-1-4-a-a-1

である．

含意について，もう少し補足しておく．“すべての $\cdots$ を満たす o に対し，o が 性質 P を満たすなら，o は性質 Q も満たす” という形の命題は頻繁に出てくる．例えば，$X \subseteq Y$ はこの形の命題である ((2.4) を参照)．ただし，$X \subseteq Y$ では，上での “$\cdots$” は何の制限も課さない条件 (例えば $o = o$) になっていると考える．日本語で書くとぎこちなくなってしまったり，意味がとりにくくなってしまうので，命題 P の否定 (“P でない”) を $\neg P$ と書くことにすると，“$\neg$(すべての $\cdots$ を満たす o に対し，o が P を満たすなら，o は Q も満たす)” は，“ある $\cdots$ を満たす o^* が存在して，o^* は P を満たすが，Q は満たさない” である [*33]．これを $X \subseteq Y$ の否定に応用すると，

---

*32 記号 “$:\Leftrightarrow$” は新しい概念を導入するときに用いられます．“A $:\Leftrightarrow$ B” と書いて，“A という概念を B という性質として定義する” を表わします． 一方，既に，第 1 章の脚注*15 でも述べたように，“t という表現で与えられる対象を a と呼ぶことにする” という表明を，$a := t$ と書くことにします．

*33 ある対象 o について，“o が性質 P を満たす” を $P(o)$ と書くことにすると，“$P(o)$ なら $Q(o)$” は，(2.7) から，“$\neg P(o)$ または $Q(o)$” です．ここで，“または” が “inclusive or” だったことに気をつけると，この主張の否定は，“$P(o)$ かつ $\neg Q(o)$ となることがわかります．

“$\neg$(すべての $\cdots$ を満たす o に対し，o が P を満たすなら，o は Q も満たす)” は，“ある $\cdots$ を満たす o が存在して $\neg$(o が P を満たすなら，o は Q も満たす) を満たす” とな

x-1-4-a-a

(2.13) $X \not\subseteq Y$ は，“ある $a \in X$ で $a \notin Y$ となるものが存在する” という命題 (と同値) である

ことが，分かる．

含意は推移的である．つまり命題 A，B，C に対し，A ⇒ B と B ⇒ C が成り立つなら，A ⇒ C である．含意の推移性は，同等性の推移性と同様に[*34]，特に断りなしに頻繁に用いられることになる．

equivalence

命題の同値性も，以下の議論で重要な役割を果す．命題 A と B が**同値** (equivalent) である，とは，A が成り立つこと，と B が成り立つことが，同じになることである[*35]． これは論理学的には (A ならば B) かつ (B ならば A) であること，として表現できる．2 つの命題 A，B が同値であることを，“A ⇔ B” と表現する．このことは，“A が成り立つのは B が成り立つ，ちょうどそのときである．” という言い回しで表現されることもある (これは，14 ページの脚注*9 で既に注意した)．

特に，A と B がパラメタを持った命題 $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ であるときに，“すべての ... という性質を持つ対象 x に対して $P(x)$ と $Q(x)$ は同値である” という形の命題が，頻繁に考察されることになる (例えば，定理 4.23, 定理 4.47, 定

るので，上の含意の否定の分析をこれに適用すると，これは，“ある $\cdots$ を満たす o が存在して，o は P を満たし，Q は満たさない” になることがわかります．

transitivity-of-equality

*34 同等性 (等しいこと) が推移的である，というのは，“$a = b$ で $b = c$ なら $a = c$” である，という性質のことです．同等性のこの性質は，ある対象 a と b が等しいことを示すために，$a = b_1 = b_2 = \cdots = b_k = b$ と等号の連鎖で a と b を結ぶ，という論法として，頻繁に用いられることになります．

*35 ここでの「同じになる」ということを，(論理の体系を明示的に固定せずに) 厳密に論じることは難しいのですが，例えば，すぐ後に出てくる，含意とその対偶命題の同値性 (25 ページを参照) のように，純粋に論理的に「同じ」こともあるし，文脈の中で仮定されている数学的な前提条件のもとで「同じ」になっている場合もあります．

命題を表わす変数 A，B，C,... を，かつ，または，ならば，$\cdots$ でない，などの論理演算子で結びつけて得られる表現 (命題論理の論理式) については，それらの論理的な真偽は脚注*36 でのように，真偽値表を作ってみることで，変数 A，B，C,... に代入する命題の真偽に依存した，この表現の真偽のありようが確定するので，そのような表現の 2 つが，(論理的に) 同値であることは，脚注*36 での例でのように，それらの真偽値表を比べることで，(機械的に) 判定できます．これに対し，同値性に数学的な前提条件 (つまり議論の出発点として仮定した数学的仮定 (例えば，帰納法の原理など)) が関与している場合には，同値性の証明を見つけるために，何らかの数学的な「ひらめき」が必要になることは少なくありません．実際，ゲーデルの第一不完全性定理と呼ばれる定理は，そのような「ひらめき」が本質的に不可欠になる状況が生じる場合があることを示すものとなっています．

理 5.23’ (245 ページ) など).

“すべての ... という性質を持つ対象 x に対して $P(x)$ と $Q(x)$ は同値である” が示されたときには，この ... という性質を持つ任意の対象 o に対し，$P(o)$ が成り立つこと，と $Q(o)$ が成り立つことは，同値 (同じ意味) になる．そのような o に対して，$P(o)$ であることが証明されたときには，そのことから $Q(o)$ であることも証明されたことになり，逆も成り立つ．

含意とその対偶が同値であることは，証明で頻繁に応用される:

(2.14)　任意の命題 A，B に対し，“A ならば B” という含意命題は，その **対偶** (contraposition) “B でないならば A でない” (つまり，“¬ B ならば ¬ A”) と同値である． contraposition

これは，日常語の “ならば” の感覚のバイアスのもとでは，疑わしい主張のように思えてしまうかもしれないが，これらの複合命題の真偽表を作成してみると納得することができるだろう [*36]．この事実の応用として，“A ならば B” という形の命題を証明するときに，この命題自身ではなく，その対偶命題 “B でないならば A でない” を証明する，という証明の戦略が手に入る．もちろん，これが，戦略として意味を持つのは，“A ならば B” はどう示したらよいかが見えてこないが，“B でないならば A でない” は証明できるとき，である．

演習問題 2.1　(1) 含意が推移性を持つことを，真偽表を作って確かめよ． Exer-1-a

(2)　含意 “A ならば B” が，“¬ A または B” と同値になることを，真偽表を作って確かめよ (この同値性については既に 20 ページの (2.7) で注意している)．

(3) 次を真偽表を作って確かめよ: “A または B” と，“B または A” は，同

[*36] 実際に，**真偽表** (truth table) を作成してみると， truth-table

A	B	A ならば B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	¬ B	¬ A	¬ B ならば ¬ A
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

となる (ただし，真と偽をそれぞれ 1 と 0 で表わしている)．これらの真偽表で分かるように，“A ならば B” と “B でないならば A でない” は同じ真偽関数を持つから，同値な命題であることが帰結される．

値で，“A かつ B” と，“B かつ A” も，同値だが，“A ならば B” と，“B ならば A” は，同値でない． ❑

“... でない” を，論理記号 ‘¬’ を使って “¬ ...” で表わす，という記法を既に導入していたが，“... かつ ◦◦◦”, “... または ◦◦◦”, を，論理記号 ‘∧’, ‘∨’ を使って， それぞれ，“... ∧ ◦◦◦”, “... ∨ ◦◦◦” で表わすことも多い．

Exer-1-a-0 **演習問題 2.2** [*37] (1) ¬¬ A と A は同値である．

(2) (ド・モルガンの法則) (a) $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$ は $\neg\,\mathrm{A} \wedge \neg\,\mathrm{B}$ と同値である[*38]. (b) $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ は $\neg\,\mathrm{A} \vee \neg\,\mathrm{B}$ と同値である．

(3) (2.14) は，演習問題 2.1, (2),(3), と，この演習の (1), (2) から導ける．

(4) すべての集合 X, Y に対し，$X \subseteq Y$ と $X \setminus Y = \emptyset$ は同値である．

証明. (1) と (2) は真偽表を作成して確かめることができる．

(3): $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{演習問題 2.1, (2) による}} \neg\,\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(1) による}} \neg\neg(\neg\,\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(2)(a) による}} \neg(\neg\neg\,\mathrm{A} \wedge \neg\,\mathrm{B}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(1) による}} \neg(\mathrm{A} \wedge \neg\,\mathrm{B}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(2)(b) による}} \neg\,\mathrm{A} \vee \neg\neg\,\mathrm{B} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{演習問題 2.1, (3) による}}$

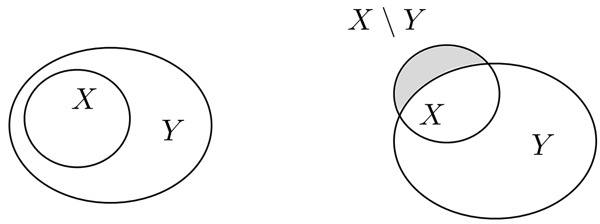
$\neg\neg\,\mathrm{B} \vee \neg\,\mathrm{A} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{演習問題 2.1, (2) による}} \neg\,\mathrm{B} \rightarrow \neg\,\mathrm{A}.$

(4): 以下を参照． ❑ (演習問題 2.2)

上の演習問題 2.2, (4) の主張は，例えば，

[*37] 演習問題が，定理のような主張として書かれているときには，その主張を証明 (ないし説明) せよ，というのが演習問題の課題です (What else?).

[*38] ここでは，‘¬’ の方が ‘∧’ や ‘∨’ より結合の優先順位が高い，ということが暗黙に仮定されています．つまり，“¬ A ∧ ¬ B” は “(¬ A) ∧ (¬ B) のことです．これは次の (b) でも同様です．



$X \subseteq Y$　　　　$X \not\subseteq Y$

のような**ベン図** (Venn diagram) を描くことで納得することができる．しかし，厳密な証明では，$X \subseteq Y$ と $X \setminus Y = \emptyset$ の定義に戻って，2 つの命題が同値であることを論理的に示す必要がある．そのような証明は，ベン図に表現されている状況の翻訳と解釈できるようなものになるが，より複雑な集合算の命題では，描いたベン図が，間違っていたり，状況を完全に表現していないことも，あり得るので，論理的な証明を書き出してみる必要は，より強まる．‖ 演習問題 2.2, (4) の証明:

$X \setminus Y = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$a \notin X \setminus Y$
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$\neg(a \in X \setminus Y)$
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$\neg(a \in X \wedge a \notin Y)$
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$\neg(a \in X) \vee \neg(a \notin Y)$　　(ド・モルガンの法則による)
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$\neg(a \in X) \vee a \in Y$　　(演習問題 2.2, (1) による)
$\Leftrightarrow$ すべての a に対し，$a \in X \;\Rightarrow\; a \in Y$　　(演習問題 2.1, (2) による)
$\Leftrightarrow$ $X \subseteq Y$　　($\subseteq$ の定義 (2.4)). ‖

2 つの命題 A，B が同値であることは “A $\Leftrightarrow$ B” とも表わすのだったが，上で既に注意したように “A $\Leftrightarrow$ B” は，“A $\Rightarrow$ B” かつ “B $\Rightarrow$ A” ということである．

以下では，性質 $P_1(\cdot)$，$P_2(\cdot)$,…，$P_k(\cdot)$ について，“$\underset{\sim\sim\sim}{\quad}$ を満たす，すべての対象 o について $P_1(o)$，$P_2(o)$,…, $P_k(o)$ はすべて同値である” という形の主張を証明したい，という局面が何度も出てくる (例えば，定理 4.47, 定理 5.23’ (245 ページ) など)．含意が推移性を持つことから，これを示すには，$\underset{\sim\sim\sim}{\quad}$ を満たすような任意の o について，例えば，$P_1(o) \Rightarrow P_2(o)$, $P_2(o) \Rightarrow P_3(o)$,…, $P_{k-1}(o) \Rightarrow P_k(o)$, $P_k(o) \Rightarrow P_1(o)$ を示せばよいことが，分かる．この場合，$\Rightarrow$ の経路は必ずしも上のものではなくてはいけないわけではなく，$\Rightarrow$ をたどって，$P_i(o)$ たちのうちのどこからどこへでも行くことができるようにすればよいので，示しやすい含意の経路をうまく選んで証明する

ことで，証明の簡略化がはかれる．

背理法 (ラテン語で reducio ad absurdum または英語では indirect proof, proof by contradiction などとも言う) とよばれる論法も証明でよく用いられる．これは，P という命題を証明するために，P でないと仮定して議論を進めて，この仮定から矛盾が導かれることを示す，という方法である．矛盾が導かれたのは，P でない，とした仮定が間違っていたからで，したがって P が成り立つほかない．として P が示せたことになるが，この最後の「矛盾が導かれたのは，...」という部分は実際の証明では省かれることが多い．したがって，背理法の証明は，

定理 ?? P である．

証明． P でないと仮定してみる．このとき，... だから矛盾である． $\square$ (定理 ??)

というような外観を持つものになることが多い．しかし，これではあまりにぶっきらぼうなので，本書では背理法の証明で，矛盾が得られるまでに，長く議論しなければならないときには，そのような議論の冒頭で，“背理法で示す．” というような注意書きを添えたり，“... でないと仮定して矛盾を示す” と，証明の全体の流れに言及したりするようにする．

背理法の応用例の一つとして，累積的帰納法の原理が，帰納法の原理から導かれることの証明を見てみよう．

ind-cumul-ind **定理 2.3** 帰納法の原理が成り立つことを仮定する．つまり，すべての性質 $P(\cdot)$ に対し，(2.10) が成り立つとする．

このとき，累積的帰納法の原理が成り立つ，つまり，すべての性質 $P(\cdot)$ に対し，(2.8)$'$ (22 ページ) が成り立つ．

証明． 帰納法の原理が，成り立つことを，仮定する．このとき，累積的帰納法の原理が，成り立たないとして，矛盾を示す．

累積的帰納法の原理が，成り立たない，ということは，ある，性質 $P_0(\cdot)$ で，

x-1-4-a-0
$$\Big(\text{すべての } k \text{ に対し } k < n \Rightarrow P_0(k)\Big) \Rightarrow P_0(n) \tag{2.15}$$

が成り立つが，ある $n^* \in \mathbb{N}$ に対して $P_0(n^*)$ が成り立たない，ようなものが存在する，ということである．

$P_0(\cdot)$ と $n^* \in \mathbb{N}$ をこのようなものとするとき，性質 $P(\cdot)$ を，自然数 n に対して，$P(n)$ が成り立つのは，

(2.16)　すべての $k \le n$ に対して $P_0(k)$ が成り立つこと

である，として定める ($P(\cdot)$ を確定するためには，例えば，自然数でないような任意の対象 a に対しては $P(a)$ は常に成り立たないものとすればよい).

(2.9) の前後での議論と同様に，$P(1)$ が，成り立つことが，分かる．また，(2.15) により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，“$P(n)$ なら $P(n+1)$” も成り立つ．帰納法の原理が成り立つことを仮定していたので，このことから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ となることが帰結されるが，一方 n^* の選び方と $P(\cdot)$ の定義から $P(n^*)$ は成り立たない．これは矛盾である．　□ (定理 2.3)

実は，帰納法の原理と，累積的帰納法の原理は，$\mathbb{N}$ 上の $<$ と 1 を足すという演算のいくつかの基本的な性質の仮定の上で [*39]，同値である:

定理 2.4 累積的帰納法の原理から，帰納法の原理が導ける．　Exer-1-0

証明． 累積的帰納法の原理が成り立つことを仮定する．性質 $P(\cdot)$ が，

(2.17)　$P(1)$ を満たし，　xa-1-a-0

(2.18)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ を満たす　xa-1-a-1

とする．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つことを示したい．累積的帰納法の原理が成り立つので，このためには，$P(\cdot)$ が累積的帰納法の原理の仮定: すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，

(2.19)　すべての自然数 $k < n$ 対し，$P(k)$ が成り立つなら，$P(n)$ が成り立つ　xa-1-0

を満たすことが示せればよい．(2.17) から，$n = 1$ に対しては，(2.19) は成り立つ．$n > 1$ なら，$n = n_0 + 1$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が，取れる [*40]，すべて

[*39] 定理 2.3 と，次の定理 2.4 の証明で仮定されているのは，$<$ が $\mathbb{N}$ 上の線形順序であること (「線形順序」という用語については，脚注*81 を参照してください)，1 がこの順序に関して最小元であること，$n+1$ が n の $<$ に関する “次の” 要素となっていること (つまり，$n < n+1$ で，$<$ に関して n と $n+1$ の真の間にある $\mathbb{N}$ の要素は存在しないこと)，および $n \in \mathbb{N}$ が $n > 1$ なら，$n_0 \in \mathbb{N}$ で $n = n_0 + 1$ となるものが存在することです．

[*40] 脚注*39 を参照．

の $k < n$ に対して $P(k)$ が成り立つとすると，特に $P(n_0)$ が成り立つから，(2.18) により，$P(n_0+1)$ (つまり $P(n)$) が成り立つ．したがって，この n に対しても (2.19) が成り立つことが示せた．　❏ (演習問題 2.4)

第 2.4 節の後半では，数学的な証明のパターンを確認するために，更に，いくつかの初等算術での定理の証明を，見てみることにする．

♦ 全称命題の否定と存在命題の否定

命題の同値性と，数学的対象の同等性は，初心者が混同することが多いように思う．記号の上では，2 つの命題 A，B の同値性は，A $\Leftrightarrow$ B と表わされ，2 つの数学的対象 a, b の同等性は $a = b$ と表わされる．

命題の同値性と数学的対象の同等性は異る概念だが，問題としている数学的対象の全体が集合として与えられているときには，数学的対象全体の同等性は，命題の同値性の言葉に翻訳できる．逆に (パラメタを持つ) 命題の同値性は，集合の同等性の言葉に翻訳できる (以下の (2.22) についての議論を参照)．

集合は，何がその要素となっているか，という性質のみに着目して考えられているので，要素の全体が同じになる 2 つ集合は互いに等しい．つまり，

x-1-4-0

(2.20) X と Y を集合とするとき，すべての数学的対象 a について $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ が成り立つなら，$X = Y$ である [*41]．

例 2.5 $\{3,5,7\}$ も $\{5,7,3\}$ も，3 と 5 と 7 をちょうど要素とする集合だから，$\{3,5,7\} = \{5,7,3\}$ である．

部分集合の定義 (18 ページ) を思い出すと，(2.20) (と脚注*41) から，

x-1-4-1

(2.21) 2 つの集合 X, Y が，等しいのは，$X \subseteq Y$ かつ，$Y \subseteq X$ となる，ちょうどそのときである

ことが，分かる．この事実は，2 つの集合が，等しいことを示すときに，頻繁に用いられる．

特に，X も，Y も，同じ集合 Z の部分集合になっているときには，$a \notin Z$ なら，$a \notin X$ かつ $a \notin Y$ だから，このときには，すべての $a \in Z$ について

equal-

*41 互いに等しい数学的対象は同一の性質を持つので，(2.20) の逆は当然成り立ちます．したがって，2 つの (同一であるかもしれない) 集合 X, Y に対し，“すべての数学的対象 a について $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$” であることと，$X = Y$ であることは同値です．

$a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ が成り立つことが，$X = Y$ となること，と同値である．

逆に，Z を，ある集合とするとき，Z の要素のうち，性質 $P(\cdot)$ を持つものの全体を集めてできる集合 $X = \{a \in Z \, : \, P(a)\}$, 同様に，性質 $Q(\cdot)$ を持つものの全体を集めてできる集合 $Y = \{a \in Z \, : \, Q(a)\}$ を考えることができるが，このような集合 X, Y に対しては，

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } a \in Z \text{ に対し，} P(a) \Leftrightarrow Q(a) \tag{2.22}$$ x-1-4-2

が成り立つ．

2.3　関数と写像

X と Y が集合のとき，数学的対象 f が X の各要素 a に対し，Y の要素 b を (a に依存して) 一意に与えるようなものとなっているとき，f は，X から Y への，**写像** (mapping) である，といい，このことを $f : X \to Y$ で表わす[*42]． mapping
$a \in X$ に対し，f が a に対応付ける Y の要素を $f(a)$ と書く．$f : X \to Y$ のとき，X を f の**定義域** (domain) とよび，Y を f の **値域** (co-domain) という．写像 f の定義域が X のとき，f は X の上の写像である，とも言う．f の定義域を，$dom(f)$ で表わす．

「**関数**」(function) という用語も，「写像」と同じ意味で使う [*43] $f : X \to Y$ で $Y \subseteq Y'$ のときには $f : X \to Y'$ でもあることに注意する．f の定義域 $dom(f)$ は f から再構成できるが，値域はそうではない．

$f : X \to Y$ で $S \subseteq X$ のとき，

$$\{f(x) \, : \, x \in S\} = \{y \in Y \, : \, \text{ある } x \in S \text{ に対し } f(x) = y \text{ となる }\}$$

[*42] つまり，$f : X \to Y$ は，“f は X から Y への写像である” という主張の略記と考えます．

[*43] 本巻では，基本的には，「写像」，「関数」は区別なく同じ意味の単語として用いますが，一般には，「関数」 というときには，定義域や値域が数の集合または数の組の集合などの場合が多いようです．「変換」 という用語も，「関数」や，「写像」と殆ど同じ意味で用いられることが多いのですが，「変換」と言ったときには，何らかの幾何学的なアイデアが背後にあることが多いようです．また，「変換」は，文献によっては，それが単射であること (単射についてはすぐ後に述べます) や，定義域と値域が同じ集合となっていることが，暗に仮定されることも多いようです．本巻でも，第 4 章や，第 8 章などでは，定義域と値域が等しい写像を変換とよぶ，という言葉の使い方をすることになり，これらの章での，「変換」という用語の用例は，「ある種の幾何学的なアイデアが背後にある」ようなものになってもいます．

を，S の f による**像** (image) とよぶ．集合 S の関数 f による像は $f(S)$, $f[S]$ などの記号があてられることが多いが，最初のものは，f の値と区別がつきにくく，2 番目のものは，本書では角括弧を行列を表わすのに使うことから，まぎらわしい．そこで，以下では S の関数 f による像を $f''S$ で表わすことにする．この記号は，ゲーデルが [27] で用いているもので，現在の集合論では標準的に用いられている記法である．

すべての $S \subseteq X$ に対し，$f''S \subseteq Y$ である．特に，$S = X$ $(= dom(f))$ としたときの $f''X$ を f の像とよぶ．f の像は $range(f)$ と表わされることもある．$f : dom(f) \to range(f)$ である．

$T \subseteq Y$ に対し，T の f による**逆像** (inverse image) $f^{-1}{}''T$ を，

x-1-4-2-a-0 (2.23) $f^{-1}{}''T := \{x \in X : f(x) \in T\}$

で定義する． 記号 f^{-1} は関数 f の逆写像を表わすために以下で導入されるが (39 ページを参照)，ここでの $f^{-1}{}''\cdot$ はその記法と関連はするが，別物である．特に，集合 $T \subseteq range(f)$ の，f による逆像は，そこでのような f の逆写像が存在しないときにも，常に定義できる．

restriction $f : X \to Y$ で，$S \subseteq X$ のとき，$f \restriction S$ で f の S への**制限** (restriction) を表わす． f の S への制限は, 記号 $f|S$ で表わされることもある．$f \restriction S : S \to Y$ である．$range(f) = f''X \subseteq Y$ だが， $f''X = Y$ のとき，f は Y の**上への写像** (onto mapping) である，f は，**上射**，または，**全射** (surjection) である，ともいう． 英語の表現をそのまま使って，(Y への写像) f は **onto** である，と言うことも多い．

f が X の上の写像で，すべての異る $a, b \in X$ に対し $f(a) \neq f(b)$ となるとき，f は**単射** (injection) である，あるいは，**1 対 1 写像** (1-1 mapping) である，という．ここでも英語の表現をそのまま使って，f は **1-1** (one-to-one) である，という言い方をすることも多い．

$f : X \to Y$ が Y の上への 1 対 1 写像であるとき，f は**全単射** (bijection) である，または，英語の表現をそのまま使って， f は **1-1 onto** である，ともいう．

P-1-0-0 **補題 2.6** X, Y を集合として，$f : X \to Y$ とする．$S, T \subseteq X$ に対し，

(1)　$S \subseteq T \ \Rightarrow\ f''S \subseteq f''T$ が成り立つ．

（2） f が単射なら，$S \subseteq T \iff f''S \subseteq f''T$ が成り立つ．

（3） $f''(S \cap T) \subseteq (f''S) \cap (f''T)$ である．

（4） f が単射なら，$f''(S \cap T) = (f''S) \cap (f''T)$ である．

（5） $(f''S) \cap (f''T) = \emptyset \Rightarrow S \cap T = \emptyset$ が成り立つ．

（6） f が単射なら，$(f''S) \cap (f''T) = \emptyset \iff S \cap T = \emptyset$ が成り立つ．

証明． (1): $S \subseteq T$ $(\subseteq X)$ と仮定する．つまり，(部分集合の定義 (18 ページ) から) すべての $a \in S$ に対し，$a \in T$ となる，とする．

$b \in f''S$ なら，ある $a \in S$ で $f(a) = b$ となるものがあるが，仮定から，$a \in T$ である．したがって，$b \in f''T$ である．したがって，(部分集合の定義から) $f''S \subseteq f''T$ である．

(2): f を単射とする．(1) により，$S \subseteq T \Rightarrow f''S \subseteq f''T$ である．

$S \subseteq T \Leftarrow f''S \subseteq f''T$ を証明するために，その対偶

(2.24) $S \not\subseteq T \Rightarrow f''S \not\subseteq f''T$ x-1-4-2-0

を示す．$S \not\subseteq T$ とすると，(2.13) により，

(2.25) $a \in S$ で x-1-4-3

(2.26) $a \notin T$ x-1-4-4

となるものが存在する．(2.25) により，$f(a) \in f''S$ である．

$f(a) \notin f''T$ である: もし，$f(a) \in f''T$ だったとすれば，$a' \in T$ で $f(a') = f(a)$ となるものが存在するが，(2.26) により，$a \neq a'$ となり，f が単射であることに矛盾である．

したがって，$f(a)$ は，$f''S \not\subseteq f''T$ であることの**例証** (witness)[*44]となっている ((2.13) を参照)．よって，(2.24) が示せた．

(3): $S \cap T \subseteq S, T$ だから，(1) により，$f''(S \cap T) \subseteq f''S, f''T$ である．よって，$f''(S \cap T) \subseteq f''S \cap f''T$ である．

[*44] “... を満たす対象が存在する” という形の主張 (存在命題) A は，この性質 “...” を満たすような対象 o を，実際に与えることができれば，証明できたことになります．このような目的にかなう対象 o を，主張Aの例証とよびます．

(4): f を単射とする．(2.21) を思い出すと，(3) により，$f''(S \cap T) \supseteq (f''S) \cap (f''T)$ が言えればよいことが，分かる．このためには，任意の $b \in (f''S) \cap (f''T)$ に対し，$b \in f''(S \cap T)$ が言えればよい．

$b \in (f''S) \cap (f''T)$ とすると，$b \in f''S$ だから，$a \in S$ で $f(a) = b$ となるものが，取れる．同様に，$b \in f''T$ だから $a' \in T$ で $f(a') = b$ となるものが，取れるが，f は単射だから，$a = a'$ で，したがって，$a \in S \cap T$ である．このことから，$b \in f''(S \cap T)$ が，分かる．

(5): 対偶を示す．$S \cap T \neq \emptyset$ とすると，$a \in S \cap T$ が，取れるが，

$$f(a) \in f''(S \cap T) \underbrace{\subseteq}_{\text{(3) による}} f''S \cap f''T$$

だから，$f(a) \in (f''S) \cap (f''T)$ となり，$(f''S) \cap (f''T) \neq \emptyset$ である．

(6): f を単射とする．(5) により，“$(f''S) \cap (f''T) = \emptyset \;\Rightarrow\; S \cap T = \emptyset$” は成り立つことが既に言えているので，“$S \cap T = \emptyset \;\Rightarrow\; (f''S) \cap (f''T) = \emptyset$” が言えればよい．

f を単射としたので，(4) により，$(f''S) \cap (f''T) = f''(S \cap T)$ が成り立つが，$S \cap T = \emptyset$ なら，$f''(S \cap T) = \emptyset$ だから，$(f''S) \cap (f''T) = \emptyset$ である．

❏ (補題 2.6)

Exer-1-1 **演習問題 2.7** 補題 2.6, (2), (4), (6) で f が単射でないときには，そこでの同値性に対する反例[*45]があることを示せ．

「X の各要素 a に対し，Y の要素 b を (a に依存して) 一意に与えるような数学的対象としての写像 f 」は．もう少し具体的に指定されていた方が扱いやすい．このために，f が X から Y への写像である，ということを，X と Y

[*45] “(*) すべての性質 P を満たす対象 o に対し，Q が成り立つ” という形の主張が正しくないことを示すには，性質 P を持たない対象 o^* で，Q も満たさないものを具体的に与える，という方針が考えられます．このような o^* のことを，この主張 (*) の**反例** (counter-example) とよびます．(*) のタイプの主張が正しくないときには，そのことを示す具体的な反例が見つかることが多いのですが，近代以降の数学では，例えば，背理法を用いて，反例がないとすると矛盾する，ということを示すことで，(*) のタイプの命題が成り立たないことは証明できるが，具体的な反例は見つからない，という状況が起ることもたまにあります．もちろん，ここでの演習問題では，単純な反例がすぐに見つかります．

の要素の順序対 [*46] の全体 (X と Y の**デカルト積** (Cartesian product))[*47]

(2.27)　$X \times Y := \{\langle x, y\rangle : x \in X,\ y \in Y\}$　x-1-5

の部分集合 $f \subseteq X \times Y$ で,

(2.28)　すべての $x \in X$ に対し，$\langle x, y\rangle \in f$ となるような $y \in Y$ が，ちょうど 1 つ存在するようなもの　x-1-6

として定義しなおす．$f \subseteq X \times Y$ が (2.28) を満たすとき，このことを $f : X \to Y$ と略記する．$a \in X$ のとき，(2.28) により,

(2.29)　$\langle a, b\rangle \in f$ となる，$b \in Y$ が，一意に決まるが，このような b を $f(a)$ と表わす．　x-1-6-0

写像をこのように導入すると，写像の次の性質は，集合が，その要素のすべてによって決まること (2.20) の特別な場合，として示せることになる [*48].

補題 2.8 任意の集合 X, Y と $f : X \to Y$ $g : X \to Y$ に対し,　P-1-1

$$f = g \iff \text{すべての } a \in X \text{ に対し，} f(a) = g(a).$$

[*46] 数学的対象 a, b の**順序対** (ordered pair) $\langle a, b\rangle$ とは，a が一番目で b が二番目のもの，という順序の情報を含めた a と b の組のことです．a と b を要素とする集合 $\{a, b\}$ では，$\{a, b\} = \{b, a\}$ なので，順序の情報は，集合 $\{a, b\}$ からは抜け落ちてしまいます．そのため，これを順序対の定義として使うことはできません．$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ と定義すると，任意の a, a', b, b' に対して $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle \iff (a = a'$ かつ $b = b')$ となることが示せるので (演習!)，現在では，通常，これが順序対の定義として採用されます (この順序対の定義は，クラトフスキー (Kazimierz Kuratowski, 1896 (明治 29 年)〜1980 (昭和 55 年)) の 1921 (大正 10 年) の論文で導入されているものです).

[*47] (2.27) で定義される $X \times Y$ は，X と Y の**直積** (direct product) とよばれることもあります．デカルト積という名称は，(現代の言葉に翻訳すると) 実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ と，それ自身の直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (これを $\mathbb{R}^2$ と表記することもあります) を，幾何学での平面の表現と捉える，というデカルトが 1637 年 (寛永 14 年) の [8] で導入したアイデアに由来します．なお，フェルマー (フェルマーの定理のフェルマーです) も，ほぼ同時に同様のアイデアに到達していて，フェルマーは更に 3 次元空間を $\mathbb{R}$ $(= (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ または $= \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ — これらが同一視できることは後で見ることになります) で表現する，というアイデアも打ち出しています．フェルマーは，このアイデアを，生前には発表していないのですが，デカルトが，[8] の執筆より前に，フェルマーの草稿からこのアイデアを学んでいた，という説もあるようです (たとえば，ブリタニカの，フェルマーの項には，そのような説明があります).

[*48] “特別な場合” という表現については，脚注*12 を参照してください．

証明. $f = g$ とすると，任意の $a \in X$ に対し，写像の値の定義 (2.29) から $\langle a, f(a)\rangle \in f$ だから，$\langle a, f(a)\rangle \in g$ である．したがって，ふたたび写像の値の定義から，$g(a) = f(a)$ が，分かる．

$f \neq g$ とすると，(2.21) から，$f \not\subseteq g$ か $g \not\subseteq f$ のうち少なくとも片方が成り立つ．$f \not\subseteq g$ が成り立つとすると，$u \in f$ で $u \notin g$ となるものが存在する．f は X から Y への写像だから，$a \in X, b \in Y$ で $u = \langle a, b\rangle$ となるものが存在する．関数の値の定義 (2.29) から，$b = f(a)$ である．一方，g も X から Y への関数だから，ある $b' \in Y$ で $\langle a, b'\rangle \in g$ となるものが存在して $g(a) = b'$ となるが，$\langle a, b\rangle \notin g$ により，$b' \neq b$ である．したがって，$f(a) \neq g(a)$ である．

$g \not\subseteq f$ の場合にも同様に $f(a) \neq g(a)$ となる $a \in X$ の存在が示せる．

□ (補題 2.8)

$f : X \to Y$ で $S \subseteq X$ のとき $f \restriction S$ で f の集合 S への制限を表わすのだったが (32 ページ)，これは，集合としての関数，という捉え方に翻訳すると，

x-1-4-2-a
$$(2.30)\quad f \restriction S = f \cap (S \times Y) = \{\langle x, y\rangle \in f \ : \ x \in S\}$$

である．

写像は, 対応の規則を与えることによって導入することができる．例えば, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}$ の要素 $a+1$ を対応させる写像を f として導入したいとき, このような写像 f の導入を, “$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $a \mapsto a+1$ とする” として表わす．(2.28) の意味では，この写像は，集合 $f = \{\langle a, a+1\rangle \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ である．いくつかの写像は場合分けによって導入される．例えば，$sgn : \mathbb{N} \to \{1, -1\}$ を，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

x-1-7
$$(2.31)\quad sgn(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ が偶数のとき}; \\ -1, & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

として定義する [*49]．(2.28) の意味では，この写像は，集合

$$sgn = \{\langle 2n, 1\rangle \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ \cup \ \{\langle 2n-1, -1\rangle \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

[*49] ここで定義した写像 sgn は自然数 n の**偶奇性** (signature) を与えるもので，実際に，後で用いられることになるものです．

である．

$b^* \in Y$ のとき [*50]，$c_{b^*} : X \to Y;\, a \mapsto b^*$ という写像 (これは (2.28) の意味では，集合 $c_{b^*} = \{\langle a, b^* \rangle : a \in X\}$ である) を**定値写像** (constant mapping) あるいは **定数関数** (constant function) とよぶ． b^* に明示的に言及したいときには，値 b^* を取る定値写像 (または定数関数) と言うことにする．

演習問題 2.9 $b^* \in Y$ のとき，値 b^* を取る定値写像 $c_{b^*} : X \to Y$ は，一般には，単射でも，上射でもないことを示せ．c_{b^*} が単射となるのはどんなときか？ また，c_{b^*} が上射となるのは，どんなときか？ ❏

$X = Y$ のとき，$id_X : X \to X;\ a \mapsto a$ を X 上の**恒等写像** (identity mapping) または，**恒等関数** (identity function) とよぶ． $id_X = \{\langle a, a \rangle : a \in X\}$ である．id_X は全単射である．

集合 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して，f と g の**合成写像** (composition) (または，**構成関数**) $g \circ f$ を，

(2.32)　$g \circ f : X \to Z;\, a \mapsto g(f(a))$ 　x-1-8

で定義する．

関数の間の演算としての，関数の合成と，数の間の演算としての，数の掛け算との間には，いくつかの類似性が見出せる．両方とも結合律を満たし，単位元を持つ [*51]:

[*50] 本書では，ある数学的対象をローカルに固定して表わすときに，それを，上付きの * や ** をつけたアルファベットで表わす，という記号の使い方をすることがよくあります．これは，本書の著者が，シェラハ (Saharon Shelah) 先生から踏襲した記号法の一つです．

[*51] 後で再び，議論することになりますが，ある二項演算 — 2 つの対象を，1 つの対象に対応付けるような演算．例えば，そのような演算を $\otimes$ で表わすことにする — に関して，e が単位元である，とは，すべての (この演算の範囲にある) a に対して $a \otimes e = a$ かつ $e \otimes a = a$ が成り立つことです．この演算が**結合律** (associativity) を満たすとは，すべての (この演算の範囲にある) a, b, c に対して $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ が成り立つことです．多くの自然な二項演算は結合律を満たしますが，これは，いつでも成り立つ法則ではありません．例えば，数の引き算や，割り算は，結合律を満たさない演算です: $(4\,/\,3)\,/\,2 = \frac{2}{3} \neq \frac{8}{3} = 4\,/\,(3\,/\,2)$, $(4-3)-2 = -1 \neq 3 = 4-(3-2)$ など．これらの演算が結合律を満たさない，という事実の見落としは，小学生や中学生が犯す計算間違いの，原因の一定の割合を占めているのではないかと思います．

P-1-1-0 **補題 2.10** （1） 関数の合成は結合律を満たす．つまり，任意の集合 X, Y, Z, U と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$ に対し，等式 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ．

（2） すべての $f : X \to Y$ に対し，$id_Y \circ f = f$ かつ $f \circ id_X = f$ である．

証明． (1): $h \circ g : Y \to U$, $g \circ f : X \to Z$ だから，合成 $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)$ は意味をなすものになっており，共に X から U への写像である．したがって，補題 2.8 により，すべての $a \in X$ に対し $\Big((h \circ g) \circ f\Big)(a) = \Big(h \circ (g \circ f)\Big)(a)$ が成り立つことを示せばよい．これは，

$$\begin{aligned}\Big((h \circ g) \circ f\Big)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h\Big((g \circ f)(a)\Big) \\ &= \Big(h \circ (g \circ f)\Big)(a)\end{aligned}$$

だからよい．

(2): すべての $a \in X$ に対し，$(id_Y \circ f)(a) = id_Y(f(a)) = f(a)$ かつ $(f \circ id_X)(a) = f(id_X(a)) = f(a)$ だから，補題 2.8 により，$id_Y \circ f = f$ かつ $f \circ id_X = f$ である．　□ (補題 2.10)

P-1-2 **補題 2.11** 集合 X, Y, Z, と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とする．

（1） $g \circ f$ が，単射なら，f は，単射である．

（2） $g \circ f$ が，上射なら，g は，上射である．

（3） f と g が，共に単射なら $g \circ f$ も，単射である．

（4） f と g が，共に上射なら，$g \circ f$ も，上射である．

（5） f と g が，共に全単射なら，$g \circ f$ も，全単射である．

（6） $g \circ f$ が，全単射なら，f は，単射で，g は，上射である．

証明． (1): 対偶命題を示す．f が単射でないとすると，a, $a' \in X$, $a \neq a'$ で，$f(a) = f(a')$ となるものが存在する．このとき $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$ である．したがって $g \circ f$ は単射でなない．

(2): $g \circ f$ が上射なら，すべての $c \in Z$ に対し，$a \in X$ で，$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$ となるものがある．$b = f(a)$ $(\in Y)$ とすれば，$g(b) = c$ である．したがって，g は上射である．

(3): $a, a' \in X$ を $a \neq a'$ となるものとする．仮定により，f は単射だから，$f(a) \neq f(a')$ である．したがって，g も，単射だから，$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \neq g(f(a')) = (g \circ f)(a')$ である．よって，$g \circ f$ も，単射であることが，分かる．

(4): $c \in Z$ とすると，g は上射だから，$b \in Y$ で，$g(b) = c$ となるものがある， f も上射だから，$a \in X$ で，$f(a) = b$ となるものがあるが，$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ である．したがって，$g \circ f$ も，上射であることが，分かる．

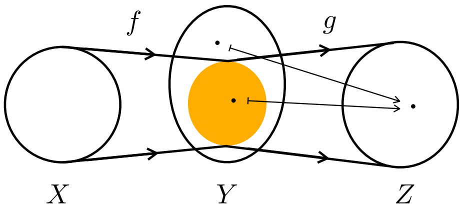
(5): (3) と (4) により，よい．

(6): (1) と (2) により，よい． □ (補題 2.11)

演習問題 2.12 （1）補題 2.11, (1) で，g は，必ずしも単射にならない．

（2） 補題 2.11, (2) で，f は，必ずしも上射とならない．

（3） 補題 2.11, (6) で，f も，g も，必ずしも全単射とはならない．



□

♦ figur2-01.pdf

inverse-function

$f : X \to Y$ が全単射のときには，各 $b \in Y$ に対し，$f(a) = b$ となるような a が，ちょうど 1 つ定まるから，このような a を，各 $b \in Y$ に対応させるような写像 $g : Y \to X$ を，取ることができる．このような g を，f の**逆写像** (inverse) とよび f^{-1} で表わす．

$f : X \to Y$ の逆写像 f^{-1} が存在するときには，$T \subseteq Y$ に対し，Y の写像 f^{-1} による像 $f^{-1}{}''T$ と，(2.23) の意味での，T の f による逆像 (これも $f^{-1}{}''T$ と表わすことにしたのだった) は，一致する．

補題 2.13 （1）$f : X \to Y$ が全単射のとき，f の逆写像 f^{-1} も全単射で，$(f^{-1})^{-1} = f$ である． P-1-3

（2） $f : X \to Y$ が全単射のとき，$f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$ が成り立つ．

（3） $f : X \to Y$ が上射のとき，$g : Y \to X$ が，$g \circ f = id_X$ を満たせば，g は f の逆写像である．

（4） $f : X \to Y$ が単射のとき，$g : Y \to X$ が，$f \circ g = id_Y$ を満たせば，g は f の逆写像である．

（5） $f : X \to Y$ に対し，$g : Y \to X$, $g' : Y \to X$ で，$g \circ f = id_X$, $f \circ g' = id_Y$ となるものが存在すれば，f は全単射で，$g = g' = f^{-1}$ である．

証明． (1): $b, b' \in Y, b \neq b'$ として，$f(a) = b$, $f(a') = b'$ となる $a, a' \in X$ を取ると，$f^{-1}(b) = a$, $f^{-1}(b') = a'$ となるが，明らかに $a \neq a'$ である: もし，$a = a'$ なら $b = f(a) = f(a') = b'$ となってしまい矛盾である． したがって，f^{-1} は，単射であることが，分かる．任意の $a \in X$ に対し，$b = f(a)$ とすれば，$f^{-1}(b) = a$ だから，f^{-1} は，上射である．以上から f^{-1} は全単射であることが，分った．

f^{-1} が全単射であることから，f^{-1} の逆関数 $(f^{-1})^{-1}$ が存在するが，任意の $a \in X$, $b \in Y$ に対し，$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow (f^{-1})^{-1}(a) = b$ である．したがって，補題 2.8 により，$f = (f^{-1})^{-1}$ である．

(2): 任意の $a \in X$ 対して, $f(a) = b$ なら $f^{-1}(b) = a$ だから, $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ である．したがって, 補題 2.8 により, $f^{-1} \circ f = id_X$ である．$f \circ f^{-1} = id_Y$ も同様に示せる．

(3): id_X は単射だから，$g \circ f = id_X$ により，補題 2.11, (1) から f は単射である．したがって，仮定から f は全単射だから，f の逆写像 f^{-1} が存在する．ここで，

$$f^{-1} = id_X \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} \underbrace{=}_{\text{補題 2.10, (1) による}} g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ id_Y = g$$

である．

(4): id_Y は上射だから，$f \circ g = id_Y$ により，補題 2.11, (2) から，f は上射である．したがって，仮定から f は全単射だから，(3) と同様に，$f^{-1} = g$ が示せる．

(5): id_X, id_Y が全単射であることから，仮定と，補題 2.11, (1), (2) により，f は全単射である．したがって，上の （3），（4）から，$g = f^{-1} = g'$ であ

る．　□ (補題 2.13)

上の補題 2.13, (3), (4) では，f が全単射となることが証明の要となっていたが，これが保証されないときには，これらの命題は成立しない．

演習問題 2.14　(1) $f : X \to X$ と $g : X \to X$ が $g \circ f = id_X$ を満たしても，必ずしも $g = f^{-1}$ とはならない．　Exs-1-0

(2)　X が有限なときには，$f : X \to X$, $g : X \to X$ に対し，$g \circ f = id_X$ か $f \circ g = id_X$ のどちらかが成り立つなら，$g = f^{-1}$ である．

(3)　X が有限なときには, $Y \subseteq X$ が $\#(Y) = \#(X)$ を満たすなら, $X = Y$ である．特に，X が有限なときには，$f : X \to X$ が単射なら，f は全単射である．同様に，X が有限なときには，$f : X \to X$ が上射なら，f は全単射である．

ヒント． (1): 反例を具体的に与えることで示せる (「反例」という表現については，脚注*45 を参照)．次の (2) により，反例での X は，無限集合でなくてはならないので，例えば，$X = \mathbb{N}$ となる反例がとれないか，を考えてみる．

(2): 集合 X が**有限** (finite) とは，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\overline{n} = \{1, ..., n\}$ から X への全単射が存在することである[*52]．X が有限のときには，このような n は一意に決まるので，この n のことを X の**サイズ** (size) あるいは，X の**要素の個数** (cardinality) とよび，$\#(X)$ で表わす．

f と g が全単射になることが示せれば，証明の残りは，補題 2.13, (2), (3) のようにして示せる．したがって，ここでの f と g の条件のもとで，有限な X に対して，f と g が常に全単射であることが示せればよいが，このことを，X の要素の個数に関する累積的帰納法で示す．

(3): 最初の主張は，$\#(X)$ に関する帰納法で示せる．$f : X \to X$ が単射なら，$\#(X) = \#(f''X)$ で，$f''X \subseteq X$ だら，最初の主張から，$f''X = X$ となり，f は全単射である．

[*52] X が有限集合である (つまり $n \in \mathbb{N}$ で $\overline{n}$ から X への全単射が存在する)，という主張は，(a) ある $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\overline{m}$ から X への上射が存在する，(b) ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，X から $\overline{\ell}$ への単射が存在する，という命題の，どちらとも同値になります．この同値性は，これらの命題に出てくる ℓ, m に関する帰納法による証明で示すことができます (演習!)．

$f : X \to X$ が上射として，もし f が単射でなかったとすれば，異る a, $b \in X$ で，$f(a) = f(b)$ となるものが存在する．このとき，$g : X \to X$ で，$f \circ g = id_X$ かつ，$a \notin g''X$ となるものが，取れるが，補題 2.11, (1) により g は単射だから，これは上で示したことに矛盾である． □ (演習問題 2.14)

補題 7.71 では，線型写像が，演習問題 2.14, (2) と類似の性質を満たすことを示すが，そこでは，演習問題 2.14, (2) での，集合 X の有限性が，線型空間の有限次元性で置き換えられることになる [*53].

我々は，後で，多変数の写像を考えることもあるが，これは，集合のデカルト積の上の (一変数の) 写像の略記として理解することができる: 集合 X, Y と $n \in \mathbb{N}$ に対し，X から，Y への，n-変数写像とは，X^n $(= \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ 個}})$ から，Y への，写像のこととする．

$f : X^n \to Y$ のとき，$a_1, \ldots, a_n \in X$ として，$f(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$ を，$f(a_1, \ldots, a_n)$ と書くことにする．

古典的な数学で，現代的な関数の概念が確立される前に既に考察されていた関数や，代数演算として現れる関数の中には，上で導入した記法とは異る表記の定着しているものも少なくない． 第 2.1 節で考察した数の体系での足し算や掛け算など，二項演算に対する記法は，そのような例の一つである．例えば，$\mathbb{R}$ の足し算 $+$ は，写像 $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ であるが，$r, s \in \mathbb{R}$ に対する $+$ の適用は，通常，(2.29) での $+(\langle r, s \rangle)$ (あるいは，上のパラグラフでのように $+(r, s)$) という書き方でなく，二項演算の記法 $r + s$ が用いられる．

2.4　和と積の記法と，いくつかの数学的証明の例

ex-proofs

第 1 章でも既に出てきたように，ある集合 I の要素を添字の集合として使って，複数の数学的対象を，例えば a_i, $i \in I$ のように並べあげる必要が出てくることがある．添字の集合としては，ある自然数 n に対する，集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ が用いられることが多い，既に，脚注*6 でも述べたように，本書では，この集合を，$\overline{n}$ と表わすことにする．

---

*53 線型空間，次元の概念については，第 7.2 節を参照してください．線型写像の一般論は，第 7.4.1 節で議論することになります．

(2.33)　$\overline{n} := \{1, 2, ..., n\}$　x-1-9

である．例えば，$\overline{1} = \{1\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$, $\overline{3} = \{1, 2, 3\}$ 等々．しかし，添字の集合 I は必ずしもこの形をしていなくてもよい．$I = \overline{n}$ では，I の要素間に，自然な大小関係が，定義されていることに注意する [*54]．

並べあげ a_i, $i \in I$ を 1 つの対象として見る見方を強調したいときには，これを，例えば，$\vec{a} = \langle a_i : i \in I \rangle$ と書くことにする [*55]．このような並べあげを**列** (れつ，sequence) とよぶ．これは行列の “列” (column) とは別の概念だが，行列の列は，ここでの意味での列である，と考えることもできなくもない [*56]．　sequence

$I = \overline{n}$ のときには，列 $\langle a_i : i \in I \rangle$ を $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ とも表わすことにする．特にこのような $\langle a_i : i \in I \rangle$ が具体的に与えられているとき，例えば $I = \overline{5}$ で，$a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 8$, $a_5 = 2$ のときには，これを $\langle 4, 3, 3, 8, 2 \rangle$ とも書く．

集合としては，各々の列は，添字の集合からある集合 X への写像のことである，と考えるが，可読性のために，列の記法 $\langle a_i : i \in I \rangle$ も保持する．つまり，列 $\vec{a} = \langle a_i : i \in I \rangle$ の実体は，関数 $\vec{a} : I \to \{a_i : i \in I\}; i \mapsto a_i$ である．

列 $\langle a_i : i \in I \rangle$ に現れる，各 a_i を，この列の**成分** (component) と呼ぶことにする．列の成分には，重複があってもよいことに注意する．例えば:

例 2.15 $I = \overline{5}$ として，$a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$ とするとき $\langle a_i : i \in \overline{5} \rangle$ は，2, 3, 2, 2, 4 という並びで，2 が重複して現れる列 $\langle 2, 3, 2, 2, 4 \rangle$ である．写像の定義から，この列 $\langle a_i : i \in \overline{5} \rangle$ の (集合としての) 実体は，$\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$ である．　❏　ex-1-3

列 $\vec{a} = \langle a_i : i \in I \rangle$ に対し，$\vec{a}$ の成分として現れる対象を集めた集合 (つまり

[*54] ここでの，“自然な’ ’ という形容詞は，“標準的な” と訳されることもある，英語での “canonical” に対応する用語として，用いられています．数学では，この用語は，“数学的文脈から自然に起想できる” というような意味で使われます．例えば，ここで，“$I = \overline{n}$ では，I の要素間に，自然な大小関係が，定義されている” と言っているのは，$i, i' \in \overline{n}$ は，通常の (標準的な) 数の大小関係で，比較することができ，この大小関係にそった，議論が屡々行なわれることになる，ということが，その指摘するところです．

[*55] 上付きの矢印を持つアルファベットで，ベクトルを表わすことも少なくないのですが，本書では，ベクトルは小文字の板書字体の $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ etc. で表わし，上付き矢印を持つアルファベットは，列を表わすことにします．

[*56] (4.2) に続くパラグラフを参照．

関数 $\vec{a}$ の像) $range(\vec{a}) = \{a_i : i \in I\}$ が考えられるが，$range(\vec{a})$ では，$\vec{a}$ 成分の添字の集合上の順序に起因する順序や重複の情報は，欠落してしまう．上の例 2.15 での $\vec{a} = \langle a_i : i \in \overline{5} \rangle$ では，$range(\vec{a}) = \{2, 3, 4\}$ である．

列 $\vec{a} = \langle a_i : i \in I \rangle$ の成分が，すべて数で，添字の集合 I が，有限のとき，例えば，$I = \{i_1, ..., i_n\}$ と，I を，重複なしに枚挙したとき [*57]，数 a_i, $i \in I$ の和 $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$ を，$\sum_{i \in I} a_i$ で表わす [*58].

x-1-10

$$\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} \tag{2.34}$$

である．数の和の演算は，結合律と可換性を満たすので [*59]，(2.34) の右辺の和の順序や，和の演算の優先順位は，この和の値に影響しない [*60] ことに注意する．一般性のため，この記法は I が空集合のとき，あるいは，I が，singleton のとき (つまり，ただ一つの要素からなるとき) にも有効とする: $I = \emptyset$ のときには，$\sum_{i \in I} a_1 := 0$ とし，$I = \{i_0\}$ のときには，$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_0}$ とする．

$I = \overline{n}$ $(= \{1, ..., n\})$ のときには，$\sum_{i \in \overline{n}} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ だが，これは，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ と表わされることも，多い．S が，数を要素とする有限集合のときには，S を $S = \{k_1, ..., k_n\}$ と重複なしに枚挙したときの $\sum_{i=1}^{n} k_i$ を，$\sum S$ とも書くことにする．

数の積に関しても，同様の記法を導入する．列 $\vec{a} = \langle a_i : i \in I \rangle$ の成分が，すべて数で，添字の集合 I が有限のとき，例えば，$I = \{i_1, ..., i_n\}$ と，I を，重複なしに枚挙したとき，数 a_i, $i \in I$ の積 $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \cdots \cdot a_{i_n}$ を，$\prod_{i \in I} a_i$ と表

---

*57 「枚挙 (まいきょ) する」とは，「(重複を許して，全部) 並べあげる」(enumerate) という意味です．

*58 “$\sum$” はギリシャ文字の大文字のシグマで，ローマ字の s に相当する文字ですが，これは，和を表わすラテン語の summa の頭文字から来ている記号の選択でしょう．この数学記号は，オイラー (Leonhard Euler, 1707(宝永 4 年)〜1783(天明 3 年)) が，18 世紀の半ばに導入したもののようです．

*59 数の和の結合律と可換性については，(2.41) と (2.44) を参照してください．

*60 和の演算の優先順位が値に影響しない，というのは，$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$ は，例えば，$a_{i_1} + (a_{i_2} + \cdots + a_{i_n})$ のこと，と思っても，$(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_{n-1}}) + a_{i_n}$ のこと，と思ってもよい (どれも同じ値になる)，ということです．

わす[*61].

$$\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \cdots \cdot a_{i_n} \tag{2.35}$$ x-1-11

である．数の積も，結合律を満たし，可換性を持つので，(2.35) の値は，添字の集合 I の重複なしの枚挙 $\{i_1, ..., i_n\}$ にも，積算の適用の優先順位にも依存しない[*62]．ここでも I が空集合のとき，あるいは，I が singleton のときにも，積の定理が自然に拡張されるよう，$I = \emptyset$ なら $\prod_{i \in I} a_i = 1$ とし，$I = \{i_0\}$ なら，$\prod_{i \in I} a_i = a_{i_0}$ とする．

$\prod_{i=1}^{n} k_i$ や $\prod S$ という書き方も，和の記号のときと同様に，用いる．

最後に，数学的証明の例の幾つかを見て，この小節を終える．以下の例は，どれも，初等算術での，素数に関する命題の証明である．これらの命題は，第 I 巻で議論される，これ以降の内容と直接の関連を持つことはないが[*63]，数学的証明のパターンと，上で導入した和と積の記号の使い方を確認するための，良い例になっていると言えるし，これらの命題も，それら自身としてたいへんに興味深いものである，と言えるだろう．

$p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ が，**素数** (prime number) である，とは，p が，1 と p 自身以外の，どの自然数でも，割切れないことである．2, 3, 5, 7, 11, 13 は，素数である．これに対し，$4 = 2 \times 2$ は，素数でないし，$6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $12 = 2 \times 2 \times 3$ も，すべて素数でない．

次の補題は，累積的帰納法により，証明できる．

---

*61 ‘$\prod$’ は，ギリシャ文字の大文字のパイで，ローマ字の p に相当する文字ですが，これも，積を表わすラテン語の，productum の頭文字から来ている記号の選択でしょう．この数学記号は，ガウス (Carl Friedrich Gauß, 1777(安永 6 年)〜1855(安政 2 年)) が，19 世紀の初めに導入したもののようです．なお，記号 “$\sum$” でも，“$\prod$” でも，出典として，ラテン語の単語を参照しているのは，オイラーもガウスも数学の論文はラテン語で書いているからです．

*62 ここでの「積算の適用の優先順位」と言いう表現については，脚注*10 を参照してください．

*63 ただし，これらの議論は，第 II 巻で多項式の一般論の展開では，参照されることになります．

♦ 第 II 巻の内容への reference あり．

P-1-3-0 **補題 2.16** すべての数 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ は，素数の列の積，として表わせる[*64].

証明． 累積的帰納法により示す．

x-1-12 $(2.36)_k$　すべての $n < k$ に対し，$n > 1$ なら，n は，素数の列の積として表わせる

を仮定して，

x-1-13 (2.37)　$k > 1$ なら，k は，素数の列の積として表わせる

ことを示す．累積的帰納法により，このことから，すべての k に対して，(2.37) が，成り立つことが，従う．

$k = 1$ なら (2.37) は，無内容的に成り立つ．k が，素数なら，(2.37) は，自明に成り立つ[*65]．$1 < k$ で，k が，素数でないなら[*66]，1 と異る数 n_1, n_2 で，$k = n_1 n_2$ となるものが，取れる．このとき $1 < n_1, n_2 < k$ だから，仮定 $(2.36)_k$ により，素数の列 $p_1, \ldots, p_{\ell_1}, q_1, \ldots, q_{\ell_2}$ で，$n_1 = \prod_{i=1}^{\ell_1} p_i$，$n_2 = \prod_{i=1}^{\ell_2} q_i$ となるものが，取れる．したがって，$k = \prod_{i=1}^{\ell_1} p_i \cdot \prod_{i=1}^{\ell_2} q_i = \prod_{i=1}^{\ell_1+\ell_2} r_i$ である．た

[*64] ここで，明示的に「素数の列の積」と言っているのは，この素数の積は重複を含んでよい，ということを強調するためです．例えば，$24750 = 2 \times 3^2 \times 5^3 \times 11$ がこのような素数の列の積の例です (この場合の素数の列は，例えば，$\langle 2, 3, 3, 5, 5, 5, 11 \rangle$ としてとれます).

[*65] “自明 (じめい) である” とは，なぜそうなのかという説明が必要ないくらい明らかである，という意味です．ここでの主張が自明なのは，k が素数なら，k を成分とする長さが 1 の素数の列について，その列の積が k になることから (2.37) が成り立つ，ということが直ちに分かるからですが，このように書き出してみると，自明と思っていたのに，説明は結構長くなってしまうこともあるし，ひょっとしたらこれを自明と思わない人もいるかもしれない，という不安がよぎったりもします．読者の立場からは，“... は自明である” と書かれていても，それをうのみにして，何も考えずに先に進んでしまったりせず，なぜそれが自明なのかを考えてみるべきです．

[*66] ここでは，$k = 1$ の場合，$k > 1$ で k が，素数の場合，$k > 1$ で k が，素数でない場合，の 3 つの場合の**場合分け** (proof by exhaustion, proof by cases) で証明を行なっていることに注意してください．この 3 つの場合への場合分けが，成立するのは，

> すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，$k = 1$ であるか，k が，素数であるか，または，$k > 1$ で k が，素数でないかの，いずれかである

が成り立っているからです．これは自明に思えるかもしれませんが，(もっと複雑な) 場合わけによる証明で，すべての場合が網羅されていないために証明が破綻してしまう，というのは，数学の専門家でも犯しがちな，証明ミスのパターンの一つなので，注意が必要です．

だし，

$$r_i = \begin{cases} p_i, & 1 \le i \le \ell_1 \text{ のとき;} \\ q_{i-\ell_1}, & \ell_1 < i \le \ell_1 + \ell_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．したがって，このときにも，(2.37) が成り立つ [*67]． □ (補題 2.16)

次の定理の証明は，背理法による証明の典型的なものの一つである．この証明は，ユークリッドの原論にあるもので，したがって，少なくとも，今から2300 年ほど前には知られていた証明である． ♦ Euclid を文献表に入れる

定理 2.17 素数は無限に存在する． P-1-4

証明． 素数が有限個しかなかったとして矛盾を導く．S を有限個の素数のすべてからなる集合とする．このとき $q = (\prod S) + 1$ とすると，q は S のどの要素でも割切れない ($p \in S$ とすると，p は $\prod S$ を割切るので，q を p で割った余りは 1 となる)．したがって，補題 2.16 により q を素数の積として表わすと，その積に現れる素数は S のどの要素とも異る．これは S の取り方に矛盾である． □ (定理 2.17)

定理 2.18 (ベルトランの仮説 (Bertrand's Postulate)，または，**チェビシェフの定理** (Chebyshev's Theorem) [*68]**)** P-1-5
すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し，$n < p < 2n$ を満たす素数が存在する． □

この定理のエルデシュによる初等的な証明は，[1] で見ることができる [*69]．

---

*67 ここでは，説明のために，明示的に，列 $\langle r_i : i \in \overline{\ell_1 + \ell_2} \rangle$ の構成を書き出していますが，2 つの列を**繋げて** (concatenate)，1 つの列にする，という操作は，様々な場所で必要になり，その際に，構成の細部の説明が省かれることも，少なくありません．

*68 フランスの数学者ベルトラン (Joseph Bertrand, 1822(文政 5 年)∼1900(明治 33 年)) は，1845 年に，この命題の予想を，発表しています．この予想は，ロシアの数学者チェビシェフ (Pafnuty Chebyshev, 1821(文政 4 年)∼1894(明治 27 年)，統計学でのチェビシェフの補題の，チェビシェフです) によって，1852 年 (嘉永 5 年) の論文で証明されています．

*69 エルデシュ (Paul Erdős, 1913(大正 2 年)∼1996(平成 8 年)) は，20 世紀の数学を代表する数学者の一人です．[1] に載っている，チェビシェフの定理のエルデシュによる証明は，彼が 19 才のときに得たもので，エルデシュの最初の論文として発表されたものです． Erdos
　この証明は，
　　https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_of_Bertrand's_postulate
でも見ることができます．

この証明は，そこで使われる数学的事実や推論の一つ一つは高校数学の範囲でカバーできるものだが，全体としては，ここで再現するにはいささか重いので，それを述べる代りに，定理 2.18 が，ゴルトバッハ予想として知られている未解決問題の肯定的な解が得られたことを仮定すると，それから非常に簡単に得られることを示してみる．

ゴルトバッハ予想 (Goldbach Conjecture)**:**
すべての 2 より真に大きな偶数は，すべて 2 つの素数の和として表わせる．

$n = 2, 3, 4, 5$ に対する $2n$ で, この予想をチェックしてみると, $2\times 2 = 2+2$, $2 \times 3 = 3+3$,　$2 \times 4 = 3+5$,　$2 \times 5 = 3+7 = 5+5$ となり，これらの $2n$ での，主張の正しさが確認できる．しらみつぶし式の確認としては，分散コンピュータシステムを使って，すべての $n \leq 4 \times 10^{18}$ について，$2n$ で，ゴルトバッハ予想の主張が，成り立つことが，確認されている，ということである ([60])．しかし，このことと，“すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対する $2n$ で，...” という形の主張の間に横たわるギャップは，依然として “無限” である．この予想が未解決，ということの意味は，反例が見付かっていないし (反例が見つかったとしたら，それは，予想を否定する命題の証明が得られた，ということである)，予想の (“すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対する $2n$ で ...” という一般形での) 主張の証明も，見つかっていない，ということである．

次に，ゴルトバッハ予想が，成り立つと仮定して，その仮定から，ベルトラン仮説が，簡単に証明できることを，見ることにする．これは，ゴルトバッハ予想の意味や意義を評価するための思考実験の一部，とみることができるが，この予想が証明された暁には，ベルトラン仮説の (愉快な?) 別証を与えることになるもの，でもある．以下の証明は，帰納法によるものではないことに，注意する [*70]．

Goldbach-Bertrand

ベルトラン仮説 (定理 2.18) のゴルトバッハ予想からの証明: ゴルトバッハ

*70 帰納法による証明，というおまじないを繰り返し聞いていると，自然数にかかわる命題の証明は，すべて帰納法で証明するしかない，と思い込んでしまう人もあるようです．しかし，実際には，自然数にかかわる命題の証明のあるものは，(少なくとも直接的には) 帰納法を用いる必要のないものも多くありますし，帰納法に固執して簡単な証明が思いつかない，という思考のブロックが生じることも，あり得ます．

予想が，成り立つことを，仮定する．$n > 1$ とする．ゴルトバッハ予想から，$2n+2$ は，$2n+2 = p_1 + p_2$ と，2 つの素数の和に分解できる．このとき，p_1 と，p_2 のうちの，片方は，$n+1$ より大きいか，等しくなる．一般性を失なうことなく， p_1 が，そのようなものとしてよい [*71]．つまり，

(2.38)　$n+1 \leq p_1 < 2n+2$ である．　x-1-14

$p_1 = 2n+1$ ではない．もし，$p_1 = 2n+1$ なら，$p_2 = 1$ と，ならなくてはならないが，p_2 は，素数だから，これは矛盾である．$2n$ は，素数でないので，$p_1 = 2n$ も不可能である．したがって $p_1 < 2n$ となる．一方，(2.38) の左の不等号から，$n < p_1$ だから，この p_1 は，求めるような素数である．❑

ベルトラン仮説と，ゴルトバッハ予想の組み合わせは，恣意的なものに思えるかもしれないが，実は，あながちそうとも言えない．ベルトランの仮説からは，次のような，ゴルトバッハ予想のヴァリエーション [*72]が，導けるからである．

[*71] これは，そうでなければ，p_1 と p_2 を入れ換えて議論をすればいいからです．この，「一般性を失なうことなく」(without loss of generality) というのは，このような場合によく使う成句で，英語では，“w.l.o.g.” という略記があるくらいです．ちなみに，フランス語やドイツ語でも，それぞれ，SPG, oBdA と略記します (これらは，それぞれ，«sans perte de généralité» „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ という表現の略となっています)．

[*72] バッハの晩年の鍵盤楽器曲で，「ゴルトベルク変奏曲 (ヴァリエーションズ)」という題の長大な作品があり，この曲は，特に，グレン・グールドの 1955 年と 1981 年の録音で知られています．

ちなみに，ここでは，その証明は省略していますが，ベルトランの仮説には，チェヴィシェフのもともとの証明やエルデシュによるものを含めて，数学的証明が存在するので (エルデシュの証明は，[1] で読むことができます)，次の定理 2.19 の証明は，何の保留事項もなしに証明として成り立っています．

定理 2.19 の主張の，ゴルトバッハ予想のそれとの違いは，定理 2.19 では，和を取る素数の有限集合の大きさの上限に制限がないことと，1 を和の中に加えていいこと，その代り，そこでの和は，互いに異る素数の和として取れる，ということです．特に，この 「異る素数の和」という条件はゴルトバッハ予想にはないものなので，“「ゴルトバッハ予想」を弱めたもの”，とは言わず[*73]ヴァリエーションと言っているのです．

[*73] とは言っても，上で見たようにベルトランの仮説は，ゴルトバッハ予想から導けるのだったので，定理 2.19 の主張は，(直接的にはそう見えないにもかかわらず) 命題の間の演繹の関係 (つまり，どの命題がどの命題から導けるか，という関係) に関して，ゴルトバッハ予想を弱めたものになっているのですが．

P-1-6 **定理 2.19** P で素数の全体の集合を表わすことにして，$P^* = P \cup \{1\}$ とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，有限集合 $S \subseteq P^*$ で，$n = \sum S$ となるものが存在する．

♦ 句点ここからチェック

証明． 帰納法で証明するが，証明を帰納法に乗せるために，主張を変形して

x-1-15 $(2.39)_n$　p_n を n 番目の素数とするとき，すべての $k \in \mathbb{N}$, $k < p_n$ に対し，$k = \sum S$ となる $S \subseteq P^*$ が存在する．

を考え，$(2.39)_n$ が，すべての n に対し，成り立つことを n に関する帰納法で示す[*74]．

$(2.39)_1$ は明らかに成り立つ ($1 < p_1 = 2$ は $S = \{1\}$ の和として表現できる)．

$(2.39)_n$ が成り立つとすると，ベルトランの仮説 (定理 2.18) から，

x-1-16 (2.40)　$p_{n+1} < 2p_n$

である．$k < p_{n+1}$ について，$k < p_n$ なら帰納法の仮定から，$k = \sum S$ となる $S \subseteq P^*$ が存在する．$k = p_n$ なら $k = \sum\{p_n\}$ である．$p_n < k < p_{n+1}$ なら，(2.40) により，$k_0 = k - p_n$ とすると，$k_0 < p_n$ であるから，帰納法の仮定により $k_0 = \sum S$ となる $S \subseteq P^*$ が，取れる．S の要素すべて $k_0 < p_n$ より小さいから，特に p_n とは異る．したがって，$S' = S \cup \{p_n\}$ とすると，$k = \sum S'$ である．したがって，$(2.39)_{n+1}$ が成り立つ．　□ (定理 2.19)

2.5　数の体系

Koerper 第 2.1 節で導入した数の体系のうち，$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ の 3 つは，四則演算に関して閉じている，という際立った性質を共通に持っている．これらの体系が，多項式の根に関して異る性質を持つことは，既に第 2.1 節で指摘したが，それにもかかわらず，この，四則演算に関して閉じている，という共通の性質から，こ

[*74] 帰納法の証明に乗せるために命題を変形したり，証明したい命題より更に強い命題で置き換えたりする，というのは帰納法による証明の基本テクニックの一つです．どのような変形や置き換えをしたらいいかは，直観的なひらめきにゆだねられていることが多く，言われれば確かにそうだが，自分では絶対に気付けないかもしれない，というようなものになることも少なくありません．

れらの数の体系は，線型代数の文脈では，共通の扱いができることが多い．実際，四則演算に関しては，これらの体系のうちのいずれにおいても，次のような性質が成り立つ:

K を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のどれかとするとき，K は四則演算に関して閉じていて [*75]，K で次の計算規則が成り立つ．なお，以下では，例えば，ab と書いて，通常の代数計算でのように a と b の積を，表わしているが，これが積であることを，明示する必要があるときには，(2.46) や (2.47) でのように，ab と，書く代りに，$a \cdot b$ と，書くこともある:

加法と減法の計算則

(2.41) (結合律) すべての $a, b, c \in K$ に対し，$(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立つ． x-1-17

(2.42) (零元の性質) すべての $a \in K$ に対し，$a+0=0+a=a$ である． x-1-18

(2.43) (反数の性質) すべての $a \in K$ に対し，$a+(-a)=(-a)+a=0$ である． x-1-19

(2.44) (可換性) すべての $a, b \in K$ に対し，$a+b=b+a$ が成り立つ． x-1-20

乗法と除法の計算則

(2.45) (結合律) すべての $a, b, c \in K$ に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ． x-1-21

(2.46) (単位元の性質) すべての $a \in K$ に対し，$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ である． x-1-22

(2.47) (逆数の性質) すべての $a \in K \setminus \{0\}$ に対し，$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ である． x-1-23

(2.48) (可換性) すべての $a, b \in K$ に対し，$ab = ba$ が成り立つ． x-1-24

分配律

(2.49) すべての $a, b, c \in K$ に対し，$a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bd$ が成り立つ． x-1-25

上の計算則のセットの中に入っていない，四則演算の性質のうち $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の

[*75] 計算規則 (2.41)～(2.49) の文脈で，「四則演算に関して閉じている」というのは，任意の $a, b \in K$ に対し，$a+b, -a, ab \in K$ で，$a \neq 0$ なら，$a^{-1} \in K$ が成り立つことです．

すべてで成り立つもの (の殆どすべて) は上の計算則から導ける[*76]．例えば,

x-1-25-a $$(2.50)\quad 0+0=0$$

は (2.42) の特別な場合である [*77]．(2.50) の両辺に -0 を足すと,

x-1-25-a-0 $$(2.51)\quad 0=-0$$

が得られる．また，(2.50) により，すべての $a \in K$ に対し,

x-1-25-0 $$(2.52)\quad 0\cdot a=0$$

であることが，次のようにして示せる:

$$0\cdot a \underbrace{=}_{(2.50)} (0+0)\cdot a \underbrace{=}_{(2.49)} 0\cdot a+0\cdot a$$

である．したがって，この両辺に $-(0a)$ を (例えば右から) 足すと，加法の結合律 (2.41) と反数の性質 (2.43) と零元の性質 (2.42) の (この順序での) 適用により，$0=0\cdot a$ が，得られる．

すべての $a \in K$ に対し，(2.52) により，$(1+(-1))\cdot a=0\cdot a=0$ で，分配律 (2.49) により，$(1+(-1))\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a \underbrace{=}_{(2.46)} a+(-1)\cdot a$ だから，$a+(-1)\cdot a=0$ である．この両辺に $-a$ を足すと,

x-1-25-0-0 $$(2.53)\quad (-1)\cdot a=-a$$

であることが，分かる．

$a \in K$ に対し，(2.43) により $-(-a)+(-a)=0$ だから，この両辺 に a

---

*76 例えば，$1 \neq 0$ は，これらの演算則から導けない式の一つです．実際,

$$\mathfrak{A}=\langle\{0\},\{\langle\langle 0,0\rangle,0\rangle\},\{\langle 0,0\rangle\},\{\langle\langle 0,0\rangle,0\rangle\},\{\langle 0,0\rangle\},0,0\rangle$$

とすると，代数構造 $\mathfrak{A}$ は，(2.41) ∼ (2.49) をすべて満たすので (代数構造という用語については，第 B.1 節，360 ページを参照してください)，もし，(2.41) ∼ (2.49) から “$0 \neq 1$” が導かれるなら，$\mathfrak{A}$ でも，この不等式が成り立たなくてはならないことになるので，矛盾です．同様にして，(2.41) ∼ (2.49) + “$1 \neq 0$” から，$1+1 \neq 0$ が導けないこと，etc., も示せます．

*77 “特別な場合” という表現については，脚注*12 を参照してください．

を足すと，$(-(-a)+(-a))+a=0+a \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} a$ となる．この等式の左辺は，

$$(-(-a)+(-a))+a \underbrace{=}_{(2.41)\text{による}} -(-a)+((-a)+a) \underbrace{=}_{(2.43)\text{による}} -(-a)+0 \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} -(-a)$$

となる．

したがって，すべての $a \in K$ に対して

$$(2.54)\quad -(-a)=a$$ x-1-25-1

となることが，示せた．

移項による等式の変形が行えることも，(2.41)〜(2.49) から導ける．例えば，a, b に対し，$a-b=0$ なら [*78]，両辺に b を（右から）足すと，$a=(a-b)+b=0+b=b$ が得られ，逆に，$a=b$ なら，この両辺に $-b$ を足すと，$a-b=b-b=0$ が得られる．したがって，

$$(2.55)\quad a=b \ \Leftrightarrow\ a-b=0$$ x-1-25-2

である．

演習問題 2.20 K が，(2.41)〜(2.49) を満たすとき， すべての $a, b \in K$ に対し，(1) $(-a)b=-(ab)$; (2) $-(b-a)=a-b$ が成り立つ． Exs-1-1

証明． (1): $(-a)b+ab \underbrace{=}_{(2.49)\text{による}} (-a+a)b \underbrace{=}_{(2.43)\text{による}} 0b \underbrace{=}_{(2.52)\text{による}} 0$ だから，この両端辺に，$-ab$ を，右から足すと（脚注*78 を参照），$(-a)b \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} (-a)b+0 \underbrace{=}_{(2.43)\text{による}} (-a)b+(ab-(ab))$ $\underbrace{=}_{(2.41)\text{による}} ((-a)b+ab)-(ab) \underbrace{=}_{\text{上の等式による}} 0-(ab) \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} -(ab)$ である．

(2): $-(b-a) \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} 0+-(b-a) \underbrace{=}_{(2.50)\text{による}} (0+0)+-(b-a) \underbrace{=}_{(2.43)\text{による}} ((a-a)+(b-b)+-(b-a)$ $\underbrace{=}_{(2.44),(2.41)\text{の複数回の適用}} a-b+b-a+-(b-a) \underbrace{=}_{(2.41)\text{の複数回の適用}} (a-b)+((b-a)+-(b-a)) \underbrace{=}_{(2.43)\text{による}} (a-b)+0 \underbrace{=}_{(2.42)\text{による}} a-b$

[*78] $b-a$ は，ここでは，$b+(-a)$ の略記として使われています．単項演算としての $-(\cdot)$ の演算記号は，二項演算の演算記号 $(\cdot)+(\cdot)$ より**優先順位** (priority) が高いと考えて，括弧を省略して，$b+(-a)$ を $b+-a$ と書くこともあります． +-

によりよい. (演習問題 2.20)

koerper2 四則演算が定義され, 0, 1 と呼ばれる要素を持ち, この四則演算に対して, 上の計算則 (2.41) ∼ (2.49) がすべて成り立つような構造 K を, **体** (たい, field, ドイツ語では „Körper“) とよぶ [*79]. これに対応して, (2.41)∼(2.49) を, **体の公理** (field axioms) とよぶ. 以下では, どの体をベースとして議論しても同じことが言えるときには, このジェネリックな体を, K で表わすことにする.

第 I 巻で考察する体は, 主に, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ など, $\mathbb{C}$ の部分となっていて, その演算も, $\mathbb{C}$ での数の四則演算を, その範囲に制限したものになっているが, 代数学の一般論では, 数の四則演算と必ずしも関連しない演算による構造でも, それが上の計算則を満たすときには, 体である, という.

体は, 第 B.1 節で述べることになる, 代数構造の特別な場合である. 体 K が, 0, 1 と演算 $+$, $-(\cdot)$, $\cdot$, $(\cdot)^{-1}$ を伴なうものであることを強調するときには, $K = \langle K, +, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1\rangle$ と書くことにする. この等式は, 定義通りに取ると意味をなさないが, これは, ここでは, “K は演算と定数 $+, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1$ を伴なう代数構造として捉えられている” という言明の略記, と考えている. これらの演算や定数が, K に固有なものであることを区別する必要があるとき (例えば, 異る複数の体を考えなくてはならなくなるとき) には, 添字 K をつけて, $K = \langle K, +_K, -_K(\cdot), \cdot_K, (\cdot)^{-1_K}, 0_K, 1_K\rangle$ などのように書く. 数の体系で通常に行なわれる括弧の省略や, 記法は, 一般の体に対しても転用する. 例えば, $a + (-b)$ を $a - b$ と書くことや, $a \neq 0$ のとき a^{-1} を $\frac{1}{a}$ と書いたり, $a^{-1}b$ を $\frac{b}{a}$ と書いたりすること, など.

$K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ に対しては, これらの体の四則演算と共存する K 上の線形順序が, K 上の四則演算のみを用いた定義で導入できる.

♦ ここから再チェック 21.04.18(日 15:28(JST))

$K = \mathbb{Q}$ とするとき, $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し,

x-1-26 (2.56) $a < b \;\; :\Leftrightarrow \;\; a \neq b$ で, $x, y, z, u \in \mathbb{Q}$ で, $a + x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b$ となるものが存在する

*79 ドイツ語の „Körper“ は肢体を意味する単語で, これは, デデキントの [10] で導入された用語です. 日本語の「体」は, このドイツ語の訳として導入されたものでしょう. ちなみに, フランス語でも, 数学用語としての体 (たい) に, 体 (からだ) を意味する «corps» という単語が用いられますが, これも [10] の仏訳に由来するもののようです.

と定義すると [*80]，このように定義された順序 $<$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形順序となり [*81]，この線形順序は，$\mathbb{Q}$ 上の通常の順序と一致し [*83]，以下を満たす:

(2.57)　すべての $a, b, c \in K$ に対し，$a < b$ なら，$a + c < b + c$ である， x-1-27

(2.58)　すべての $a, b \in K$ に対し，$0 < a$, $0 < b$ なら，$0 < ab$ である [*84]． x-1-28

以下の命題は，体の性質 (2.41) 〜 (2.49) と，上の (2.57), (2.58) から導かれる:

演習問題 2.21 体 K 上の線形順序 $<$ が，(2.57), (2.58) を満たすなら，すべての $a, b, c \in K$ に対し， Exs-2

(1)　$a < b \Leftrightarrow 0 < b - a$ である [*85]．

(2)　$a < b$ で $0 < c$ なら，$ac < bc$ である．

(3)　$a < b$ なら，$-b < -a$ である．特に，$0 < a$ なら，$-a < 0$ で，$a < 0$ なら，$0 < -a$ である．

(4)　$a < b$ で $c < 0$ なら，$bc < ac$ である．

(5)　$a \neq 0$ なら，$0 < a^2$ である．

[*80] "$a + x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b$" での "$x^2$" は，通常の数学の慣習でそうであるように，$x \cdot x$ (x かける x) のことです．y^2, etc. も同様です．

[*81] 集合 X 上の二項関係 R が[*82] X 上の**順序** (または，半順序ともいう，partial ordering) である，とは，R が，(1) すべての $a \in X$ に対して $a \not R\, a$; (2) すべての $a, b \in X$ に対し $a \mathrel{R} b$ なら $b \not R\, a$; (3) すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$, を満たすことです．ただし，$a \not R\, b$ で，a と b が関係 $a \mathrel{R} b$ にないことを表しています．X 上の順序 R が，**線形順序** (linear ordering) である — **全順序** (total ordering) であるとも言う—，とは，R が (1), (2), (3) に加えて (4) すべての異る $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ か $b \mathrel{R} a$ のどちらかが成り立つ，を満たすことです． linear-ordering

[*82] 二項関係については，付録 B の第 B.1 節を参照してください．

[*83] これは任意の正の分数が，4 つの，0 または，正の分数の平方の和として表わせる，という事実から導けますが，このことは，**ラグランジュの四平方定理** (Lagrange's Four-Square Theorem) と呼ばれる定理から導き出せます．ラグランジュの四平方定理と，その (複数の) 証明は，例えば，英語版の wikipedia のページ:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange's_four-square_theorem

で見ることができます．

[*84] 体 K 上の線形順序 $<$ が，(2.57), (2.58) を満たすとき，$<$ は体 K の四則演算と**共存する** (compatible with the field operations) といいます． compatible

体 K が，その上に，K の四則演算と共存する線形順序 $<$ を持つとき，K に $<$ を付け加えて得られる構造を，**順序体** (ordered field) とよびます．

証明． (1): $a<b$ なら，$\underbrace{0 = a-a}_{(2.43)} \underbrace{<}_{\text{仮定と (2.57) による}} b-a$ である．

$0<b-a$ なら，$\underbrace{b = b+0}_{(2.42)} \underbrace{=}_{(2.43)} b+(-a+a) \underbrace{=}_{(2.41)} (b-a)+a \underbrace{>}_{\text{仮定と(2.57) による}} 0+a \underbrace{=}_{(2.42)} a$

である．

(2): (1) により，$a<b$ なら，$0<b-a$ だから，$0<c$ なら，(2.58) と (2.49)，及び，演習問題 2.20 により，$0<(b-a)c=bc+(-a)c=bc-ac$. したがって，再び (1) により，$ac<bc$ である．

(3): $a<b$ とする．(2.57) により，この両辺に $-a$ を足すと，

$$0 \underbrace{=}_{(2.43)} a-a \underbrace{<}_{\text{仮定と (2.57)}} b-a \underbrace{=}_{(2.44)} -a+b$$

である．この両端辺に，$-b$ を足すと，

$$-b \underbrace{=}_{(2.42)} 0-b \underbrace{<}_{\text{上式と (2.57)}} (-a+b)-b \underbrace{=}_{(2.41)} -a+(b-b) \underbrace{=}_{(2.43)} -a+0 \underbrace{=}_{(2.42)} -a$$

である．

$0<a$ なら，上から，$-a<-0$ だが，(2.51) により，$-0=0$ だから，$-a<0$ である．$a<0$ なら $0<-a$ となることも同様に，示せる．

(4): $c<0$ なら，(3) により，$0<-c$ だから，(2) により，$a\cdot(-c)<b\cdot(-c)$ である．演習問題 2.20 (1) (と和の可換性 (2.41)) により，$a\cdot(-c)=-(ac)$, $b\cdot(-c)=-bc$ だから，$-ac<-bc$ である．したがって，(3) により，$bc<ac$ である．

(5): $0<a$ とすると，(2) により，$0<a^2$ である．一方，$a<0$ とすると，(3) により，$0<-a$ だから，$0 \underbrace{=}_{(2.52)} 0\cdot a \underbrace{<}_{\text{(2) による}} (-a)(-a) \underbrace{=}_{\text{演習問題 2.20,(1) と (2.48) による}} -(-a^2) \underbrace{=}_{(2.54)} a^2$ である．

□ (演習問題 2.21)

体 K 上に，(2.57) と，(2.58) を満たす線形順序 $<$ が定義されているとき，K 上の二項関係 $\leq$ を，$a, b\in K$ に対し，

x-1-28-0 (2.59)　$a\leq b \;:\Leftrightarrow\; a<b$ または，$a=b$

で定義する．$a\leq b$ は「a は b より小さいか等しい」(“a is less than or equal to b”) と読み下せる [*86].

[*85] 通常の数の計算でと，同様の，記号の使い方をして，$b+(-a)$ を，$b-a$ と，書いています．

[*86] ‘$<$’ と ‘$\leq$’ は，記号としては，日本語では，それぞれ，江戸時代の日本語と，片仮名英語

$a, b, c \in K$ に対し，$a = b$ のときには，$a + c = b + c$ となり，a か b の少なくともどちらかが 0 のときには，$ab = 0$ となるので，(2.57) と，(2.58) から，

(2.57)$'$　すべての $a, b, c \in K$ に対し，$a \leq b$ なら，$a + c \leq b + c$ である，

(2.58)$'$　すべての $a, b \in K$ に対し，$0 \leq a, 0 \leq b$ なら，$0 \leq ab$ である

が従うことがわかる．

$K = \mathbb{R}$ のときにも，同様に順序が導入できるが，この場合には，$\mathbb{R}$ が，平方根を取る演算で閉じていることから，もう少し簡単な，$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

(2.60)　$a < b \ :\Leftrightarrow\ a \neq b$ で，$x \in \mathbb{R}$ で，$a + x^2 = b$ となるものが存在する　x-1-29

とすることにより，通常の順序関係 $<$ を定義することができる．この，$\mathbb{R}$ 上の順序関係 $<$ は，$\mathbb{Q}$ 上の $<$ を拡張するものとなっており，この場合にも，$<$ は，(2.57), (2.58) を，満たすことが，この定義から示せる (演習!).

演習問題 2.21, (5) と，$\mathbb{Q}$ (または，$\mathbb{R}$) の標準的な順序 $<$ が，(2.56) (または，(2.60)) で定義できることから，$\mathbb{Q}$ (または，$\mathbb{R}$) 上の，四則演算と共存する線形順序は，これらの標準的なものに限る，ことが分かる．

体 K 上の線形順序 $<$ が，K の四則演算と共存する (つまり，(2.57), (2.58) を満たす) とき，K には，この線形順序に関する，絶対値の概念を，次のようにして導入できる:

$a \in K$ の**絶対値** (absolute value) $|\,a\,|$ を，

$$(2.61)\quad |\,a\,| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ のとき;} \\ -a & \text{そうでないとき} \end{cases}$$ x-B-24

として定義する．演習問題 2.21, (3) により，すべての $a \in K$ に対し

$$(2.62)\quad |\,a\,| \geq 0$$ x-1-29-a-0

である．

演習問題 2.22 K を体として，$<$ を，K の四則演算と共存する K 上の線形順序とし，$|\cdot| : K \to K$, を，$<$ から (2.61) によって定義された絶対値関数　Exs-3

を繋げて，“小なり”, “小なりイコール” と読むことが多いようです．“なり” は，英語で言うと，仮定法現在での be 動詞のような感じの意味合いを持った動詞です．

とする．このとき，任意の $a, b \in K$ に対し

x-B-26-a　(2.63)　$|\,a \cdot b\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$,

x-B-26-a-0　(2.64)　$|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$

が成り立つ．

証明． 両方の式とも，場合分けにより示せる．以下で，(2.64) の証明の，一番厄介な場合の一つの証明を見て，残りを読者の演習とする．

場合: $a \geq 0$ で $b < 0$ のとき．この場合には，絶対値の定義 (2.61) により，$|\,a\,| = a$, $|\,b\,| = -b$ である．演習問題 2.21, (3) により，

x-B-26-a-0-0　(2.65)　$-a < 0 < a$ かつ $b < 0 < -b$

である．

$a + b = 0$ なら，不等式 (2.64) は，いずれにしても成り立つ (実は，この場合は，a と b に対する仮定 (2.65) から，$a \neq b$ だから，ここでは起りえない)．

$a + b > 0$ なら，$|\,a + b\,| \underbrace{=}_{|\,\cdot\,|\text{ の定義 }(2.61)} a + b \underbrace{<}_{(2.65)\text{ と }(2.57)\text{ による}} a - b = |\,a\,| + |\,b\,|$ により，(2.64) は，成り立つ．

$a + b < 0$ なら，$|\,a + b\,| \underbrace{=}_{|\,\cdot\,|\text{ の定義 }(2.61)} -(a + b) \overbrace{=}^{(2.53)\text{ と分配律 }(2.49)} -a - b \underbrace{<}_{(2.65)\text{ と }(2.57)\text{ による}} a - b = |\,a\,| + |\,b\,|$ により，再び，(2.64) は，成り立つ．　❐ (演習問題 2.22)

$|\,-a\,| \underbrace{=}_{(2.53)\text{ による}} |\,-1 \cdot a\,| \underbrace{=}_{(2.63)} |\,-1\,| \cdot |\,a\,| = 1 \cdot |\,a\,| \underbrace{=}_{(2.46)} |\,a\,|$ である．

したがって，(2.64) から，$|\,a - b\,| = |\,a + -b\,| \leq |\,a\,| + |\,-b\,| = |\,a\,| + |\,b\,|$ となるので，

x-B-26-a-1　(2.66)　$|\,a - b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$

である．

すべての $a, b \in K$ に対し，

x-B-33-7-0　(2.67)　$a \geq b - |\,a - b\,|$

である: $|\,a-b\,|=a-b$ の場合には，$a-b\geq 0$ だから，(2.57)$'$ により (両辺に b を右から足して)，$a\geq b$ となるから，演習問題 2.21, (3) により $-a\leq -b$ である．したがって，$b-|\,a-b\,|\underbrace{=}_{\text{上の仮定と演習問題 2.20, (2)}} b+b-a \underbrace{<}_{\text{(2.57)}'\text{ による}} b+b-b=b\leq a$ である．
$|\,a-b\,|=-(a-b)$ の場合には，$b-|\,a-b\,|\underbrace{=}_{\text{(2.54) による}} b+(a-b)=a$ によりよい．

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の上に，四則演算と共存する線形順序があることは，線型代数と初等幾何の交流での，重要なポイントの一つとなる [*87].

次の補題は，数の加法の結合律 (2.41) と可換性 (2.44)，および数の加法と乗法の分配律 (2.49) の帰結で，それらの一般化となっている．

補題 2.23 K を数の体系のどれかとする [*88]. P-1-6-0

(1) $m\in\mathbb{N}$ で，各 $i\in\overline{m}$ に対し $a_i, b_i\in K$ のとき，

$$\left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right)+\left(\sum_{i\in\overline{m}} b_i\right)=\sum_{i\in\overline{m}}(a_i+b_i) \tag{2.68}$$ x-1-29-0

が成り立つ．

(2) $m, n\in\mathbb{N}$ で，各 $i\in\overline{m}, j\in\overline{n}$ に対し，$a_{i,j}\in K$ とするとき，

$$\sum_{i\in\overline{m}}\left(\sum_{j\in\overline{n}} a_{i,j}\right)=\sum_{j\in\overline{n}}\left(\sum_{i\in\overline{m}} a_{i,j}\right) \tag{2.69}$$ x-1-29-1

が成り立つ．(以下では，(2.69) の等式での和を，$\displaystyle\sum_{i\in\overline{m}, j\in\overline{n}} a_{i,j}$ と表わすことにする)．

(3) $m\in\mathbb{N}$ で，各 $i\in\overline{m}$ に対し，$a_i\in K$ で，$c\in K$ するとき，

$$c\left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right)=\sum_{i\in\overline{m}} ca_i, \qquad \left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right)c=\sum_{i\in\overline{m}} a_ic, \tag{2.70}$$ x-1-29-2

である．

(4) $m\in\mathbb{N}$ で，各 $i\in\overline{m}, j\in\overline{n}$ に対し，$a_i\in K$ で，$b_j\in K$ するとき，

---

*87 例えば，第 4 章の脚注*17 を，参照してください．

*88 より一般的には，K を，上の意味での任意の体とするとき，あるいは，更に一般化して，任意の環 (370 ページを参照) とするときにも，同じ証明により，ここでの (1)〜(4) が成り立つことが，確認できます (演習!)．

x-1-29-3

$$\sum_{i\in\overline{m},j\in\overline{n}} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in\overline{n}} b_j\right) \tag{2.71}$$

である．

証明． どの主張も，正しさの "直観的な" 理解が可能な範囲にある，と言えるかもしれないが，厳密な証明は，帰納法により，与えることができる．ただし，(4) は，他のものの組合せによって (も) 得られる．

(1): $m \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で，(2.68) が，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し成り立つことを，示す．

$m = 1$ のときには，

$$\left(\sum_{i\in\overline{1}} a_i\right) + \left(\sum_{i\in\overline{1}} b_i\right) = a_1 + b_1 = \sum_{i\in\overline{1}}(a_i + b_i)$$

だからよい [*89]．

等式 (2.68) が m に対し成り立つ，と仮定すると，

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\in\overline{m+1}} a_i\right)+\left(\sum_{i\in\overline{m+1}} b_i\right) &\underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}} \left(\left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right) + a_{m+1}\right)+\left(\left(\sum_{i\in\overline{m}} b_i\right) + b_{m+1}\right) \\
&\underbrace{=}_{\text{(2.41) と (2.44) の複数回の適用}} \left(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\right) + \left(\sum_{i\in\overline{m}} b_i\right) + a_{m+1} + b_{m+1} \\
&\underbrace{=}_{\text{帰納法の仮定による}} \left(\sum_{i\in\overline{m}}(a_i + b_i)\right) + (a_{m+1} + b_{m+1}) \underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}} \sum_{i\in\overline{m+1}}(a_i + b_i)
\end{aligned}$$

により，等式 (2.68) は $m + 1$ に対しても成り立つ．

以上から，(帰納法の原理により) 等式 (2.68) が，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し成り立つことが，示せた．

(2): $m \in \mathbb{N}$ に関する帰納法により，(2.69) が，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し成り立つことを示す．

$m = 1$ のときには，

*89 $\overline{1} = \{1\}$ だったことに注意します．

$$\sum_{i\in\overline{1}}\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}}a_{i,j}\Bigr)=\sum_{j\in\overline{n}}a_{1,j}=\sum_{j\in\overline{n}}\Bigl(\sum_{i\in\overline{1}}a_{i,j}\Bigr)$$

だから，(2.69) は成り立つ．

m に対して，(2.69) が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\overline{m+1}}\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}}a_{i,j}\Bigr)&\underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}}\sum_{i\in\overline{m}}\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}}a_{i,j}\Bigr)+\sum_{j\in\overline{n}}a_{m+1,j}\\&\underbrace{=}_{\text{帰納法の仮定による}}\sum_{j\in\overline{n}}\Bigl(\sum_{i\in\overline{m}}a_{i,j}\Bigr)+\sum_{j\in\overline{n}}a_{m+1,j}\underbrace{=}_{\text{(1) による}}\sum_{j\in\overline{n}}\Bigl(\Bigl(\sum_{i\in\overline{m}}a_{i,j}\Bigr)+a_{m+1,j}\Bigr)\\&\underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}}\sum_{j\in\overline{n}}\Bigl(\sum_{i\in\overline{m+1}}a_{i,j}\Bigr)\end{aligned}$$

により，等式 (2.69) は $m+1$ に対しても成り立つ．

以上から，(帰納法の原理により) 等式 (2.69) が，すべての $m,n\in\mathbb{N}$ に対し，成り立つことが，示せた．

(3): $m\in\mathbb{N}$ に関する帰納法で，(2.70) の最初の等式が，すべての $m\in\mathbb{N}$ に対し，成り立つことを示す．

$m=1$ のときには，

$$c\Bigl(\sum_{i\in\overline{1}}a_i\Bigr)=ca_1=\sum_{i\in\overline{1}}ca_i$$

だからよい．

m に対し，(2.70) の最初の等式が，成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}c\Bigl(\sum_{i\in\overline{m+1}}a_i\Bigr)&\underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}}c\Bigl(\Bigl(\sum_{i\in\overline{m}}a_i\Bigr)+a_{m+1}\Bigr)\underbrace{=}_{\text{分配律 (2.49) による}}c\Bigl(\sum_{i\in\overline{m}}a_i\Bigr)+ca_{m+1}\\&\underbrace{=}_{\text{帰納法の仮定による}}\Bigl(\sum_{i\in\overline{m}}ca_i\Bigr)+ca_{m+1}\underbrace{=}_{\text{`}\sum\text{' の定義による}}\sum_{i\in\overline{m+1}}ca_i\end{aligned}$$

により，(2.70) の最初の等式は，$m+1$ に対しても成り立つ．

以上から，(帰納法の原理により) (2.70) の最初の等式は，すべての $m\in\mathbb{N}$

に対し成り立つことが，示せた．(2.70) の 2 番目の等式は，このことと，K での乗法の可換性 (2.48) により，よい．

$$(4)\text{:}\ \sum_{i\in\overline{m},j\in\overline{n}} a_ib_j \underbrace{=}_{(2)\text{ による}} \sum_{i\in\overline{m}}\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}} a_ib_j\Bigr) \underbrace{=}_{(3)\text{ の最初の等式による}} \sum_{i\in\overline{m}} a_i\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}} b_j\Bigr)$$

$$\underbrace{=}_{(3)\text{ の 2 番目の等式による}} \Bigl(\sum_{i\in\overline{m}} a_i\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{j\in\overline{n}} b_j\Bigr) \qquad \text{である．}$$

□ (補題 2.23)

第 3 章

行列の演算

行列に関する議論に戻る．以下で，数を成分とする行列の間の，幾つかの演算を導入する．ベクトルは，行列の特別な場合だったので，ここでの演算の定義は，ベクトルの間の演算の定義も含むことになる．以下では，K を，$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ などの，体 (54 ページを参照) の 1 つとする． ops

行列 A やベクトル $\mathbb{a}$ が，体 K の要素を成分とするもののとき，このことを，“A は，K **上の行列**である”，また，“$\mathbb{a}$ は，K **上のベクトル**である” と表現することにする．K に四則演算が備わっていることから，K 上の行列や，K 上のベクトルにも，幾つかの演算が，自然に導入できる．

以下の第 3.1 節と，第 3.2 節では，行列の演算のみを議論しているが，ベクトルは，行列の特別な場合 (行，または，列の数が 1 となるような行列) だったので，ここでの演算の定義や，その性質は，ベクトルに対する演算や性質にもなっていることに注意する．

3.1　行列の和とスカラー倍

A と，B を，体 K 上の $m \times n$-行列として，$A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ とするとき，$m \times n$-行列 $A + B$ を $[c_{i,j}]$ とする．ただし，$i \in \overline{m}$, $j \in \overline{n}$ に対し [*1], $c_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}$ とする． sum-multiple

[*1] $m \in \mathbb{N}$ に対し，$\overline{m} = \{1, \ldots, m\}$ としたのでした ((2.33) を参照してください)．

例 3.1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

以下で，行列の間の，様々な等式を，示すことになるが，$m \times n$-行列 A, B について，

x-1-30 (3.1) $\quad A = B \ \Leftrightarrow\ $ すべての $i \in \overline{m}$, $j \in \overline{n}$ に対し，
A の (i,j)-成分 $=$ B の (i,j)-成分　である

が，成り立つことに，注意する．

このことと，行列の加法は，成分ごとの数の加法により導入されていることから，数の加法で成り立つ計算法則は，行列の加法でも成り立つことが，示せる．

以下の補題 3.2 の (1), (2), (3) はそれぞれ，(2.41), (2.42), (2.44) に対応するものになっていることに，注意する．

P-1-7 **補題 3.2** $m, n \in \mathbb{N}$ として，A, B, C を，K 上の $m \times n$-行列とする．このとき:

（1） $(A+B)+C = A+(B+C)$ である．

（2） $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$ である．

（3） $A + B = B + A$ である．

証明． $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$, $C = [c_{i,j}]$ とする．

(1): 任意の $i \in \overline{m}$, $j \in \overline{n}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&(A+B)+C \ \text{ の } (i,j)\text{-成分} = \Big(A+B \text{ の } (i,j)\text{-成分}\Big) + c_{i,j} \\
&= (a_{i,j}+b_{i,j}) + c_{i,j} \underbrace{=}_{(2.41)\ \text{による}} a_{i,j} + (b_{i,j}+c_{i,j}) \\
&= a_{i,j} + \Big(B+C \text{ の } (i,j)\text{-成分}\Big) = A+(B+C) \ \text{ の } (i,j)\text{-成分}
\end{aligned}$$

である．したがって，(3.1) により，$(A+B)+C = A+(B+C)$ である．

(2) と (3) も，同様に，成分の比較で示せる (演習!). □ (補題 3.2)

A を，K 上の $m \times n$-行列とし，$A = [a_{i,j}]$ とする．$c \in K$ に対し，$m \times n$-行列 cA を $[ca_{i,j}]$ により定義する．cA は，A の (c による) **スカラー倍** (scalar multiple) である，という [*2].

例 3.3
$$6\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}, \qquad 6\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

補題 3.4 ある $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，A, B を，K 上の $m \times n$-行列とし，$a, b \in K$ とする．このとき， P-1-8

(1)　$a(bA) = (ab)A$ である．

(2)　$(a+b)A = aA + bA$ である．

(3)　$a(A+B) = aA + aB$ である．

(4)　$0A = O_{m \times n}$ である．

(5)　$1A = A$ である．

(6)　$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$ なら，$cA = \begin{bmatrix} c\,\mathbb{a}_1 & \cdots & c\,\mathbb{a}_n \end{bmatrix}$ である．

(7)　$A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ なら，$cA = \begin{bmatrix} c\,\mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ c\,\mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ である．

証明． (1): 任意の $i \in \overline{m}$, $j \in \overline{n}$ に対し，

$$a(bA) \text{ の } (i,j)\text{-成分} = a\Big(bA \text{ の } (i,j)\text{-成分}\Big) = a(ba_{i,j}) \underbrace{=}_{\text{結合律 (2.45) による}} (ab)a_{i,j}$$
$$= (ab)A \text{ の } (i,j)\text{-成分}.$$

(2)～(5) も，同様の成分の比較により示せる；(6), (7) は，cA の定義からよい (演習!). □ (補題 3.4)

[*2] “スカラー” というのは，ドイツ語の „Skalar“ の発音の，日本語への音訳でしょう．英単語としての “scalar” の発音 [ˈskeɪlə] または，[ˈskeɪlər] の日本語への音訳は，“スケイラ” に近いものになります．

行列 A に対し，A の $-1 \in K$ によるスカラー倍 $-1A$ を，$-A$ とも書くことにする．また，$A+(-1B)$ を，$A-B$ とも書く．

P-1-8-0 **演習問題 3.5** $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，A, B を K の上の $m \times n$-行列とする．このとき，

（1） $A - A = O_{m\times n}$ である．

（2） $A + (B - A) = B$ である．

（3） $-(A - B) = B - A$ である．

演習問題 3.5 は，行列の成分の比較により直接示すこともできるが，補題 3.2 と，補題 3.4 が，既に行列の和とスカラー倍の代数的な基本性質を網羅するものとなっていることから，そこでの等式を組み合わせることで示すことも，できる．

証明． (1): $A-A \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義}} A+(-1A) \underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(5)} 1A+(-1A) \underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(2)} (1+(-1))A = 0A \underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(4)} O_{m\times n}.$

(2): $A + (B - A) \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義}} A + (B + (-1A)) \underbrace{=}_{\text{補題 }3.2,(3)} A + ((-1A) + B)$

$\underbrace{=}_{\text{補題 }3.2,(1)} (A + (-1A)) + B \underbrace{=}_{(1)} O_{m\times n} + B \underbrace{=}_{\text{補題 }3.2,(2)} B.$

(3): $-(A - B) \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義}} -1(A + (-1B)) \underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(3)} -1A + (-1)(-1B)$

$\underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(1)} -1A + ((-1)(-1))B = -1A + 1B \underbrace{=}_{\text{補題 }3.4,(5),\ \text{補題 }3.2,(3),\text{“}-\text{” の定義}} B - A.$

□ (演習問題 3.5)

3.2　行列の積

product 行列の積の演算の定義は，前小節で考察した，行列の和や，スカラー倍の演算より，もう少し厄介なものになる．

$\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$A = [a_{i,j}]$ と $B = [b_{j,k}]$ を，それぞれ，K 上の $\ell \times m$-行列と，$m \times n$-行列とするとき [*3]，$\ell \times n$-行列 $AB = [c_{i,k}]$ を，$i \in \overline{\ell}$, $k \in \overline{n}$

[*3] ここでは，A の列のサイズと B の行のサイズが同じことが，要点となっています．

に対し，

$$c_{i,k} := \sum_{j \in \overline{m}} a_{i,j} b_{j,k} \tag{3.2}$$

x-1-31

とすることにより，定義する．

例 3.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times (-3) & 1 \times (-2) + 2 \times (-4) \\ 3 \times (-1) + 4 \times (-3) & 3 \times (-2) + 4 \times (-4) \\ 5 \times (-1) + 6 \times (-3) & 5 \times (-2) + 6 \times (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ -15 & -22 \\ -23 & -34 \end{bmatrix}.$$

例 3.7 Ex-0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = [\,70\,].$$

上の例 3.7 での計算結果は，70 を唯一の成分として持つ，1×1-行列 $[\,70\,]$ だが，K の要素を成分として持つ 1×1-行列を，その行列の (唯一の) 成分 $\in K$ と，同一視することも多い．そのため，他の教科書では，上の例でのような計算で，断りなく，“$= 70$” と書かれている場合も，少なくない．

例えば，A を，K の上の 2×3-行列，B を，K 上の 3×4-行列とすると，AB は，定義できるが，BA は，定義されない，これに対し，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して，A と B を，K 上の n-次正方行列とするときには，AB も BA も定義できる．しかし，これらは，必ずしも等しいとは限らない:

例 3.8 Ex-1-0-0

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ とすると，$AB = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$ だが，
$BA = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$ だから，$AB \neq BA$ である． ❑

つまり, 行列の積は, 可換性を持たない．あるいは, **非可換** (non-commutative) である [*4]．

[*4] これは，$AB \neq BA$ である場合がある，ということで，すべての A, B に対し $AB \neq BA$ である，と言っているわけではないことに，注意してください．

非可換性は，行列の積の，数の掛け算からの，決定的な違いの一つだが，行列の積は，数のかけ算と似た性質も，たくさん持っている．次の補題は $O_{m\times n}$ と E_n が，行列の積において，数の足し算や，掛け算における 0, 1 と類似の役割を果すことを，示している．

P-1-9 **補題 3.9** $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ で，A を，K 上の $m\times n$-行列とする．このとき，

（1） $O_{\ell\times m}A = O_{\ell\times n}, \quad AO_{n\times\ell} = O_{m\times\ell}$ である．

（2） $E_mA = AE_n = A$ である．

証明． 以下では，$i^* \in \overline{\ell}$, $j^* \in \overline{m}$, $k^* \in \overline{n}$ として，$A = [a_{j,k}]_{j\in\overline{m},k\in\overline{n}}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(1):\quad & O_{\ell\times m}A \text{ の } (i^*,k^*)\text{-成分} = \sum_{j\in\overline{m}} \underbrace{0}_{O_{\ell\times m} \text{ の } (i^*,j)\text{-成分}} a_{j,k^*} = 0 \\ & = O_{\ell\times n} \text{ の } (i^*,k^*)\text{-成分}\end{aligned}$$

により，$O_{\ell\times m}A = O_{\ell\times n}$ である．$AO_{n\times\ell} = O_{m\times\ell}$ も同様に示せる．

(2): (1.1) で導入した，クローネカのデルタを，用いると，$E_m = [\delta_{i,j}]_{i,j\in\overline{m}}$ だから，

$$E_mA \text{ の } (j^*,k^*)\text{-成分} = \sum_{j\in\overline{m}} \delta_{j^*,j}\, a_{j,k^*} = a_{j^*,k^*} = A \text{ の } (j^*,k^*)\text{-成分}$$

により，$E_mA = A$ である[*5]．$AE_n = A$ も同様に示せる．　□ (補題 3.9)

次の定理 3.10 で述べられている行列の積の演算の性質 (結合律) は，非常に重要である [*6]．むしろ，行列の積を，(3.2) のように定義したのは，行列の積が，次の定理を満たすものになるように選んだ結果である，と言ってよい．

[*5] $\sum_{j\in\overline{m}} \delta_{j^*,j}\, a_{j,k^*} = a_{j^*,k^*}$ は，

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j\in\overline{m}} \delta_{j^*,j}\, a_{j,k^*} = \underbrace{\delta_{j^*,1}}_{=0} a_{1,k^*} + \cdots + \underbrace{\delta_{j^*,j^*}}_{=1} a_{j^*,k^*} + \cdots + \underbrace{\delta_{j^*,m}}_{=0} a_{m,k^*} \\ &= a_{j^*,k^*}\end{aligned}$$

によりよい (ただし，ここでは，$j^* \neq 1$, $j^* \neq n$ の場合で考えている)．

[*6] この性質により，行列のかけ算と，線型写像の合成の，対応が確立します (定理 4.24 を参照)．

定理 3.10 $\ell, m, n, p \in \mathbb{N}$ に対し，A, B, C を，それぞれ，K 上の，$\ell \times m$-行列，$m \times n$-行列，$n \times p$-行列とするとき，$(AB)C = A(BC)$ が成り立つ．つまり，行列の積は，結合律を満たす． P-1-10

証明． まず，AB は，$\ell \times n$-行列で，BC は，$m \times p$-行列だから，示すべき等式の両辺は，うまく定義できており，$(AB)C$ も，$A(BC)$ も，$\ell \times p$-行列であることに，留意する．

$A = [a_{h,i}]_{h \in \overline{\ell}, i \in \overline{m}}$, $B = [b_{i,j}]_{i \in \overline{m}, j \in \overline{n}}$, $C = [c_{j,k}]_{j \in \overline{n}, k \in \overline{p}}$ とする．このとき，任意の $h \in \overline{\ell}$, $k \in \overline{p}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&(AB)C \text{ の } (h,k)\text{-成分} \\
&= \sum_{j \in \overline{n}} \Bigl(\overbrace{\Bigl(\sum_{i \in \overline{m}} a_{h,i} b_{i,j} \Bigr)}^{AB \text{ の } (h,j)\text{-成分}} c_{j,k} \Bigr) \\
&\underbrace{=}_{\text{補題 2.23, (3) の 2 番目の式による}} \sum_{j \in \overline{n}} \Bigl(\sum_{i \in \overline{m}} a_{h,i} b_{i,j} c_{j,k} \Bigr) \underbrace{=}_{\text{補題 2.23, (2) による}} \sum_{i \in \overline{m}} \Bigl(\sum_{j \in \overline{n}} a_{h,i} b_{i,j} c_{j,k} \Bigr) \\
&= \sum_{i \in \overline{m}} \Bigl(\sum_{j \in \overline{n}} a_{h,i} (b_{i,j} c_{j,k}) \Bigr) \underbrace{=}_{\text{補題 2.23, (3) の 1 番目の式による}} \sum_{i \in \overline{m}} \Bigl(a_{h,i} \overbrace{\Bigl(\sum_{j \in \overline{n}} b_{i,j} c_{j,k} \Bigr)}^{BC \text{ の } (i,k)\text{-成分}} \Bigr) \\
&= A(BC) \text{ の } (h,k)\text{-成分}
\end{aligned}
$$

となるから，(3.1) により，$(AB)C = A(BC)$ である． □ (定理 3.10)

A を正方行列とするとき，$A^2 := AA$, $A^3 := (AA)A$, $A^4 := ((AA)A)A$, etc. とする．定理 3.10 の繰り返し適用により，数の積でのときと同様に，括弧のつけ方で，これらの繰り返しの積の値は，変らないことが，示せるから，括弧を，省略することにして，$n \in \mathbb{N}$ に対し，A の，n-次の冪 A^n を，

$$
A^n := \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ 回}} \tag{3.3}
$$
x-1-32-0

で定義する．

より一般に，必ずしも正方行列ではない行列の積でも，括弧を省略して，例

えば，$A((AB)C)$ と書くかわりに，A^2BC などと書くことにする．

P-1-10-0 **系 3.11** A を正方行列として，$m, n \in \mathbb{N}$ とするとき，(1)　$A^m A^n = A^{m+n}$，(2)　$A^{mn} = (A^n)^m$ が成り立つ．

証明． ここでも，フルパワーの証明は，帰納法を用いた形のものだが，直観的には，定理3.10の繰り返し適用により，例えば，(2) は，

$$A^{mn} = \underbrace{AA\cdots A}_{mn\text{ 回}} = \underbrace{\overbrace{(A\cdots A)}^{n\text{ 回}}\ \cdots\ \overbrace{(A\cdots A)}^{n\text{ 回}}}_{m\text{ 回}} = (A^n)^m$$

となること，として理解できる[*7]．(1) についても同様に理解できる (演習!)．

□ (系 3.11)

行列の和と積の，以下のような分配律も成り立つ．

P-1-11 **補題 3.12** A, B, C を，K 上の行列として，$a, b \in K$ とする，以下 (1)〜(6) での右辺がうまく定義されていることと，左辺がうまく定義されていること，は同値で，これらが定義されているときには，それぞれの等式が成り立つ．

(1)　$a(A+B) = aA + aB$.

(2)　$(a+b)A = aA + bA$.

(3)　$A(B+C) = AB + AC$.

(4)　$(A+B)C = AC + BC$.

(5)　$A(aB) = (aA)B = a(AB)$.

(6)　$(ab)B = a(bB)$.

証明． (1), (2), (6) はそれぞれ，補題3.4の，(3), (2), (1) である．

(3) を示す．他のものも同様に成分の比較で証明できる (演習!)．

[*7] ここで，触れている，「性質の繰り返し適用」による証明，と，帰納法による形式的な証明の間の，微妙な差を理解するためには，前書きでの，本書の特徴 (3) で，既に，本書では触れない，と宣言したところの数理論理学の知識が必要になります．通常は，この差が問題となることはないのですが，数理論理学の手法を用いている数学 (例えば，集合論やモデル理論など) では，この微妙な差の理解が不可欠となることもあります．

まず，（3）の等式の両辺がうまく定義されるのは，B と，C が，同じ縦横サイズで，このサイズの行数が，A の列の数と等しいときであることに，注意しておく．例えば，A を $\ell \times m$-行列として B と C を $m \times n$-行列とし，$A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{j,k}]$, $C = [c_{j,k}]$ とする．このとき，任意の $i \in \overline{\ell}$, $k \in \overline{n}$ に対し，

$$\begin{aligned}
A(B+C) \text{ の } (i,k)\text{-成分} &= \sum_{j \in \overline{m}} a_{i,j} \overbrace{(b_{j,k} + c_{j,k})}^{B+C \text{ の } (j,k)\text{-成分}} \\
&\underbrace{=}_{\text{分配律 (2.49) による}} \sum_{j \in \overline{m}} (a_{i,j} b_{j,k} + a_{i,j} c_{j,k}) \underbrace{=}_{\text{補題 2.23, (1) による}} \overbrace{\Big(\sum_{j \in \overline{m}} a_{i,j} b_{j,k} \Big)}^{AB \text{ の } (i,k)\text{-成分}} + \overbrace{\Big(\sum_{j \in \overline{m}} a_{i,j} c_{j,k} \Big)}^{AC \text{ の } (i,k)\text{-成分}} \\
&= AB + AC \text{ の } (i,k)\text{-成分}
\end{aligned}$$

となるので，(3.1) により，$A(B+C) = AB + AC$ である．　❑ (補題 3.12)

n-次の行列の積や和による項の計算は，上の補題 3.12 等により，数に対する計算と同様に行えるが，行列の積が非可換である (つまり，必ずしも，いつも可換とは限らない — 例 3.8 を参照) ことからくる違いには，注意する必要がある．

例 3.13 任意の n-次正方行列 A, B に対し，　ex-1-4

$$\begin{aligned}
&(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2, \\
&(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明． 最初の式については，

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \underbrace{=}_{\text{補題 3.12, (4)}} A(A+B) + B(A+B) \\
&\underbrace{=}_{\text{補題 3.12, (3)}} AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2
\end{aligned}$$

によりよい．BA は，一般には，AB と異るので，$BA + AB$ を，$2AB$ と変

形することはできない，ことに注意する．

二番目の式も同様に示せる (演習!). ❏ (例 3.13)

以上で見たように，行列の和や積の計算は，数の計算とよく似た性質を持つが，数の計算とは大きく異る側面も幾つかある．正方行列の掛け算が可換でないことは，そのような違いの 1 つである．**冪零行列** (nilpotent matrices, 冪を取るとゼロ行列になるような行列) や，**冪等行列** (idempotent matrices, 冪と自分自身が等しいような行列) が存在するが，これらも，数の計算では，対応するものの，ないものである．

Ex-1-1 **例 3.14** (1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ とすると，$A\neq O_2$ だが，$A^2=O_2$ である (特に，A は，冪零行列である).

(2) $B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ とすると，$B^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ だから，$B\neq E_2$, $B^2\neq E_2$ だが，$B^3=E_2$ である [*8]．したがって，$B^4=B$ となるから，B は冪等行列である．

(3) $C=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ とすると，$C^2=C$ である (特に，C は冪等行列である). ❏

上の例 3.14, (2) に関しては，$\mathbb{C}$ でも，似た現象が起ることに注意する: 例えば，$a=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると，$a\neq 1$, $a^2\neq 1$ だが，$a^3=1$ である．

次の補題の等式も，これまでの幾つかの行列の等式と同様に，行列の成分ごとの，同等性を示すことで，得られる．

P-1-12 **補題 3.15** $n\in\mathbb{N}$ とする． (1) n-次の正方行列 A, B に対し，${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ が，成り立つ．

(2) $k\in\mathbb{N}$ として，A_1, A_2 ,..., A_k を，n-次の正方行列とするとき，${}^t(A_1A_2\cdots A_k)={}^tA_k\cdots{}^tA_2\,{}^tA_1$ である．

---

*8 ここでの行列 B は，第 4 章 の 4.2.3 節で見ることになる，回転行列の，一つの特別な場合で，原点を中心とする左回り 120° (360° の 1/3) の回転を，表現するものです．幾何学的な直観としては，行列の掛け算が，回転の操作の合成に対応することから，120° の回転を 3 回施すことで一回転して元に戻る，ということと，$B^3=E_2$ となる，ということが対応している，と理解することができます．

証明． (1): $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{j,k}]$, ${}^tA = [a^t_{i,j}]$, ${}^tB = [b^t_{j,k}]$ とする．このとき，任意の i, j, $k \in \overline{n}$ に対し，$a_{i,j} = a^t_{j,i}$, $b_{j,k} = b^t_{k,j}$ だから，任意の i, $k \in \overline{n}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
{}^t(AB) \text{ の } (k,i)\text{-成分} &= AB \text{ の } (i,k)\text{-成分} = \textstyle\sum_{j\in\overline{n}} a_{i,j}b_{j,k} \\
= \textstyle\sum_{j\in\overline{n}} a^t_{j,i}b^t_{k,j} &= \textstyle\sum_{j\in\overline{n}} b^t_{k,j}a^t_{j,i} = {}^tB{}^tA \text{ の } (k,i) \text{ 成分}
\end{aligned}
$$

である．したがって，${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ である．

(2): (1) を，帰納法のステップでの証明で用いて，k に関する帰納法で，証明できる (演習!). ❏ (補題 3.15)

第 4 章

初等幾何でのベクトルと行列

chap4 geometry

A mathematician is a device for turning coffee into theorems.
— Alfréd Rényi[*1]

第 1 章での立場では，数などの数学的対象を並べた “表” としてのベクトルは，縦か横のサイズが 1 であるような行列にすぎず，それらの上に，第 3 章で導入したような，いささか人工的にも見える和とスカラー倍の演算が，定義されたものにすぎなかった．しかし，以下のような，幾何学的な解釈によって，ベクトルに，特別な役割が付与されることになる．行列は，この解釈の下で，平面や空間上の，線型変換，あるいは，線型写像と呼ばれる，直線や平面などの，幾何学的図形を保存する写像の表現，と看倣すことができるようになる (これは，定理 4.23 と， 定理 4.37 を組合わすことで見ることができる)．

この議論を始める前に，まず，第 3 章で導入した行列の間の演算を，ベクトルたちに制限したものと，その基本性質について，纏めておくことにする．

4.1　ベクトルの演算

4.1.1　n-次元ベクトル空間，ベクトルの和とスカラー倍

vector

vector-sp

$n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{R}^n$ で，$\mathbb{R}$ 上の n-次元の列ベクトルの全体からなる集合を，表わすことにする．

x-2-0

$$(4.1)\quad \mathbb{R}^n = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

である．$\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ 等についても，

*1 Alfréd Rényi (アルフレッド・レーニ，1921(大正 10 年)〜1970(昭和 45 年)) はハンガリーの数学者で，エルデシュ (47 ページの脚注を参照) との共著のランダムグラフの研究などで知られています．ハンガリー科学アカデミーの，レーニ数学研究所は，彼の名前にちなんで命名されています．この警句は，生前エルデシュが，講演でよく引用したので，エルデシュの言ったもの，と誤解されていることもあります．このジョークは，多分，原文は，ドイツ語で，„Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Sätze verwandelt.“ というものなのではないかと思います．ちなみに，ドイツ語で „Kaffeemaschine“ はコーヒーメーカーのことで，„Kaffeesatz“ は珈琲の粉の残り滓のこと．ドイツ語で言うと，これに，定理 (Satz — 複数形は Sätze) を掛けた，文句になります．

蛇足かもしれませんが，ここでの，この警句の落ちは，コーヒー中毒の数学者が多い，ということではなく，数学では，証明が肝要である，ということです．

$$\mathbb{Q}^n = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathbb{C}^n = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

等と書くことにする．更に一般的には，K を，任意の体とするとき (54 ページを参照)，

$$K^n = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in K\} \tag{4.2}$$ x-2-0-a

と書くことにする．

ここでの，$\mathbb{R}^n$, K^n 等の記法は，集合 X に対し，X と X 自身のデカルト積 ((2.27) の意味での $X \times X$) を，X^2 と書き，$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{-回}}$ を，X^n と書く，という記法と，被ってしまっている．デカルト積としての K^n は，$\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle : a_1, \ldots, a_n \in K\}$ なので，ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ と，n-組 $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ を，同一視することで，これらの異る K^n を，同じものと，捉えることにする．同様の，問題は，$\mathbb{R}^n$ を，(物理的な) n-次元空間 (の数学的モデル) と同一視するとき ($n = 2, 3$ の場合については，それぞれ，第 4.2 節と，第 4.3 節を参照) にも起きる．

本節の 4.1.1 節と，4.1.2 節で考察される性質は，$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$ を含む，任意の体に対して，同様に証明できる．そこで，以下では，K を，そのような体のどれかとして，K^n で，議論することにする． ♦ m ここから

K^n の要素でゼロ行列となっているもの (第 1 章で導入した記法では $O_{n\times 1}$) を，$\mathbb{0}_n$ と表わし，(n-次元) **ゼロベクトル** (zero vector) と呼ぶことにする．特に n が何かが明らかなときには，この添字を落として $\mathbb{0}$ と書くことにする．

K^n は，ベクトルの和とスカラー倍に関して閉じている．つまり，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in K^n$, $c \in K$ とするとき，$\mathbb{a} + \mathbb{b} \in K^n$ で $c\mathbb{a} \in K^n$ である．

ベクトルは，行列の特別な場合なので [*2]，第 3 章で確立された行列の計算則は，K^n 上の (列) ベクトルの和とスカラー倍に関しても，同様に成り立つ．これは，以下のように纏めることができる:

すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in K^n$ と $r, s \in K$ に対し，以下の等式が成り立つ:

[*2] “特別な場合” という表現については，第 1 章の脚注*12 を参照してください．

x-2-1 (4.3) $\mathbbm{a}+\mathbbm{b}=\mathbbm{b}+\mathbbm{a}$ (ベクトルの和の可換性);

x-2-2 (4.4) $(\mathbbm{a}+\mathbbm{b})+\mathbbm{c}=\mathbbm{a}+(\mathbbm{b}+\mathbbm{c})$ (ベクトルの和の結合律);

x-2-3 (4.5) $\mathbbm{a}+\mathbbm{0}=\mathbbm{0}+\mathbbm{a}=\mathbbm{a}$ (ゼロベクトルの性質);

x-2-4 (4.6) $r(s\mathbbm{a})=(rs)\mathbbm{a}$ (スカラー倍の結合律);

x-2-5 (4.7) $(r+s)\mathbbm{a}=r\mathbbm{a}+s\mathbbm{a}$ (スカラー倍とベクトルの和の分配律);

x-2-6 (4.8) $r(\mathbbm{a}+\mathbbm{b})=r\mathbbm{a}+r\,\mathbbm{b}$ (スカラー倍とベクトルの和の分配律);

x-2-7 (4.9) $1\mathbbm{a}=\mathbbm{a}$ (1 倍律);

x-2-8 (4.10) $0\mathbbm{a}=\mathbbm{0}$ (0 倍律).

上の計算法則は，どれも，第 3 章で示した行列の加法とスカラー倍の基本性質の，特別な場合である．念のため，(4.3) 〜 (4.10) と，第 3 章での補題との対応を，以下に枚挙しておく:

(4.3): 補題 3.2, (3).　(4.4): 補題 3.2, (1).　(4.5): 補題 3.2, (2).
(4.6): 補題 3.4, (1).　(4.7): 補題 3.4, (2).　(4.8): 補題 3.4, (3).
(4.9): 補題 3.4, (5).　(4.10): 補題 3.4, (4).

後で，上の計算法則のセットは，ベクトルの和とスカラー倍の代数的な (等式やその否定を組合せて表現できる) 性質を，すべて包括するものになっていることを示す (定理 7.75 を参照).

次の補題も，ベクトルの，和とスカラー倍の，代数的な (等式やその否定を組み合わせて表現できる) 性質が，上の計算則の組合せの適用で，示せる，ということの例の一つとなっている:

P-2-0 **補題 4.1** $\mathbbm{a}, \mathbbm{b} \in K^n$, $r \in K$ とする．このとき，

(1) $r\,\mathbbm{0}=\mathbbm{0}$.

(2) $\mathbbm{a}\neq\mathbbm{0}$, $r\neq 0$ なら，$r\,\mathbbm{a}\neq\mathbbm{0}$ である．

(3) $r\neq 0$ なら，$\mathbbm{a}=\mathbbm{b} \Leftrightarrow r\,\mathbbm{a}=r\,\mathbbm{b}$ である．

証明． (1): (4.5) により，$\mathbbm{0}+\mathbbm{0}=\mathbbm{0}$ である．したがって，

$$r\,\mathbbm{0}=r(\mathbbm{0}+\mathbbm{0}) \underbrace{=}_{(4.8)\text{ による}} r\,\mathbbm{0}+r\,\mathbbm{0}$$

である．この両端辺に $(-r)\mathbb{0}$ を足すと，

$$r\,\mathbb{0}+(-r)\mathbb{0}=(r\,\mathbb{0}+r\,\mathbb{0})+(-r)\mathbb{0} \tag{4.11}$$

x-2-8-a-a

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}\mathbb{0}\ &\underbrace{=}_{(4.10)\text{ による}}\ 0\,\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{K\text{ での計算}}\ (r+(-r))\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{(4.7)\text{ による}}\ r\,\mathbb{0}+(-r)\mathbb{0}\\ &\underbrace{=}_{(4.11)\text{ による}}\ (r\,\mathbb{0}+r\,\mathbb{0})+(-r)\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{(4.4)}\ r\,\mathbb{0}+(r\,\mathbb{0}+(-r\,\mathbb{0}))\\ &\underbrace{=}_{(4.7)\text{ による}}\ r\,\mathbb{0}+(r+(-r))\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{K\text{ での計算}}\ r\,\mathbb{0}+0\,\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{(4.10)\text{ による}}\ r\,\mathbb{0}+\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{(4.5)\text{ による}}\ r\,\mathbb{0}\end{aligned}$$

である．

(2):　$\mathbb{a}\neq\mathbb{0}$ かつ，$r\neq 0$ とする．特に，後者の仮定から，数 $\frac{1}{r}$ が，取れる．$\mathbb{a}\ \underbrace{=}_{(4.9)}\ 1\mathbb{a}=(\frac{1}{r}\cdot r)\mathbb{a}\ \underbrace{=}_{(4.6)}\ \frac{1}{r}(r\,\mathbb{a})$ だから，もし $r\,\mathbb{a}=\mathbb{0}$ とすると，$\mathbb{a}=\frac{1}{r}(r\,\mathbb{a})=\frac{1}{r}\mathbb{0}\ \underbrace{=}_{(1)\text{ による}}\ \mathbb{0}$ となってしまい，矛盾である．

(3):　$\mathbb{a}=\mathbb{b}$ なら，この等式の両辺を r-倍すると，$r\,\mathbb{a}=r\,\mathbb{b}$ が，得られる (これは，$r=0$ でも，成り立つ)．

逆に，$r\neq 0$ で，$r\,\mathbb{a}=r\,\mathbb{b}$ のとき，この等式の両辺に，$\frac{1}{r}$ を，掛けると，

$$\tfrac{1}{r}(r\,\mathbb{a})=\tfrac{1}{r}(r\,\mathbb{b}) \tag{4.12}$$

x-4-a-0

となるから，

$$\mathbb{a}\ \underbrace{=}_{(4.9)}\ 1\,\mathbb{a}=(\tfrac{1}{r}\cdot r)\mathbb{a}\ \underbrace{=}_{(4.6)}\ \tfrac{1}{r}(r\,\mathbb{a})\ \underbrace{=}_{(4.12)}\ \tfrac{1}{r}(r\,\mathbb{b})\ \underbrace{=}_{(4.6)}\ (\tfrac{1}{r}\cdot r)\mathbb{b}=1\,\mathbb{b}\ \underbrace{=}_{(4.9)}\ \mathbb{b}$$

である．　□ (補題 4.1)

上の補題 4.1, (1), (2) は，ベクトルの和と，スカラー倍の定義に，戻って考えれば，殆ど自明だが，計算則 (4.3) ～ (4.10) が，ベクトルの和と，スカラー倍の，基本性質を，網羅するものになっていて，特に 補題 4.1, (1), (2) 等も，これらの計算則から導ける，という事実は，後で重要になる．

$n \in \mathbb{N}$ と，$i \in \overline{n}$ に対し[*3]，K^n **の，**i **番目の単位ベクトル** (ith unit vector in K^n) $\mathbb{e}_i^n \in K^n$ を，

x-2-8-a-0 (4.13) $$\mathbb{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

とする．n が何かが，明らかなときには，省略して，$\mathbb{e}_i$ と書くこともある．

Ex-2-a **例 4.2** $n = 2$ のとき，

$$\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{e}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．

$n = 3$ のときには，

$$\mathbb{e}_1^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{e}_2^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{e}_3^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である． ❏

x-2-8-a-0-0 (4.14) $$E_n = [\,\mathbb{e}_1^n \quad \mathbb{e}_2^n \quad \cdots \quad \mathbb{e}_n^n\,]$$

である．

任意の $\mathbb{a} \in K^n$ は，$\mathbb{e}_1^n, \ldots, \mathbb{e}_n^n$ の線型結合[*4]として，表わされる:

x-2-8-a-1 (4.15) $$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i \in \overline{n}} a_i \mathbb{e}_i^n = a_1 \mathbb{e}_1^n + \cdots + a_n \mathbb{e}_n^n$$

である．この表現は一意である: $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \neq \langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle$ なら $i \in \overline{n}$ で

[*3] $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\overline{n}$ で，集合 $\{1, \ldots, n\}$ 表わすことにしたのでした — (2.33) を参照してください．

[*4] $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in K^n$ とするとき，$c_1, \ldots, c_k \in K$ によるスカラー倍の和

(∗) $\sum_{i \in \overline{k}} c_i \mathbb{a}_i = c_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + c_k \mathbb{a}_k$

を $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の**線型結合** (linear combination) とよびます．$\langle c_i : i \in \overline{k} \rangle$ は線型結合 (∗) の，**重み付け** (weights) あるいは，**重み付け係数** (weight coefficients) と，よばれる，こともあります．

$a_i \neq a'_i$ となるものがあるが，このときには，$\sum_{i \in \overline{n}} a_i \mathbb{e}_i^n$ と，$\sum_{i \in \overline{n}} a'_i \mathbb{e}_i^n$ の，i-成分は，異るものになり，したがって，$\sum_{i \in \overline{n}} a_i \mathbb{e}_i^n \neq \sum_{i \in \overline{n}} a'_i \mathbb{e}_i^n$ となるからである．

以下では，n-次元列ベクトル $\mathbb{b}$ に，左側から，$m \times n$-行列 A を，掛ける，という形の演算を，考える必要が，屡々出てくる．そのような状況で，次が成り立つことは，有用である:

補題 4.3 A を $m \times n$-行列，$\mathbb{b} \in K^n$ として，$A = [a_{i,j}] = [\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \mathbb{a}_n]$，$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とすると， P-2-0-0

(4.16)　$A\mathbb{b} = b_1\mathbb{a}_1 + \cdots + b_n\mathbb{a}_n$ x-2-8-a-2

である．特に，すべての $i \in \overline{m}$ に対し，

(4.17)　$A\mathbb{e}_i^n = \mathbb{a}_i$ x-2-8-a-3

である．

証明． $i \in \overline{m}$ に対し，

$$A\mathbb{b} \text{ の } i\text{-成分} = \sum_{j \in \overline{n}} a_{i,j} b_j = b_1\mathbb{a}_1 \text{ の } i\text{-成分} + \cdots + b_n\mathbb{a}_n \text{ の } i\text{-成分}$$

となるから，よい． □ (補題 4.3)

4.1.2　ベクトルの差

ベクトルの差は，行列の差 (66 ページを参照) の特別な場合である．2 つのベクトルの差は，ベクトルの和と同様に，成分ごとに差を取る．ということで別途に定義できるが，行列の差でと同じように，-1 によるスカラー倍とベクトルの和とを組み合わせた演算として，理解することもできる． ここでは，後者のやり方を採ることにする． diff

$n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in K^n$ に対し，$-\mathbb{b}$ と，$\mathbb{a}$ の $\mathbb{b}$ との差 $\mathbb{a} - \mathbb{b}$ を，

(4.18)　$-\mathbb{b} := -1\mathbb{b};$ x-2-8-a

(4.19)　$\mathbb{a} - \mathbb{b} := \mathbb{a} + (-\mathbb{b}) \quad (= \mathbb{a} + (-1\mathbb{b}))$ x-2-8-0

として定義する．

この定義を採用することで，次の補題も (演習問題 3.5 でと同様に)，成分ごとの計算にまで遡らなくても，定義 (4.18), (4.19) に戻って，基本性質 (4.3) ～ (4.10) を用いることで，示せることになる．

P-2-1 **補題 4.4** $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in K^n$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $\mathbb{a} - \mathbb{a} = -\mathbb{a} + \mathbb{a} = \mathbb{0}$.

(2) $\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{a} = \mathbb{b} + \mathbb{c}$.

(3) $\mathbb{b} + (\mathbb{a} - \mathbb{b}) = \mathbb{a}$.

(4) $-(\mathbb{a} - \mathbb{b}) = \mathbb{b} - \mathbb{a}$.

(5) $\mathbb{a} = \mathbb{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{b} - \mathbb{a} = \mathbb{0}$.

証明． (1): $\mathbb{a} - \mathbb{a} \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義 (4.19)}} \mathbb{a} + (-1\mathbb{a}) \underbrace{=}_{(4.9)} 1\mathbb{a} + (-1\mathbb{a}) \underbrace{=}_{(4.7)} (1 + (-1))\mathbb{a} \overbrace{=}^{K\text{ での計算}} 0\,\mathbb{a} \underbrace{=}_{(4.10)} \mathbb{0}$

である． $-\mathbb{a} + \mathbb{a} = \mathbb{0}$ は，このことと，ベクトルの和の可換性 (4.3) から，導かれる．

(2): まず，等式 $\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c}$ が成り立つ，と仮定する．この両辺に，$\mathbb{b}$ を足すと，等式 $(\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b} = \mathbb{c} + \mathbb{b}$ が得られる．この等式の左辺は，

x-2-8-1
$$(\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b} \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義 (4.19)}} (\mathbb{a} + (-\mathbb{b})) + \mathbb{b} \underbrace{=}_{(4.4)} \mathbb{a} + ((-\mathbb{b}) + \mathbb{b}) \underbrace{=}_{(1)\text{ による}} \mathbb{a} + \mathbb{0} \underbrace{=}_{(4.5)} \mathbb{a} \tag{4.20}$$

と変形できる．一方，同じ等式の右辺は，(4.3) により $\mathbb{b} + \mathbb{c}$ に等しいから，$\mathbb{a} = \mathbb{b} + \mathbb{c}$ が導かれる．

逆に，等式 $\mathbb{a} = \mathbb{b} + \mathbb{c}$ が，成り立つ，とすると，この等式の両辺に，$-\mathbb{b}$ を，足して，(4.20) と同様の変形を，左辺に行なうことにより，$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c}$ が導かれる．

(3): $\mathbb{b} + (\mathbb{a} - \mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{“}-\text{” の定義 (4.19)}} \mathbb{b} + (\mathbb{a} + (-\mathbb{b})) \underbrace{=}_{(4.3)} \mathbb{b} + (-\mathbb{b} + \mathbb{a})$

$\underbrace{=}_{(4.4)} (\mathbb{b} + (-\mathbb{b})) + \mathbb{a} \underbrace{=}_{(1)\text{ による}} \mathbb{0} + \mathbb{a} \underbrace{=}_{(4.5)} \mathbb{a}.$

$$(4):\quad -(\mathbb{a}-\mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{“$-$” の定義 (4.19)}} -1(\mathbb{a}+(-1\mathbb{b})) \underbrace{=}_{(4.8)} -1\mathbb{a}+(-1)(-1\mathbb{b}) \overbrace{=}^{(-1)(-1)=1,\ (4.9),\ (4.6)\ \text{による}} -1\mathbb{a}+\mathbb{b}$$

$$\underbrace{=}_{(4.3)} \mathbb{b}+(-1\mathbb{a}) \underbrace{=}_{\text{“$-$” の定義 (4.19)}} \mathbb{b}-\mathbb{a}.$$

(5): $\mathbb{a}=\mathbb{b}$ とすると，$\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{a}-\mathbb{a} \underbrace{=}_{(1)\ \text{による}} \mathbb{0}$ である．

逆に，$\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{0}$ とすると，

$$\mathbb{a} \underbrace{=}_{(3)} \mathbb{b}+(\mathbb{a}-\mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{上の仮定}} \mathbb{b}+\mathbb{0} \underbrace{=}_{(4.3)} \mathbb{b}$$

により，$\mathbb{a}=\mathbb{b}$ である．

以上で $\mathbb{a}=\mathbb{b}$ と $\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{0}$ の同値性が示せたが，このことと，$=$ の対称性 (特に，$\mathbb{a}=\mathbb{b} \iff \mathbb{b}=\mathbb{a}$) から，$\mathbb{a}=\mathbb{b}$ と $\mathbb{b}-\mathbb{a}=\mathbb{0}$ の同値性も，従う．

❏ (補題 4.4)

系 4.5 K^n の要素の和と，スカラー倍の，演算では，数の場合と同様の，移項の原理が，成り立つ．例えば，$\mathbb{a},\ \mathbb{b},\ \mathbb{c},\ \mathbb{d} \in K^n$ $a,\ b,\ c,\ d \in K$ のとき，$a\,\mathbb{a}+b\,\mathbb{b}=c\,\mathbb{c}+d\,\mathbb{d}$ と，$a\,\mathbb{a}-d\,\mathbb{d}=c\,\mathbb{c}-b\,\mathbb{b}$ は，同値である． P-2-1-0

証明． 上の等式の変形について見てみる．

$$\begin{aligned} a\,\mathbb{a}+b\,\mathbb{b}=c\,\mathbb{c}+d\,\mathbb{d} &\iff a\,\mathbb{a}=(c\,\mathbb{c}+d\,\mathbb{d})-b\,\mathbb{b} && ;\ \text{補題 4.4 (2)} \\ &\iff a\,\mathbb{a}=(c\,\mathbb{c}-b\,\mathbb{b})+d\,\mathbb{d} && ;\ \text{(4.3) と，(4.4) の，複数回適用} \\ &\iff a\,\mathbb{a}-d\,\mathbb{d}=c\,\mathbb{c}-b\,\mathbb{b} && ;\ \text{補題 4.4 (2).} \end{aligned}$$

♦ \ubecause を用いた書き方に変更する!

❏ (系 4.5)

4.1.3　ベクトルの内積

この小節では，$\mathbb{R}^n$ の ベクトルについて考察する．実は，$\mathbb{C}^n$ でも同様の議論ができるが，その場合には，定義等に，多少の，一般化や，修正が，必要となる．これについては，第 II 巻で扱うことになる． inner-prod

♦ 複素数体上の内積空間は第 II 巻で扱かう

2 つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ として，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ の，**内積** (inner product) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}$ を [*5]，

x-2-8-2

$$(4.21)\quad (\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \sum_{i \in \overline{n}} a_i b_i$$

で定義する．$(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ は，${}^t\mathbb{a}\mathbb{b} \in \mathbb{R}^1$ に対応する $\mathbb{R}$ の要素である．より正確には，$[(\mathbb{a}, \mathbb{b})] = {}^t\mathbb{a}\mathbb{b}$ である [*6]．既に述べた，$\mathbb{R}$ の要素と，$\mathbb{R}^1$ の要素の，同一視[*7] $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1, r \mapsto [r]$ により $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = {}^t\mathbb{a}\mathbb{b}$ と考えてしまうことも多い．この同一視 $r \mapsto [r]$ では，実数の，足し算と，スカラー倍も，1×1 ベクトルの，足し算と，スカラー倍に，自然に同一視されていることに注意する．

次の補題で枚挙することになる，内積の基本性質は，定義に戻って計算することで容易に確かめられるが，上のような $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^1$ の同一視により，行列の計算則の特別な場合として，捉えることもできる．

P-2-1-1

補題 4.6 任意の $\mathbb{a}, \mathbb{a}', \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，次が成り立つ:

(1) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\mathbb{b}, \mathbb{a})$,

(2) $(\mathbb{a} + \mathbb{a}', \mathbb{b}) = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{a}', \mathbb{b})$,

(3) $(c\,\mathbb{a}, \mathbb{b}) = c(\mathbb{a}, \mathbb{b})$,

(4) $\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ なら，$(\mathbb{a}, \mathbb{a}) > 0$ である． ❑

(3) と，(4.10) と，(1) から，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

x-2-8-3

$$(4.22)\quad (\mathbb{0}, \mathbb{a}) = (\mathbb{a}, \mathbb{0}) = 0$$

であることが，導ける [*8]．

次の補題は，第 II 巻で述べることになる定理のの特別な場合である．

♦ pairwise orthogonal なら独立は第 II 巻で述べる

[*5] $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}^n$ ではなく，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}$ であることに注意してください．

[*6] この等式の左辺は，実数 $(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ を $(1, 1)$-成分とする 1-次元ベクトルを，表わしています．

[*7] 例 3.7 と，それに続くパラグラフ (67 ページ) を，参照してください．

[*8] (4.22) は，内積の定義から直接に導くこともできまますが，第 II 巻で示すことになるように，補題 4.6 の (1)～(4) は，内積の基本性質を網羅しているので，そのことの 現れの 1 つとして，(4.22) が，これらの性質から導けることを，確認することには，意義があります．

補題 4.7 $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{0}_n\}$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \mathbb{0}$ なら，$\mathbb{a}$ は，$\mathbb{b}$ のスカラー倍ではない (つまり，$\mathbb{a} = r\,\mathbb{b}$ となるような $r \in \mathbb{R}$ は，存在しない). P-2-1-1-0

証明． 対偶命題を，示す．$r \in \mathbb{R}$ で $\mathbb{a} = r\,\mathbb{b}$ となるものがあるとすると，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ により，$r \neq 0$ である．補題 4.6, (3) により，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (r\,\mathbb{b}, \mathbb{b}) = r(\mathbb{b}, \mathbb{b})$ だが，$\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ と，補題 4.6, (4) により，この右辺は，$\neq 0$ となる．したがって，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \neq 0$ である． □ (補題 4.7)

補題 4.8 （1） $i, j \in \overline{n}$ に対し，$(\mathbb{e}^n_i, \mathbb{e}^n_j) = \delta_{i,j}$ である [*9]. P-2-1-2

（2） 任意の K 上の n-次正方行列 A に対し，$A = [a_{i,j}] = [\,\mathbb{a}_1\,\mathbb{a}_2 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ とすると，$i, j \in \overline{n}$ に対し，

$$(\mathbb{e}^n_i, A\mathbb{e}^n_j) = a_{i,j}$$

が成り立つ．

証明． $\mathbb{e}^n_k = \begin{bmatrix} \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} \\ \vdots \\ \delta_{n,k} \end{bmatrix}$ であることに注意する．

$$(1): \quad (\mathbb{e}^n_i,\, \mathbb{e}^n_j) = \sum_{k \in \overline{n}} \delta_{k,i}\delta_{k,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ のとき}; \\ \delta_{i,i}\delta_{i,i} = 1, & i = j \text{ のとき} \end{cases}$$

だから，$(\mathbb{e}^n_i,\, \mathbb{e}^n_j) = \delta_{i,j}$ である．

$$(2): \quad (\mathbb{e}^n_i, A\mathbb{e}^n_j) = (\mathbb{e}^n_i, \mathbb{a}_j) = \sum_{k \in \overline{n}} \delta_{k,i} a_{k,j} = a_{i,j} \text{ である．}$$

□ (補題 4.8)

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{a}$ の**ノルム** (norm) $\|\,\mathbb{a}\,\|$ を，

$$(4.23) \quad \|\,\mathbb{a}\,\| := \sqrt{(\mathbb{a},\, \mathbb{a})}$$ x-2-8-4

で定義する．補題 4.6, (4) により，この定義は，意味をなすものとなっている．

$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ とすると，内積の定義から，

$$(4.24) \quad \|\,\mathbb{a}\,\| = \sqrt{\sum_{i \in \overline{n}} (a_i)^2}$$ x-2-8-5

[*9] $\delta_{i,j}$ は，6 ページで導入した，クローネカのデルタです．

である．次の補題は，(4.24) から明らかであるが，定義 (4.23) 経由で内積の基本性質からも示せる．

P-2-1-3 **補題 4.9** すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\mathbb{a}\| \geq 0$ で，$\|\mathbb{a}\| = 0$ となるのは，$\mathbb{a} = \mathbb{0}$ である，ちょうどそのときである．

証明． 補題 4.6, (4) により，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ なら $\|\mathbb{a}\| = \sqrt{(\mathbb{a},\,\mathbb{a})} > 0$ である．一方 $\mathbb{a} = \mathbb{0}$ なら，(4.22) により，$\|\mathbb{a}\| = \sqrt{(\mathbb{a},\,\mathbb{a})} = 0$ である． □ (補題 4.9)

P-2-1-4 **補題 4.10** $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $\|c\,\mathbb{a}\| = |c|\,\|\mathbb{a}\|$.

(2) $|(\mathbb{a},\,\mathbb{b})| \leq \|\mathbb{a}\| \cdot \|\mathbb{b}\|$ 　(シュヴァルツの不等式 *10).

(3) $\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\| \leq \|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|$.

証明． (1): $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|c\,\mathbb{a}\| \underbrace{=}_{\|\cdot\|\text{ の定義 }(4.23)} \sqrt{(c\,\mathbb{a},\,c\,\mathbb{a})} \underbrace{=}_{\text{補題 }4.6,(1),(3)} \sqrt{c^2(\mathbb{a},\,\mathbb{a})}$

$= \sqrt{c^2}\,\sqrt{(\mathbb{a},\,\mathbb{a})} \underbrace{=}_{|\cdot|\text{ の特徴付け}} |c|\sqrt{(\mathbb{a},\,\mathbb{a})} \underbrace{=}_{\|\cdot\|\text{ の定義 }(4.23)} |c|\,\|\mathbb{a}\|$ である．

(2): $\mathbb{a} = \mathbb{0}$ のときには，不等式の両辺が 0 となるのでよい．

$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ のときには，$\|\mathbb{a}\| \neq 0$ である (補題 4.9)．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，

x-2-8-5-0
$$\|t\,\mathbb{a} + \mathbb{b}\|^2 \underbrace{=}_{\|\cdot\|\text{ の定義 }(4.23)} (t\,\mathbb{a} + \mathbb{b},\, t\,\mathbb{a} + \mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{補題 }4.6,(1),(2),(3)} t^2\|\mathbb{a}\|^2 + 2t(\mathbb{a},\,\mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2 \tag{4.25}$$

*10 シュヴァルツ (ドイツ語で „Schwartz“ は，「黒」の意味です) という名前の，重要な仕事をした数学者は何人かいます．ここでのシュヴァルツは，ドイツの数学者 Hermann Schwartz (1843(天保 14 年)–1921(大正 10 年)) です．この不等式は，コーシー・シュヴァルツの不等式，または，コーシー・ブニャコフスキー・シュヴァルツの不等式 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz inequality) と，呼ばれることもあります．

なお，ここであげた証明は，前書きでも触れたように，三宅 [43] でも，採用されているものですが，んんみやけ@三宅敏恒，1944(昭和 19 年)〜この証明を含めた，シュヴァルツの不等式の証明は，現在では，幾つも知られています．これらの証明については，英語版の wikipedia のページ

https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarz_inequality

が，参考になります．

となるが，この式は (左辺により) 常に ≥ 0 である．したがって，(4.25) の右辺を t の二次式と見たときには，この式の根の数は ≤ 1 でなくてはならないから，この式の判別式

$$(4.26)\quad D = \Big(2(\mathbb{a},\, \mathbb{b})\Big)^2 - 4\|\,\mathbb{a}\,\|^2\|\,\mathbb{b}\,\|^2 = 4((\mathbb{a},\, \mathbb{b})^2 - \|\,\mathbb{a}\,\|^2\|\,\mathbb{b}\,\|^2)$$

は ≤ 0 でなくてはならない．この不等式は，$|\,(\mathbb{a},\, \mathbb{b})\,| \leq \|\,\mathbb{a}\,\| \cdot \|\,\mathbb{b}\,\|$ と同値である．

$$(3):\quad \|\,\mathbb{a}+\mathbb{b}\,\|^2 \underbrace{=}_{\text{ノルムの定義 (4.23) による}} (\mathbb{a}+\mathbb{b},\ \mathbb{a}+\mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{補題 4.6,(1),(2),(3)}} (\mathbb{a},\ \mathbb{a}) + 2(\mathbb{a},\ \mathbb{b}) + (\mathbb{b},\ \mathbb{b})$$

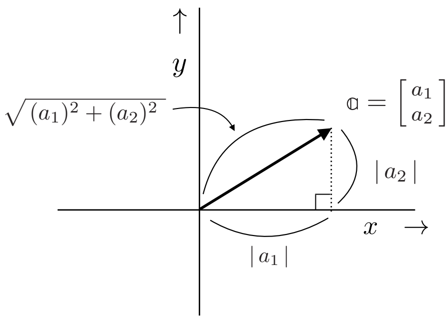
$$\underbrace{=}_{\text{ノルムの定義 (4.23) による}} \|\,\mathbb{a}\,\|^2 + 2(\mathbb{a},\, \mathbb{b}) + \|\,\mathbb{b}\,\|^2 \underbrace{\leq}_{\text{(2) による}} \|\,\mathbb{a}\,\|^2 + 2\|\,\mathbb{a}\,\|\,\|\,\mathbb{b}\,\| + \|\,\mathbb{b}\,\|^2$$

$$= (\|\,\mathbb{a}\,\| + \|\,\mathbb{b}\,\|)^2$$

だから，$\|\cdot\|$ が，負の値をとらないこと (補題 4.9) から，$\|\,\mathbb{a}+\mathbb{b}\,\| \leq \|\,\mathbb{a}\,\|+\|\,\mathbb{b}\,\|$ である．　❑ (補題 4.10)

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ とすると，$\|\,\mathbb{a}\,\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$ となるが，これは，三平方の定理 (ピュタゴラスの定理) により，xy-平面上での，変位ベクトル $\mathbb{a}$ の大きさ (長さ) に対応する値である:

figur10x



したがって，$\mathbb{a},\, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

♦ figur10x.pdf

$$(4.27)\quad d(\mathbb{a},\, \mathbb{b}) := \|\,\mathbb{b} - \mathbb{a}\,\|$$

x-2-8-6

とすると，$n = 2$ のとき，$d(\mathbb{a},\, \mathbb{b})$ は，点 $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ の間の，**距離** (distance) に対応する値となる (後で，$n = 3$ のときにも，$d(\mathbb{a},\, \mathbb{b})$ が，空間の 2 点の，(幾何学的な意味での) 距離に対応するものになることを見る — 159 ページを参照)．実際，$d(\cdot, \cdot)$ は，距離の概念の満たすべき性質 (距離の公理 — 407 ページを参

照) を，すべて満たすことが確かめられる:

♦ 付録 B でここを refer する!

P-2-1-5 **補題 4.11** $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，次が成り立つ:

(1) $d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \geq 0$ で，$d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = 0$ となるのは，$\mathbb{a} = \mathbb{b}$ となる，ちょうどそのときである．

(2) $d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = d(\mathbb{b}, \mathbb{a})$ である．

(3) $d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + d(\mathbb{b}, \mathbb{c}) \geq d(\mathbb{a}, \mathbb{c})$ (三角不等式).

証明． (1): $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(\mathbb{a},\mathbb{b}) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{d\text{ の定義 }(4.27)} \|\,\mathbb{b}-\mathbb{a}\,\| = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{補題 }4.9} \mathbb{b}-\mathbb{a} = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{補題 }4.4,(5)} \mathbb{a} = \mathbb{b}$$

である．

$$(2):\quad d(\mathbb{a},\mathbb{b}) \underbrace{=}_{d\text{ の定義 }(4.27)} \|\,\mathbb{a}-\mathbb{b}\,\| \underbrace{=}_{\text{補題 }4.4,(4)} \|\,-(\mathbb{b}-\mathbb{a})\,\| \underbrace{=}_{\text{補題 }4.10,(1)} \|\,\mathbb{b}-\mathbb{a}\,\| \underbrace{=}_{d\text{ の定義 }(4.27)} d(\mathbb{b},\mathbb{a}).$$

$$(3):\quad d(\mathbb{a},\mathbb{b}) + d(\mathbb{b},\mathbb{c}) \underbrace{=}_{d\text{ の定義 }(4.27)} \|\,\mathbb{a}-\mathbb{b}\,\| + \|\,\mathbb{b}-\mathbb{c}\,\| \underbrace{\geq}_{\text{補題 }4.10,(3)} \|\,(\mathbb{a}-\mathbb{b})+(\mathbb{b}-\mathbb{c})\,\|$$

$$\underbrace{=}_{(4.4)\text{ と補題 }4.4,(1)} \|\,\mathbb{a}-\mathbb{c}\,\| \underbrace{=}_{d\text{ の定義 }(4.27)} d(\mathbb{a},\mathbb{c}).$$

□ (補題 4.11)

4.2 2-次元ベクトルの演算と平面幾何

4.2.1 2-次元平面上の点と直線

2-dim

points-and-lines 第 4.1 節で導入した記法では，

$$\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}$$

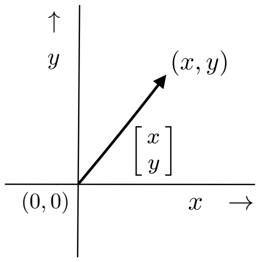
だが，記号 $\mathbb{R}^2$ は，2-次元平面を，表わすのに，用いられることも多い．2-次元平面は，座標系を入れて，各点を，それらの座標 (x, y) と，同一視することによって，集合 $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ として扱かわれる．

ここでは，座標 (x, y) と，実数上の 2-次の列ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を，同一視して，

$\mathbb{R}^2$ で，これらの全体を集めた集合を表わすことにする．

ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は，したがって，平面の点 (x, y) の別表現とも見なされることになるが，この見方を強調するときには，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は，**位置ベクトル** (position vector) であるという．$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を，位置ベクトルと見るときには，$\mathbb{a}$ を，$\mathbb{R}^2$ の**点** (point) と呼ぶこともある．

これに対し，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は，xy-平面上の原点 $(0, 0)$ を，点 (x, y) に移す，平面上の平行移動 : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の表現，と捉えることもできる．ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を，このように見るとき，これを，**変位ベクトル** (displacement vector) と呼ぶ，こともある．変位ベクトルとしての $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は，原点 $(0, 0)$ を始点として，点 (x, y) を終点とする，有向線分 (矢印のついた線分) で表現できる．

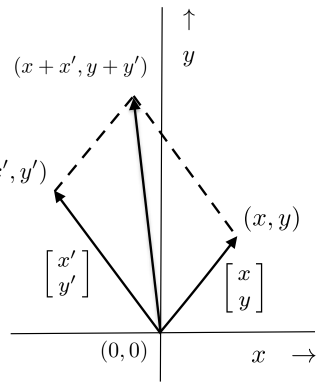


♦ figur01x.pdf

ベクトルの和は，行列の和の特別な場合として，$\mathbb{R}^2$ では，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}$$

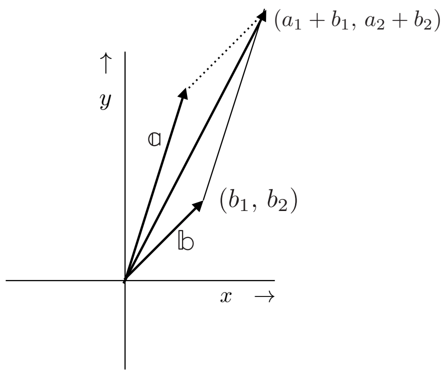
となるもの，として定義されているから，これを平面上の矢印の記法の表現にあてはめてみると，



♦ figur02x.pdf
addition+scaler-multiplication

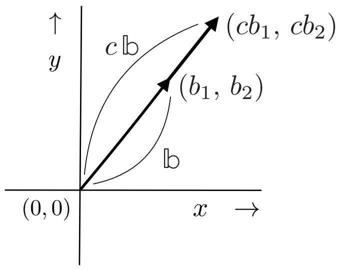
のような絵が描けるので，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ は，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ の 2 つの線分を 2 辺とする平行四辺形の，原点を始点とする対角線を与える，変位ベクトルに，対応していることが，分かる．

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を位置ベクトルと看做し，$\mathbb{a}$ を変位ベクトルと看做したときの，$\mathbb{a} + \mathbb{b}$ は，点 $\mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ だけ平行移動した結果と捉えることもできる．



♦ figur03x.pdf

ベクトル $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$ の，$c \in \mathbb{R}$ によるスカラー倍は，$c\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{bmatrix}$ だが，$\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ とすると，これは，$c > 0$ のときには，変位ベクトル $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を倍率 c で拡大 $(1 > c > 0$ のときには縮小) したものである．



◆ figur04x.pdf

$c < 0$ のときには，$c\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ は，$|c|\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の方向を逆転したものになる．

$c = 0$ のとき，または，$\mathbb{b} = \mathbb{0}$ のときには，$c\,\mathbb{b} = \mathbb{0}$ である．

特に，上の観察から，$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{0}$ と異るときには，

$$(4.28)\quad \ell = \{r\,\mathbb{b} \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$ x-2-9

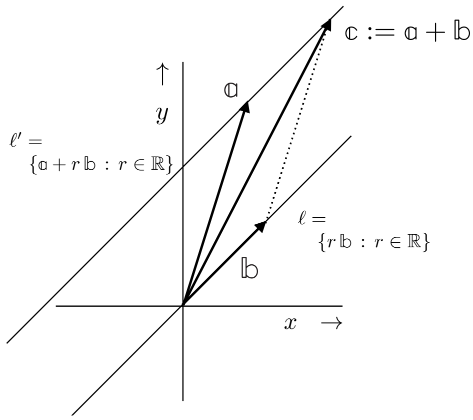
は，点 $\mathbb{0}$, $\mathbb{b}$ を通る直線，となることが分かる．既に見たように，“$\cdot + \mathbb{a}$” (あるいは，$+$ の可換性から，これと同等な “$\mathbb{a} + \cdot$”) は，変位 $\mathbb{a}$ による平行移動を惹き起こす．直線を平行移動したものは，再び直線になるので，

$$(4.29)\quad \ell' = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$ x-2-10

は，$\mathbb{a} + 0\,\mathbb{b} = \mathbb{a}$ と $\mathbb{a} + 1\,\mathbb{b} = \mathbb{a} + \mathbb{b}$ を通る直線となる [*11]．

[*11] ここでは，直線に対する “直観” から，“(4.28) で定義された集合が，点 $\mathbb{0}$, $\mathbb{b}$ を通る直線となる”，“(4.29) で定義された集合が，点 $\mathbb{a}$, $\mathbb{a} + \mathbb{b}$ を通る直線となる” 等と言っているわけですが，直観を排して数学理論を構築する立場では，(4.28), (4.29) は，それぞれ，点 $\mathbb{0}$, $\mathbb{b}$ を通る直線の定義と，より一般的な，点 $\mathbb{a}$, $\mathbb{c} = \mathbb{a} + \mathbb{b}$ を通る直線の定義として取り扱われることになります．このように，ある概念の直観的な理解から，対応する形式的な表現を導き出した後で，直観の足場を取り去って，この表現をその概念の定義として，そこでの数学的体系に再導入する，という作業は，様々な数学理論の基礎的な部分を構築する際に頻繁に行なわれることになります [*12]．

[*12] 微分積分の講義の初めの方で出てくる，関数のグラフの接線の扱いも，そのようなものの典型的な例の 1 つです．そこでは，グラフの接線の傾きの直観的な理解を足掛りにして微分係数が導入された後，この直観の足場を取り去って，微分可能な関数のグラフのある点での，微分係数を用いた接線の (再) 定義がなされることになります．



♦ figur08.pdf

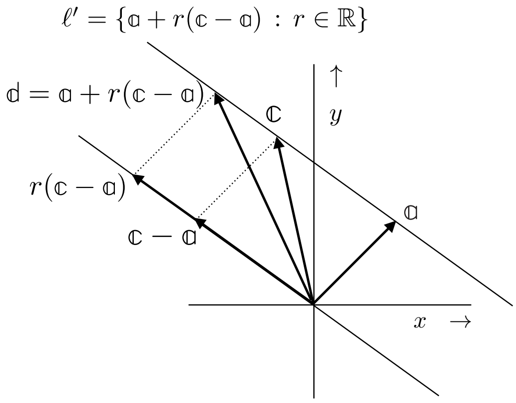
$\mathbb{c} := \mathbb{a} + \mathbb{b}$ とすると，$\mathbb{b} = \mathbb{c} - \mathbb{a}$ だから，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{c}$ を通る (1 つの) 直線 [*13] となっている集合 $\{\mathbb{a} + r(\mathbb{c} - \mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\}$ は，(4.29) での直線 ℓ' と，一致する．つまり，

x-2-10-1 (4.30) $\ell' = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{c} - \mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\}$

幾何学的な直観としては，(4.30) が，点 $\mathbb{a}$ と，$\mathbb{c}$ を通る，直線を表わす式となっていることは，次のように理解することができる: $\mathbb{a}, \mathbb{c}, \mathbb{d} \in \mathbb{R}^2$ を，互いに異るベクトルとして，$\mathbb{a}, \mathbb{c}, \mathbb{d}$ を位置ベクトルと見る．$\mathbb{d}$ (に対応する平面上の点) が，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{c}$ (に対応する平面上の点) の間の線分上にあるのは，

x-2-11 (4.31) ある $r \in (0, 1)$ に対し，$\mathbb{d} = \mathbb{a} + r(\mathbb{c} - \mathbb{a})$ となる

ときである．



♦ figur09.pdf

*13 ここで，“1 つの”，と書いているのは，幾何学的な直観以外には，そのような直線が一意に決まるかどうかは，この時点ではまだ不明だからです．

次の補題 4.12 は，後で導入されることになる用語を用いると，$\mathbb{R}^2$ に次元の概念がうまく定義されていて，それが 2 である (つまり $\mathbb{R}^2$ は 2 次元である) ということを主張しているものとなっている (定理 7.11 と，その前後を参照). 4.2.2 節で，補題 4.12 の，任意の体への一般化となっているもの (補題 4.36) の証明を，与える．

補題 4.12 $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ で，$\mathbb{a}$ は，$\mathbb{b}$ のスカラー倍でないとき (つまり，どんな $r \in \mathbb{R}$ に対しても，$\mathbb{a} = r\,\mathbb{b}$ とならないとき)，任意の $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$a\,\mathbb{a} + b\,\mathbb{b} = \mathbb{c}$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ が，一意に存在する [*14*15]． P-2-2

証明． 補題 4.36 の証明を参照． ❏ (補題 4.12)

次の補題は，ユークリッド幾何の「異る 2 点を通る直線は一意に決まる」という公理に対応するものである．

補題 4.13 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ を直線として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ とするとき， P-2-2-0

$$(4.32)\quad \ell = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$ x-2-11-0

である．特に，$\mathbb{R}^2$ の任意の異る 2 点に対し，それらを通る直線は，ちょうど一つ存在する．

証明． ℓ は直線だから ((4.29) の前後の考察から)，$\mathbb{a}_0, \mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^2$ で，

$$(4.33)\quad \ell = \{\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0 \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$ x-2-11-1

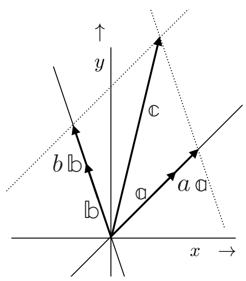
となるものが，取れる．

$$(4.34)\quad \ell' = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$ x-2-11-2

---

*14 「一意に存在する」というのは，英語での “... exists uniquely” という表現に対応する，数学ではよく使われる表現で，(該当する性質を持つものが) 「ちょうど 1 つ (ここでは，ちょうど一組) 存在する」，という意味です．

*15 次のような幾何学的直観からは，この命題は “明らか” です:



♦ figur12x.pdf

とする．$\ell = \ell'$ が示したいことである．(2.21) により，このためには，$\ell \subseteq \ell'$ と $\ell' \subseteq \ell$ を示せばよい．

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \ell$ だから，$r', r'' \in \mathbb{R}$ で，

x-2-11-3 $$(4.35)\quad \mathbb{a} = \mathbb{a}_0 + r'\mathbb{b}_0, \qquad \mathbb{b} = \mathbb{a}_0 + r''\mathbb{b}_0$$

となるものが，取れる．(4.35) の第 2 式から第 1 式をひくと，

x-2-11-3-0 $$(4.36)\quad \mathbb{b} - \mathbb{a} = (r'' - r')\mathbb{b}_0$$

が得られる．$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ は異るので，補題 4.4, (5) により，$\mathbb{b} - \mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ だから，(4.10) により，$r'' - r' \neq 0$ である．したがって，等式 (4.36) の両辺を $r'' - r'$ で割ることができて，

x-2-11-4 $$(4.37)\quad \mathbb{b}_0 = \frac{1}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a})$$

が得られる．この等式と，(4.35) の最初の式から，

$$\mathbb{a}_0 = \mathbb{a} - r'\mathbb{b}_0 = \mathbb{a} - \frac{r'}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) = \frac{r''}{r'' - r'}\,\mathbb{a} - \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{b}$$

となるので，

x-2-11-5 $$(4.38)\quad \mathbb{a}_0 = \frac{r''}{r'' - r'}\,\mathbb{a} - \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{b}$$

である．

まず，$\ell \subseteq \ell'$ を示す: 任意の $\mathbb{c} \in \ell$ に対し，(4.33) により，$r \in \mathbb{R}$ で $\mathbb{c} = \mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0$ となるものが，取れる．このとき，(4.37) と (4.38) から，

$$\begin{aligned}
\mathbb{c} = \mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0 &= \frac{r''}{r'' - r'}\,\mathbb{a} - \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{b} + \frac{r}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \\
&= \left(\mathbb{a} + \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{a}\right) - \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{b} + \frac{r}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \\
&= \mathbb{a} + \left(\frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{a} - \frac{r'}{r'' - r'}\,\mathbb{b}\right) + \frac{r}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \\
&= \mathbb{a} + \frac{-r'}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) + \frac{r}{r'' - r'}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) = \mathbb{a} + \frac{r - r'}{r'' - r}(\mathbb{b} - \mathbb{a})
\end{aligned}$$

となり，この等式の最右辺から，$\mathbb{c} \in \ell'$ が分かる．したがって，$\ell \subseteq \ell'$ である．

次に，$\ell' \subseteq \ell$ を示す: 任意の $\mathbb{c} \in \ell'$ に対し，(4.34) により，$r \in \mathbb{R}$ で，

$\mathbb{c} = \mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a})$ となるものが，取れる．このとき，(4.35) により，

$$\begin{aligned}\mathbb{c} &= \mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) = (\mathbb{a}_0 + r'\mathbb{b}_0) + r((\mathbb{a}_0 + r''\mathbb{b}_0) - (\mathbb{a}_0 + r'\mathbb{b}_0)) \\ &= \mathbb{a}_0 + (r' + rr'' - rr')\,\mathbb{b}_0\end{aligned}$$

である．この式の最右辺から，$\mathbb{c} \in \ell$ が，分かる．したがって，$\ell' \subseteq \ell$ である．

以上で，$\ell = \ell'$ が示せたが，これが示したいことだった．

逆に，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ を，任意の，異る 2 点とするとき，(4.34) で定義された直線 ℓ' は，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を，通るものになるが，上の議論から，任意の $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を通る直線は，この ℓ' と一致する． □ (補題 4.13)

平面上の点や，直線の持つ (べき)，他の性質も，上の補題 4.12，補題 4.13 を使うと，直線のベクトルの演算を用いた定義から導くことができる．例えば，

定理 4.14 任意の直線 $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，次の 3 つのうち，どれかちょうど 1 つが成り立つ: (i)　$\ell \cap \ell' = \emptyset$, (ii)　$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ で，$\ell \cap \ell' = \{\mathbb{c}\}$ となるもの [*16] が，存在する (つまり，ℓ と ℓ' は，1 点で交じわる), (iii) $\ell = \ell'$ (ℓ と ℓ' は，同一の直線である). P-2-2-1

証明． $\ell \cap \ell'$ が，2 つ以上の要素を持つなら，$\ell \cap \ell'$ の 2 つの異る要素を，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ とすると，補題 4.13 により，$\ell = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\} = \ell'$ となるから，$\ell = \ell'$ である．したがって，$\ell \cap \ell' = \emptyset$ であるか，$\ell \cap \ell'$ は，singleton であるか，$\ell = \ell'$ であるか，という 3 つの場合のどれかが，成り立つことが，分る，3 つの場合の 2 つが，同時に成り立つことは，あり得ないので，これらのうちの，ちょうど 1 つが，成り立っている．

□ (定理 4.14)

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ を，位置ベクトルと見るとき，点 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ を通る直線 ℓ は，補題 4.13 により，一意に決まり，$\ell = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\}$ と表現できる．この直線 ℓ を，$\mathbb{a}\,\overline{\ \ }\,\mathbb{b}$ とも表わすことにする．

[*16] ある対象 a に対して，この対象のみを要素として持つ，$\{a\}$ の形をしている集合のことを，英語で singleton とよびます．条件 (ii) は，この用語を使うと，$\ell \cap \ell'$ は singleton である，と表現できます．本書では，これを英語のままで singleton と書くことにします．日本語では，片仮名で「シングルトン」と書くこともあり，これは「ビルジング」のような，昭和初期のレトロな感じが出ていて良い，と言えないこともないかもしれませんが，「スィングルトン」とするもの厭味なので ... .

ℓ の点 (つまり，ℓ の要素となっているベクトル) $\mathbb{c}$ を，$\mathbb{c} = \mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a})$ と表わすとき，$\mathbb{c}$ が，点 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の間にあるのは，$0 \leq r \leq 1$ のときである[*17]．そこで，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ の間の**線分** (line segment) $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を，

x-2-11-6 $$(4.39)\quad \mathbb{a}\urcorner\mathbb{b} = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \,:\, r \in \mathbb{R},\, 0 \leq r \leq 1\}$$

と定義する．$\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b} \subsetneqq \ell$ である．$\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ の定義は，$\mathbb{a} = \mathbb{b}$ の場合にも有効であるが，このときには，$\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b} = \{\mathbb{a}\}$ となる． $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ の場合も含めて考えるときには，これを，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ の間の**区間** (interval, line segment) と呼ぶことにする．

区間 $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ の**長さ**を，$d(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ で定義する．87 ページでの，ピュタゴラスの定理による考察で見たように，この区間の長さの定義は，$\mathbb{R}^2$ に対する幾何学的直観と，整合するものになっている．

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ として，ℓ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を通る直線とする．r, $s \in \mathbb{R}$、$r + s \neq 0$ に対し，

x-2-11-7 $$(4.40)\quad \mathbb{c} := \mathbb{a} + \frac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a})$$

を，線分 $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を，$r : s$ **に分割する点** (point deviding the line segment in ratio $r : s$)，と呼ぶことにする． 実際，このような $\mathbb{c}$ に対し，$d(\mathbb{a}, \mathbb{c}) = \|\mathbb{c} - \mathbb{a}\| = \|\frac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a})\| = |\frac{r}{r+s}| \cdot \|\mathbb{b} - \mathbb{a}\| = |\frac{r}{r+s}|\, d(\mathbb{a}, \mathbb{b})$, $d(\mathbb{c}, \mathbb{b}) = \|\mathbb{b} - \mathbb{c}\| = \|\frac{s}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a})\| = |\frac{s}{r+s}| \cdot \|\mathbb{b} - \mathbb{a}\| = |\frac{s}{r+s}|\, d(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ となるから，

x-2-11-8 $$(4.41)\quad d(\mathbb{a}, \mathbb{c}) : d(\mathbb{c}, \mathbb{b}) = |r| : |s|$$

である．

ℓ のすべての点は，ある r, $s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ に対して，区間 $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を $r : s$ に分割する点として表現できる．$\mathbb{c} \in \ell$ に対して，このような r, s の組は，一意に決まらないが，(4.40) により，$\frac{r}{r+s}$ と $\mathbb{c} \in \ell$ の対応は，1-1 onto となる．

$0 \leq \frac{r}{r+s} \leq 1$ なら， $\mathbb{c} \in \mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ である; $\frac{r}{r+s} < 0$ なら，$\mathbb{c}$ は，ℓ の $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ の “左側” (つまり，$\mathbb{a}$ の側) の領域の要素で，$\frac{r}{r+s} > 1$ なら，$\mathbb{c}$ は ℓ の $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ の “

---

fn-2-a [*17] $r = 0$ のとき， $\mathbb{c} = \mathbb{a}$ となり，$r = 1$ のとき $\mathbb{c} = \mathbb{b}$ になる，ことに注意してください．$0 < r < 1$ のときには，$\mathbb{c}$ は $\mathbb{a}$ とも $\mathbb{b}$ とも異る，これらの点の真に間にある点となっています．体 $\mathbb{R}$ に，標準的な線型順序 $<$ が備わっていることが，ここでの議論や区間の分割の概念の導入で不可欠となっている，ことに注意してください．

右側” (つまり，$\mathbb{b}$ の側) の領域の要素である．

一般性のために，$\mathbb{a} = \mathbb{b}$ の場合にも，$r, s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ に対し，(4.40) で定まる $\mathbb{c}$ を，**区間** $\mathbb{a}\ulcorner\mathbb{b}$ **を** $r : s$ **に分割する点**と呼ぶことにする．ただし，この場合には，すべての $r, s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ に対し，$\mathbb{c} = \mathbb{a}$ である．

直線 $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ が，互いに素なとき (つまり，$\ell \cap \ell' = \emptyset$ を満たすとき)，ℓ と，ℓ' は，**平行** (parallel) である，という[*18]．

♦ linear-mappings.tex もこの modification を加えて書きなおす．

この定義が，幾何学的直観を反映するものとなっていることは，定理 4.14, 補題 4.15，定理 4.17 で，見ることができる．

補題 4.15 $\mathbb{a}, \mathbb{a}' \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{b}, \mathbb{b}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ として，直線 ℓ, ℓ' を， P-2-3

x-2-12

$$\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}\ :\ r \in \mathbb{R}\}, \tag{4.42}$$
$$\ell' = \{\mathbb{a}' + r\,\mathbb{b}'\ :\ r \in \mathbb{R}\}$$

とする．このとき，

（1） ℓ と，ℓ' が，平行なら，$\mathbb{a} \neq \mathbb{a}'$ で，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}'$ のスカラー倍である．

（2） $\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}'$ のスカラー倍で，$\ell \neq \ell'$ なら，ℓ と ℓ' は平行である．

（3） $\mathbb{a}'$ は，$\mathbb{a}$ のスカラー倍で，$\mathbb{a}' \neq \mathbb{a}$ で，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{a}$ のスカラー倍でなく，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}'$ のスカラー倍なら，ℓ と ℓ' は，平行である．

証明． (1):　$\ell \cap \ell' = \emptyset$ とする．

このとき, $\mathbb{a} \neq \mathbb{a}'$ である: もし $\mathbb{a} = \mathbb{a}'$ とすると，$\mathbb{a} + 0\,\mathbb{b} = \mathbb{a} = \mathbb{a}' = \mathbb{a}' + 0\,\mathbb{b}'$ だから，$\mathbb{a} \in \ell \cap \ell'$ となり，$\ell \cap \ell' \neq \emptyset$ となって，仮定に矛盾するからである．

もし，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}'$ の，スカラー倍でないなら，補題 4.12 により，$r, r' \in \mathbb{R}$ で，

$$r\,\mathbb{b} + r'\mathbb{b}' = \mathbb{a}' - \mathbb{a}$$

となるものが存在する．(系 4.5 により，)

$$\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} = \mathbb{a}' + (-r')\mathbb{b}'$$

[*18] 次の 4.3 節，4.4 節では $n > 2$ に対する $\mathbb{R}^n$ での直線の平行性を考察しますが，そこでの平行の定義は，ここでのものではなく，それに,「ℓ と，ℓ' は，同一平面上にある」という条件を，付け加えたものに，なります．

となるから，$\mathbb{a}+r\,\mathbb{b}\in\ell\cap\ell'$, したがって，$\ell\cap\ell'\neq\emptyset$ となってしまい，仮定に矛盾である．

(2):　一般性を失なうことなく，$\mathbb{b}=\mathbb{b}'$ としてよい．対偶命題である，“$\ell\cap\ell'\neq\emptyset$ なら，$\ell=\ell'$ である”，を示す．

$\mathbb{d}\in\ell\cap\ell'$ とすると，$r, r'\in\mathbb{R}$ で，

x-2-12-a

$$\mathbb{d}=\mathbb{a}+r\,\mathbb{b}=\mathbb{a}'+r'\mathbb{b} \tag{4.43}$$

となるものが存在する．

(4.43) により，$\mathbb{a}=\mathbb{a}'+(r'-r)\mathbb{b}$ だから，任意の $r''\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}+r''\mathbb{b}=\mathbb{a}'+(r'-r+r'')\mathbb{b}\in\ell'$ である．したがって，$\ell\subseteq\ell'$ となり，定理 4.14 により，$\ell=\ell'$ である．

(3):　(2) により，$\ell\neq\ell'$ が，示せれば，十分である．仮定から，(4.44)：$\mathbb{a}'=r\mathbb{a}$　となる r があり，$\mathbb{a}\neq\mathbb{a}'$ により，$\mathbb{a}\neq\mathbb{0}$, かつ，(4.45)：$r\neq 1$　である．

x-2-12-a-a-0

$\mathbb{a}'=\mathbb{a}'+0\mathbb{b}'\in\ell'$ だから，$\mathbb{a}'\notin\ell$ が言えればよい．もし，$\mathbb{a}'\in\ell$ だったとすると，

x-2-12-a-a-2

(4.46)：$\mathbb{a}'=\mathbb{a}+r'\mathbb{b}$　となる $r'\in\mathbb{R}$ が，取れる．したがって，(4.44) と (4.46) から，$r\mathbb{a}=\mathbb{a}+r'\mathbb{b}$ である．この式から，移項して，

$$(1-r)\mathbb{a}+r'\mathbb{b}=\mathbb{0}$$

が，得られる．(4.45) から，$1-r\neq 0$ だから，$(1-r)\mathbb{a}\neq\mathbb{0}$ である．したがって，$r'\neq 0$ である．よって，$\mathbb{b}=\frac{r-1}{r'}\mathbb{a}$ となるが，これは，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{a}$ のスカラー倍でない，という仮定に矛盾する．　□ (補題 4.15)

既に述べたように，変位ベクトルとしての $\mathbb{t}\in\mathbb{R}^2$ は，2 次元平面上の**平行移動** (translation) $\mathbb{a}\mapsto\mathbb{a}+\mathbb{t}$ を惹き起こすもの，と見做すことができる．この平行移動を $t_{\mathbb{t}}$ と表わすことにする．

x-2-13

$$t_{\mathbb{t}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \mathbb{a}\mapsto\mathbb{a}+\mathbb{t} \tag{4.47}$$

である．

P-2-4

補題 4.16 任意の $\mathbb{t}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{0}\}$ に対し，以下が，成り立つ．

（1）　$t_{\mathbb{t}}$ は，$\mathbb{R}^2$ の 2 点の距離を保存する．つまり，任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = d(t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}), t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b}))$ である．

（2）　$t_{\mathbb{t}}$ は，$\mathbb{R}^2$ から，$\mathbb{R}^2$ への，全単射である．

（3）　任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，直線である．

（4）　$\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ を，直線として，$\mathbb{a}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ を，$\ell = \{\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0 : r \in \mathbb{R}\}$ と，なるものとする．このとき，

(α) $\mathbb{t}$ が，$\mathbb{b}_0$ のスカラー倍なら，$\ell = t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ である．

(β) $\mathbb{t}$ が，$\mathbb{b}_0$ のスカラー倍でないなら，$\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell = \emptyset$ である (つまり $t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，ℓ と 平行な直線となる)．

（5）　任意の直線 $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ と，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

(α) $\ell \cap \ell' = \emptyset \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell' = \emptyset$;

(β) $\ell \cap \ell' = \{\mathbb{a}\} \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell' = \{t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})\}$;

(γ) $\ell = \ell' \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell = t_{\mathbb{t}}{}''\ell'$.

証明． (1):　$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{aligned} d(t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}), t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b})) &\underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}(\cdot)\text{ の定義 }(4.47)\text{ による}} d(\mathbb{a}+\mathbb{t}, \mathbb{b}+\mathbb{t}) \underbrace{=}_{d(\cdot)\text{ の定義 }(4.27)\text{ による}} \|\,(\mathbb{b}+\mathbb{t}) - (\mathbb{a}+\mathbb{t})\,\| \\ &= \|\,\mathbb{b} - \mathbb{a}\,\| \underbrace{=}_{d(\cdot)\text{ の }(4.27)\text{ 定義による}} d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \end{aligned}$$

である．

(2):　$t_{\mathbb{t}}$ が単射であることは，(1) から従う．任意の $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{a} := \mathbb{b} - \mathbb{t}$ とすれば，$t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}) = \mathbb{a} + \mathbb{t} = (\mathbb{b} - \mathbb{t}) + \mathbb{t} = \mathbb{b}$ となるから，$t_{\mathbb{t}}$ は，上射でもある．

(3):　$\mathbb{a}_0, \mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\ell = \{\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0 : r \in \mathbb{R}\}$ とすると，

$$\begin{aligned} t_{\mathbb{t}}{}''\ell &= \{t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0) : r \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}(\cdot)\text{ の定義 }(4.47)\text{ による}} \{(\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0) + \mathbb{t} : r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\mathbb{a}_0 + \mathbb{t}) + r\,\mathbb{b}_0 : r \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{4.48}$$

x-2-13-0

だから，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，直線である．

(4) (α): $\mathbb{t} = c\,\mathbb{b}_0$ とすると，

$$t_{\mathbb{t}}{}''\ell \underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}(\cdot)\text{ の定義 (4.47) による}} \{(\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0) + \mathbb{t} \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\mathbb{a}_0 + (r+c)\mathbb{b}_0 \,:\, r \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{*19} \{\mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0 \,:\, r \in \mathbb{R}\} = \ell$$

である．

(β): $\mathbb{t}$ が，$\mathbb{b}_0$ のスカラー倍でないなら，$\mathbb{a}_0 + \mathbb{t} \notin \ell$ である: もし，$\mathbb{a}_0 + \mathbb{t} \in \ell$ だったとすると，ある $r \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}_0 + \mathbb{t} = \mathbb{a}_0 + r\,\mathbb{b}_0$ となるが，この等式の両辺から $\mathbb{a}_0$ を引いて，$\mathbb{t} = r\,\mathbb{b}_0$ が，得られる．これは，$\mathbb{t}$ が，$\mathbb{b}_0$ のスカラー倍でない，という仮定に矛盾である．

他方，$\mathbb{a}_0 + \mathbb{t} \in t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ だから，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell \neq \ell$ である．したがって，(4.48) と，補題 4.15, (2) により，ℓ と，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，平行である．

(5): (2) によりよい (補題 2.6 を参照)．　□ (補題 4.16)

P-2-5 **定理 4.17** (平行線の公理) $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ を，直線として，$\mathbb{p} \in \mathbb{R}^2$ を，ℓ 上にない点とする (つまり，$\mathbb{p} \notin \ell$ とする)．このとき，$\mathbb{p}$ を通る直線 ℓ' で，ℓ と平行なものが，一意に存在する．

証明． 補題 4.16 により，必要なら，$t_{-\mathbb{p}}$ で，ℓ と，$\mathbb{p}$ を，平行移動することにより，一般性を失なうことなく，$\mathbb{p} = \mathbb{0}$ としてよい．$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ と，$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ を，

x-2-14 (4.49) $\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} \,:\, r \in \mathbb{R}\}$

となるように取る．$\mathbb{0} \notin \ell$ だから，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ で，$\mathbb{a}$ は，$\mathbb{b}$ のスカラー倍ではない．$\mathbb{a}' = \mathbb{0}$ として，任意の，$\mathbb{0}$ を通る直線 ℓ' は，ある $\mathbb{b}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ に対して，

x-2-15 (4.50) $\ell' = \{\mathbb{a}' + r\,\mathbb{b}' \,:\, r \in \mathbb{R}\}$

と表わせる．$\mathbb{a}' = 0\,\mathbb{a}$ だから，$\mathbb{a}'$ は，$\mathbb{a}$ のスカラー倍である．したがって，補題 4.15, (3) により，ℓ' が，ℓ と，平行になるのは，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}'$ のスカラー倍と

---

*19 $\mathbb{R} \ni r + c \mapsto r \in \mathbb{R}$ が全単射であることによる．

なる，ちょうどそのときである．ℓ' は，この条件で一意に決まるので，定理の主張が，成り立つ． □ (定理 4.17)

4.2.2　線型写像とアファイン写像

$\mathbb{R}$ 上の 2×2-行列 A を，$\mathbb{R}^2$ の要素に左側からかける演算は，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を惹き起こす．この写像を，φ_A と表わす，ことにする． afine

$$(4.51)\quad \varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \mathbb{a} \mapsto A\mathbb{a}$$ x-2-16

である．

例 4.18　(1) $\varphi_{E_2} = id_{\mathbb{R}^2}$ である． Ex-2-0

(2)　$c \in \mathbb{R}$ とすると，任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\varphi_{cE_2}(\mathbb{a}) = c\,\mathbb{a}$ である．

(3)　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると，任意の $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，
$\varphi_A(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ である．

(4)　$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，任意の $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，
$\varphi_B(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\varphi_C(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \end{bmatrix}$ である．
□

例 4.18 の (1), (2), (3), (4) での写像は，それぞれ，恒等写像，スカラー倍，座標の交換，x-座標，および，y-座標への射影 [*20]，である．

このように，φ_A という形に表せる関数全体は，多くの自然な写像 : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を含んでいるが，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像が，φ_A という形に表せるためには，以下で見るような制限がある．

まず，より一般的な枠組みで議論するために，(4.51) の記法を次のように拡張する．($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などの) 体 K と $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，A を K 上の $m\times n$ 行列とするとき，

$$(4.52)\quad \varphi_A : K^n \to K^m;\ \mathbb{a} \mapsto A\mathbb{a}$$ x-2-16-0

[*20] (射影や，ここでの 行列 B, C に関する子細については，系 4.60 の前後を参照してください．

とする．m と n の順序に注意する．(4.51) は，上の一般的な定義で，$K=\mathbb{R}$, $m=n=2$ とした場合である．

P-2-6 **補題 4.19** 任意の体 K, $m, n\in\mathbb{N}$ と，K 上の $m\times n$-行列 A に対し，φ_A は，次の性質を満たす．

(1) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b}\in K^n$ に対し，$\varphi_A(\mathbb{a}+\mathbb{b})=\varphi_A(\mathbb{a})+\varphi_A(\mathbb{b})$ が，成り立つ．

(2) すべての $\mathbb{a}\in K^n$, $c\in K$ に対し，$\varphi_A(c\,\mathbb{a})=c\varphi_A(\mathbb{a})$ が，成り立つ．

証明． (1): $\varphi_A(\mathbb{a}+\mathbb{b})\underbrace{=}_{\varphi_A\text{ の定義}}A(\mathbb{a}+\mathbb{b})\underbrace{=}_{\text{補題 3.12, (3)}}A\mathbb{a}+A\mathbb{b}\underbrace{=}_{\varphi_A\text{ の定義}}\varphi_A(\mathbb{a})+\varphi_A(\mathbb{b})$.

(2): $\varphi_A(c\,\mathbb{a})\underbrace{=}_{\varphi_A\text{ の定義}}A(c\,\mathbb{a})\underbrace{=}_{\text{補題 3.12, (5)}}c(A\mathbb{a})\underbrace{=}_{\varphi_A\text{ の定義}}c\varphi_A(\mathbb{a})$.

□ (補題 4.19)

実は，補題 4.19 での，性質 (1), (2) は，K の要素を成分として持つ $m\times n$-行列 A によって，φ_A とあらわすことのできる K^n から K^m への写像の特徴付けとなっている (定理 4.23).

本書全体で重要な役割を果すことになる，線型写像は，この 2 つの性質を満たす写像として定義される: K を ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ などの) 体とするとき，$m, n\in\mathbb{R}$ に対し，$f:K^n\to K^m$ が，**K-線型写像** (K-linear mapping) である，とは，f が，次の (4.53), (4.54) を，満たすことである:

x-2-17 (4.53) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b}\in K^n$ に対し，$f(\mathbb{a}+\mathbb{b})=f(\mathbb{a})+f(\mathbb{b})$ が，成り立つ．

x-2-18 (4.54) すべての $\mathbb{a}\in K^n$, $c\in K$ に対し，$f(c\,\mathbb{a})=c\,f(\mathbb{a})$ が，成り立つ．

K が何かが, 明らかなとき (例えば, この章では, 特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ である) には, “K-” を落として, 単に線型写像と言うことにする．$f:K^n\to K^m$ が，K-線型写像のとき，f が満たす性質 (4.53), (4.54) のことを，f の**線型性** (linearity) または，**K-線型性** (K-linearity) と呼ぶことにする．

Ex-2-0-0 **例 4.20** 補題 4.19 により，任意の体 K に対し，ある K 上の $m\times n$-行列 A によって，$f=\varphi_A$ と表現できるような，写像 $f:K^n\to K^m$ は，線型写像なので，例 4.18 で挙げた写像は，すべて線型写像である．

補題 4.21 $f: K^m \to K^n$ を，線型写像とするとき，$f(\mathbb{0}_m) = \mathbb{0}_n$ である． P-2-6-0

証明． $f(\mathbb{0}_m) + f(\mathbb{0}_m) \underbrace{=}_{(4.53)\text{ による}} f(\mathbb{0}_m + \mathbb{0}_m) \underbrace{=}_{(4.5)\text{ による}} f(\mathbb{0}_m)$ となるから，この等式の両端辺から $f(\mathbb{0}_m)$ を引くと，$f(\mathbb{0}_m) = \mathbb{0}_n$ が，得られる． □ (補題 4.21)

系 4.22 $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{0}\}$ に対し，平行移動 $t_{\mathbb{t}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \mathbb{a} \mapsto \mathbb{a} + \mathbb{t}$ は，線型写像でない． P-2-6-1

証明． $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{0}) = \mathbb{t} \neq \mathbb{0}$ だから，補題 4.21 により，$t_{\mathbb{t}}$ は，線型写像ではない．

□ (系 4.22)

上の例 4.20 でも注意したように，補題 4.19 により，K の要素を成分として持つ $m \times n$-行列 A によって，φ_A と表わすことのできる，K^n から K^m への写像は，線型写像である．実は，この逆も成り立つ．

定理 4.23 任意の写像 $f: K^n \to K^m$ に対し，以下は同値である: P-2-7

(a)　f は，K-線型写像である．

(b)　K 上の $m \times n$-次正方行列 A で，$f = \varphi_A$ となるものが，存在する．

更に，(a) ($\Leftrightarrow$ (b)) が成り立つときには，$f = \varphi_A$ となるような A は，一意に定まり，$\mathbb{a}_1 = f(\mathbb{e}_1^n), \ldots,\ \mathbb{a}_n = f(\mathbb{e}_n^n)$ とすると，$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ である．

証明． (b) $\Rightarrow$ (a) は，補題 4.19 により，よい．

(a) $\Rightarrow$ (b): $f: K^n \to K^m$ を，K-線型写像とする．このとき，

$$(4.55)\quad \mathbb{a}_1 = f(\mathbb{e}_1^n), \ldots,\ \mathbb{a}_n = f(\mathbb{e}_n^n)$$ x-2-19

として，

$$(4.56)\quad A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$$ x-2-19-0

とする．A は，$m \times n$-行列であることに，注意する．

この A に対して，$f = \varphi_A$ が，成り立つことを示す．このためには，任意の $\mathbb{b} \in K^n$ に対し，$f(\mathbb{b}) = \varphi_A(\mathbb{b})$ となることが，示せればよい (補題 2.8 を参照)．$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とすると，$\mathbb{b} = b_1\mathbb{e}_1^n + \cdots + b_n\mathbb{e}_n^n$ だから，f の線型性から，

$$f(\mathbb{b}) = f(b_1\mathbb{e}^n_1+\cdots+b_n\mathbb{e}^n_n) \underbrace{=}_{(4.53)\text{ の繰り返し適用}} f(b_1\mathbb{e}^n_1)+\cdots+f(b_n\mathbb{e}^n_n)$$

$$\underbrace{=}_{(4.54)} b_1 f(\mathbb{e}^n_1)+\cdots+b_n f(\mathbb{e}^n_n) \underbrace{=}_{\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n\text{ の定義 }(4.55)} b_1\mathbb{a}_1+\cdots+b_n\mathbb{a}_n \underbrace{=}_{(4.56)\text{ と }(4.16)} A\mathbb{b}$$

$$\underbrace{=}_{\varphi_A\text{ の定義}} \varphi_A(\mathbb{b})$$

である．

一意性の証明には，A, A' を，K 上の $m\times n$-行列で，$A\neq A'$ とするとき，$\varphi_A\neq\varphi_{A'}$ が，常に成り立つことを，示せばよい．$A=[a_{i,j}]$ $A'=[a'_{i,j}]$ とすると，$A\neq A'$ なら，$i_0\in\overline{m}$, $j_0\in\overline{n}$ で，(4.57)： $a_{i_0,j_0}\neq a'_{i_0,j_0}$ 　となるものが，
x-2-19-1
取れる．このとき，$\varphi_A(\mathbb{e}^n_{j_0})=\begin{bmatrix} a_{1,j_0}\\ \vdots \\ a_{m,j_0}\end{bmatrix}$, $\varphi_{A'}(\mathbb{e}^n_{j_0})=\begin{bmatrix} a'_{1,j_0}\\ \vdots \\ a'_{m,j_0}\end{bmatrix}$, だが，(4.57) により，$\begin{bmatrix} a_{1,j_0}\\ \vdots \\ a_{m,j_0}\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} a'_{1,j_0}\\ \vdots \\ a'_{m,j_0}\end{bmatrix}$ である．したがって，$\varphi_A(\mathbb{e}^n_{j_0})\neq\varphi_{A'}(\mathbb{e}^n_{j_0})$ となり， $\varphi_A\neq\varphi_{A'}$ が，分かる． □ (定理 4.23)

定理 4.23 により，$f:K^n\to K^m$ が線型写像なら，K 上の $m\times n$-行列 A で，$f=\varphi_A$ となるものが，一意に存在するが，このような行列 A のことを，線型写像 f の，**表現行列** (matrix respresenting f) とよぶ．f の表現行列は，A_f と表記することも多い．

定理 4.23 により，$A\mapsto\varphi_A$ は，K の要素を成分とする $m\times n$-行列の全体から，K^n から K^m への線型写像の全体への，1-1 onto の対応を，与えるものになっていることが，分かる．この対応は，行列の積を，線型写像の合成に，対応させるものにもなっている．

P-2-8 **定理 4.24** A と，B を，それぞれ，体 K の要素を成分とする $m\times n$-行列と，$\ell\times m$-行列，とするとき，$\varphi_{BA}=\varphi_B\circ\varphi_A$ が，成り立つ．

証明． $\varphi_A:K^n\to K^m$, $\varphi_B:K^m\to K^\ell$, $\varphi_{BA}:K^n\to K^\ell$ と，なっていることに，注意する．

補題 2.8 により，すべての $\mathbb{a}\in K^n$ に対して，$\varphi_{BA}(\mathbb{a})=\varphi_B\circ\varphi_A(\mathbb{a})$ となることが，示せればよいが，これは，

$$\varphi_{BA}(\mathbb{a}) \underbrace{=}_{\varphi_{BA}\text{ の定義}} (BA)\mathbb{a} \underbrace{=}_{\text{定理 }3.10} B(A\mathbb{a}) \underbrace{=}_{\varphi_A\text{ と }\varphi_B\text{ の定義}} \varphi_B(\varphi_A(\mathbb{a})) \underbrace{=}_{\text{写像の合成の定義}} (\varphi_B \circ \varphi_A)(\mathbb{a})$$

により，よい[*21]. ❑ (定理 4.24)

系 4.25 $f : K^n \to K^m$ と，$g : K^m \to K^\ell$ が，線型写像のとき，$g \circ f : K^n \to K^\ell$ も，線型写像である. P-2-9

証明. 定理 4.23 により，行列 A, B で，$f = \varphi_A$, $g = \varphi_B$ となるものがあるが，定理 4.24 により，$g \circ f = \varphi_{BA}$ だから，定理 4.23 により，$g \circ f$ は，線型写像である. ❑ (系 4.25)

演習問題 4.26 系 4.25 は，$g \circ f$ が，線型写像の定義の式 (4.53), (4.54) を満たすことを，直接的に示すことでも，証明できる. ❑ Exer-2-0-0

補題 4.27 体 K と，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$id_{K^n} = \varphi_{E_n}$ である. P-2-9-0

証明. 任意の $\mathbb{a} \in K^n$ に対し，$\varphi_{E_n}(\mathbb{a}) = E_n\mathbb{a} = \mathbb{a}$ だから，$\varphi_{E_n} = id_{K^n}$ である. ❑ (補題 4.27)

単位行列が，行列の掛け算で，数の掛け算での 1 に対応する性質を持つものだったので，逆数 ($a \in K \setminus \{0\}$ に対する a^{-1}) に対応する，逆行列の概念を，次のように定義することができる.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，A を n-次正方行列とするとき，n-次正方行列 B が，A の**逆行列** (inverse matrix) であるとは，$AB = BA = E_n$ が成り立つこと，とする [*22].

補題 4.28 正方行列 A の逆行列は，存在するなら，一意に存在する. P-2-9-1

証明. B と，B' を，A の逆行列とすると，$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$ となるから，$B = B'$ である. ❑ (補題 4.28)

[*21] 定理 3.10 の前で，定理 3.10 の，定理 4.24 への寄与の重要性を強調しましたが，実際，ここでの証明では，この定理 3.10 が，その要(かなめ)となっていることに，注意してください.

[*22] ここで，$AB = E_n$ だけでなく，$BA = E_n$ も条件に入れているのは，行列の積が，数の積とは異なり，可換でないからです．例えば，補題 4.28 の証明では，この両方の性質が用いられていることに注意してください.

A が，逆行列を持つとき，この，補題 4.28 により，一意に決まるところの逆行列を，A^{-1} と表わす，ことにする．

P-4-a-0 **補題 4.29** 正方行列 A が，逆行列 A^{-1} を持てば，A^{-1} も，逆行列を持ち，$(A^{-1})^{-1} = A$ である．

証明． 逆行列の定義から，$A^{-1}A = E_n$, $AA^{-1} = E_n$ だが，これは，A が A^{-1} の逆行列であることも示している．つまり，$A = (A^{-1})^{-1}$ である．

□ (補題 4.29)

♦ チェックここから

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などでは，0 と異る数には，その逆数が存在するが，これとは異なり，正方行列 A は，ゼロ行列でなくても，逆行列を持つとは限らない．例えば，

P-2-10 **例 4.30** (1) 冪零行列は，逆行列を持たない．

(2) A を，体 K 上の n-次正方行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ とする．ある，異る $j_1, j_2 \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_{j_1} = c\,\mathbb{a}_{j_2}$ となる $c \in K$ が，存在するとき，A は，逆行列を持たない．

(3) A を，体 K 上の n-次正方行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ とする．ある $j \in \overline{n}$ に対して，$\mathbb{a}_j$ が，ゼロベクトルなら，A は，逆行列を持たない．

証明． (1): $A = O_n$ なら, すべての n-次正方行列 B に対し, $AB = O_n \neq E_n$ となるから，A は逆行列を持たない．

$A^k = O_n$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する，とする．このとき，もし，A が，逆行列を持つとすると，$E_n = (A^{-1})^k A^k = (A^{-1})^k O_n = O_n$ となり，矛盾である．

(2): 任意の，K 上の n-次正方行列 B に対し，$BA = [B\mathbb{a}_1\, B\mathbb{a}_2 \cdots B\mathbb{a}_n]$ となるが，BA の j_1-列は，$cB\mathbb{a}_{j_2}$ で，j_2-列は，$B\mathbb{a}_{j_2}$ である．(4.14) に留意して，BA の j_2 列が，$\mathbb{e}^n_{j_2}$ だとすると，j_1 列は，$c\mathbb{e}^n_{j_2} \neq \mathbb{e}^n_{j_1}$ となることから，$BA \neq E_n$ であることが，分かる．B は，任意だったので，A は，逆行列を持たない．

(3): $\mathbb{a}_j = \mathbb{0}$ とする．B を，任意の，K 上の n-次正方行列とすると，BA の j-列は，$B\mathbb{a}_j = B\mathbb{0} = \mathbb{0}$ となるから，$BA \neq E_n$ である．したがって，A は，逆行列を持たない．

□ (例 4.30)

上の例 4.30 は，後に，定理 7.12 の系として見ることができるようになる．

以下の演習問題では，直接証明を課題としているが，後出の定理 5.23 の (e) ⇔ (g) を知っていると，これは，上の例 4.30 から直ちに導ける:

演習問題 4.31 A を，体 K 上の n-次正方行列として， Exer-2-1

$A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ とする．このとき，

(1) ある，異る $i_1, i_2 \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{z}_{i_1} = c\,\mathbb{z}_{i_2}$ となる $c \in K$ が，存在するとき，A は，逆行列を持たない．

(2) ある $i \in \overline{n}$ に対して，$\mathbb{z}_i$ がゼロベクトルなら，A は，逆行列を持たない．

ヒント． 任意の n-次正方行列 B に対し，$AB = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 B \\ \mathbb{z}_2 B \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n B \end{bmatrix}$ となることに留意する． □ (演習問題 4.31)

正方行列 A が，逆行列を持つとき，A は，**可逆**である (invertible)，または，**正則**である (ドイツ語で regulär [*23]) という．

補題 4.32 A と B を，体 K 上の n-次正方行列とするとき，A と B が，可逆なら，AB も，可逆で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となる． P-2-10-0

n-次正方行列 A_1，$A_2, \ldots, A_k$ が，すべて可逆なら，行列の積 $A_1A_2 \cdots A_k$ も，可逆で，$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdots (A_2)^{-1}(A_1)^{-1}$ である．

証明． A と B が，可逆なら，それぞれの逆行列 A^{-1}, B^{-1} が，存在するが，このとき，

$$(4.58)\quad (B^{-1}A^{-1})(AB) \overbrace{=}^{\text{補題 } 3.10} B^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{=E_n}B \overbrace{=}^{\text{補題 } 3.9, (2)} B^{-1}B = E_n,$$ x-2-19-2

*23 日本では，ドイツ語の „regulär“ の訳語と思われる「正則」という用語が，使われることが，多いようですが，英語には，対応する用語は，ないようです．これに近い英語の用語としては “non-singular” という用語が，使われることがあります．本書では，他でも様々な局面で，別の意味に使われることの多い，「正則」ではなく，用語からその内容の推測が容易な，「可逆」の方を，主に使うことにします．

x-2-19-3
$$(4.59)\quad (AB)(B^{-1}A^{-1}) \overbrace{=}^{\text{補題 }3.10} A(\underbrace{BB^{-1}}_{=E_n})A^{-1} \overbrace{=}^{\text{補題 }3.9,\,(2)} AA^{-1} = E_n$$

(と，補題 4.28) により，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．

後半の主張の証明は，これを用いて，帰納法により，示せる (演習!).

□ (補題 4.32)

具体的に与えられた行列が，可逆かどうか，ということの判定は，一般には，それほど簡単でないが (これについては，後出の，定理 5.21，系 6.47 等を参照)，定理 4.35 で見ることになるように，2-次の正方行列では，この判定は，比較的容易にできる．

$f : K^n \to K^n$ を，線型写像とするとき，f が，全単射なら，f の逆写像 $f^{-1} : K^n \to K^n$ が，取れる．

以下で，線型写像 $f : K^n \to K^n$ に対し，A が，f の表現行列なら，f^{-1} が，存在することと，A^{-1} が，存在することは，同値で，これらが，存在するときには，A^{-1} は，f^{-1} の表現行列になることを示す．このために，まず，次を確認しておく:

P-2-11 **補題 4.33** $f : K^n \to K^n$ を，線型写像で，全単射とするとき，f^{-1} も線型写像である．

証明． f^{-1} が，線型写像の定義 (4.53), (4.54) を，満たすことを，示す．

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in K^n$ として，

x-4-0
$$(4.60)\quad \mathbb{a}_1 := f^{-1}(\mathbb{b}_1),\quad \mathbb{a}_2 := f^{-1}(\mathbb{b}_2)$$

とする，

x-4-1
$$(4.61)\quad f(\mathbb{a}_1) = \mathbb{b}_1,\quad f(\mathbb{a}_2) = \mathbb{b}_2$$

である[*24]．このとき，

fn-2-0 *24 等式 $\mathbb{a}_1 = f^{-1}(\mathbb{b}_1)$ の両辺に f を施すと，$f(\mathbb{a}_1) = f(f^{-1}(\mathbb{b}_1)) = \mathbb{b}_1$ となります．$f(\mathbb{a}_2) = \mathbb{b}_2$ も同様に示せます．

$$f^{-1}(\mathbb{b}_1+\mathbb{b}_2) \underbrace{=}_{(4.61)\text{ による}} f^{-1}(f(\mathbb{a}_1)+f(\mathbb{a}_2)) \underbrace{=}_{f\text{ の線型性}} f^{-1}(f(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2))$$

$$\overbrace{=}^{\text{逆写像の定義による}} \mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2 \underbrace{=}_{(4.60)\text{ による}} f^{-1}(\mathbb{b}_1)+f^{-1}(\mathbb{b}_2)$$

である．

$\mathbb{a}\in K^n$ として，$c\in K$ とする．

(4.62) $\mathbb{a}:=f^{-1}(\mathbb{b})$ x-4-2

とすると，

(4.63) $\mathbb{b}=f(\mathbb{a})$ x-4-3

である (脚注∗24 を参照)．したがって，

$$f^{-1}(c\,\mathbb{b}) \underbrace{=}_{(4.63)\text{ による}} f^{-1}(c\,f(\mathbb{a})) \underbrace{=}_{f\text{ の線型性}} f^{-1}(f(c\,\mathbb{a})) \underbrace{=}_{\text{逆写像の定義}} c\,\mathbb{a} \overbrace{=}^{(4.62)\text{ による}} c\,f^{-1}(\mathbb{b})$$

である． □ (補題 4.33)

定理 4.34 体 K と，$n\in\mathbb{N}$ に対し，$f:K^n\to K^n$ を，K-線型写像 として，A を，f の表現行列とする (つまり，A を，K 上の n-次正方行列で，$f=\varphi_A$ となるものとする)．このとき，以下の，(a) と，(b) は，同値である． P-2-11-0

(a) f は，全単射である．

(b) A は，可逆である．

特に，(a) ($\Leftrightarrow$ (b)) が，成り立つときには，$f^{-1}=\varphi_{A^{-1}}$ である．

証明． (a) $\Rightarrow$ (b): f が，全単射だとする．このときには，f の逆写像 f^{-1} が，存在して，補題 4.33 により，f^{-1} は線型写像になる．したがって，定理 4.23 により，K 上の n-次正方行列 B で，$f^{-1}=\varphi_B$ となるものが，存在する．

$$\varphi_{AB} \underbrace{=}_{\text{定理 }4.24} \varphi_A\circ\varphi_B = f\circ f^{-1} = id_{K^n} \underbrace{=}_{\text{補題 }4.27} \varphi_{E_n}$$

である．したがって，対応 $A \mapsto \varphi_A$ が，単射であること（これは，定理 4.23 の後半の一意性の主張から従う）から，$AB = E_n$ である．同様に，$BA = E_n$ も示せるので，$B = A^{-1}$ となり，A は，可逆である．

(b) ⇒ (a):　A を，可逆とすると，A^{-1} が，存在する．$g = \varphi_{A^{-1}}$ とすると，定理 4.24 と，補題 4.27 により，

$$f \circ g = \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{E_n} = id_{K^n}$$

である，同様にして，$g \circ f = id_{K^n}$ も言えるから，補題 2.13, (5) により，g は，f の逆写像で，f は，全単射である．

定理の最後の主張の証明は，上の議論に含まれる．　□ (定理 4.34)

次の定理は，後出の系 6.47 の，特別な場合である [*25]．　この，より一般的な結果の方は，大きな展望のもとに，エレガントに証明されることになるが，ここでは，保留にしてあった，補題 4.12 の証明などの必要のため，今，既に，手元にある道具だけを使って，多少強引に，証明してしまうことにする．

♦ チェックここから 21.03.28(日 16:36(JST))

P-2-12 **定理 4.35** K を体として，$a, b, c, d \in K$ とし，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．また，$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とする．$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 \end{bmatrix}$ である．

このとき，次の (a), (b), (c) は，同値である．

（a）　$ad - bc \neq 0$.

（b）　$\mathbb{a}_1$ は，$\mathbb{a}_2$ のスカラー倍でなく，$\mathbb{a}_2$ も，$\mathbb{a}_1$ のスカラー倍でない [*26].

（c）　A は，可逆である．

更に，(a) (⇔ (b) ⇔ (c)) が成り立つときには，

x-2-20
$$(4.64)\quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

である．

証明． (b) ⇒ (a):　対偶命題: “(a) でない ⇒ （b）でない”，を示す．

---

*25 “特別な場合” という表現については，第 1 章の脚注*12 を，参照してください．

skalar-multiple *26 “スカラー倍でない” は，ここでは，K に関する，スカラー倍のことです．(b) の条件を，以下では，“$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ は，互いに他のスカラー倍でない” と表現することにします．任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in K^n$ 対しても，“$\mathbb{a}_1$ が，$\mathbb{a}_2$ のスカラー倍でなく，$\mathbb{a}_2$ は，$\mathbb{a}_1$ のスカ

(4.65)　$ad - bc = 0$ x-2-21

を仮定する．

場合 1： $ad = 0$ の場合．このときには，仮定 (4.65) から，$bc = 0$ だから，a と d のうちの，少なくとも片方は，0 で，b と，c のうちの，少なくとも片方は，0 である．この場合を，更に，以下の場合に，分けて考える:

場合 1a： $a = 0$, $d \neq 0$, $b = 0$ の場合，$\mathbb{a}_1 = \frac{c}{d}\mathbb{a}_2$ となるので，(b) でない．

場合 1b： $a = 0$, $d \neq 0$, $c = 0$ の場合．$\mathbb{a}_1 = \mathbb{0}$ だから，$\mathbb{a}_1 = 0\mathbb{a}_2$ となるので，(b) でない．

場合 1c： $a = 0$, $d = 0$, $b = 0$ の場合．$\mathbb{a}_2 = \mathbb{0}$ だから，$\mathbb{a}_2 = 0\mathbb{a}_1$ となるので，(b) でない．

場合 1d： $a = 0$, $d = 0$, $c = 0$ の場合．$\mathbb{a}_1 = \mathbb{0}$ だから，$\mathbb{a}_1 = 0\mathbb{a}_2$ となるので，(b) でない．

場合 1e： $a \neq 0$, $d = 0$, $b = 0$ の場合．$\mathbb{a}_2 = \mathbb{0}$ だから，$\mathbb{a}_2 = 0\mathbb{a}_1$ となるので，(b) でない．

場合 1f： $a \neq 0$, $d = 0$, $c = 0$ の場合．$\mathbb{a}_2 = \frac{b}{a}\mathbb{a}_1$ となるので，(b) でない．

以上で，$ad = 0$ のときは，いずれの場合にも，(b) でないことが，示せた．

場合 2： $ad \neq 0$ の場合．この場合には，仮定 (4.65) から，$bc \neq 0$ となるので，a, b, c, d は，いずれも，0 でない．特に，等式 (4.65) を，ac で割って，移項すると，

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

ラー倍でない” ということを，“$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ は，互いに他のスカラー倍でない” と表現することにします．

$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ が，互いに他のスカラー倍でないときには，$\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{0}$ かつ $\mathbb{a}_2 \neq \mathbb{0}$ です．また，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in K^n \setminus \{\mathbb{0}\}$ のときには，$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ が，互いに他のスカラー倍でないことは，$\mathbb{a}_1$ が，$\mathbb{a}_2$ のスカラー倍でないこと，または，$\mathbb{a}_2$ が，$\mathbb{a}_1$ のスカラー倍でないことの，どちらか片方と同値です: $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in K^n \setminus \{\mathbb{0}\}$ のときには，$\mathbb{a}_1$ が，$\mathbb{a}_2$ の，スカラー倍でない，ときには，$\mathbb{a}_2$ は，$\mathbb{a}_1$ のスカラー倍ではないからです (もし，$\mathbb{a}_2 = c\mathbb{a}_1$ と表わせたとすると，$\mathbb{a}_2 \neq \mathbb{0}$ から，$c \neq 0$ なので，$\mathbb{a}_1 = \frac{1}{c}\mathbb{a}_2$ と表わせてしまいます)．

第 7 章で導入されることになる概念を用いると，“$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ は，互いに他のスカラー倍でない” という条件は，“$\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2\}$ は，K 上線型独立である”，と，言い換えることができます (例 7.1, (2) を参照してください)．

となる．したがって，$\mathbb{a}_2 = \frac{b}{a}\mathbb{a}_1$ となり，(b) でない．

以上で，(a) でないときの，すべての場合を，網羅できたので，(a) でないときには，(いずれの場合にも) (b) でないことが，示せた．

(a) ⇒ (c):　$ad - bc \neq 0$ とする．このときには，

x-2-22 $$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

とすると，$AB = BA = E_2$ となることが，計算で確かめられる (演習!)．したがって，$A^{-1} = B$ で，A は，可逆である．

(c) ⇒ (b):　例 4.30, (2) により，よい．　□ (定理 4.35)

上の定理の証明は，(4.66) が，どのようにして得られたのか，ということの説明が欠落している，という点において，不満の残るものである[*27]．定理の前で，「強引に証明している」と言ったのは，このためである．

しかし，定理 4.35 を用いると，保留にしてあった補題 4.12 が容易に示せる．ここでは，同じ証明で示せる，次のような，もう少し，一般化した命題として，証明してみることにする[*28]:

P-2-13 **補題 4.36** (補題 4.12 の，任意の体 K への一般化)．　K を，任意の体として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in K^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ で，$\mathbb{a}$ は，$\mathbb{b}$ のスカラー倍でないとき (つまり，どんな $r \in K$

[*27] この証明では，(4.66) が，オラクル (ギリシャの神の神託 (のようなもの)) として突然与えられています．計算してみれば，(4.66) が，確かに求めるようなものになっていることは，チェックできますが，何が起っているのかを理解したい，という心理的な欲求からは，どうして得られたのかが不明な式表現が，突然証明の中に現れることには，不満が残ります．

天才的な数学者の発明／発見する証明には，時々，このようなオラクルが突然現れて，それが不可能に見える証明を，一瞬で可能にしてしまう，ということが起ることがあります．日本語では，そのような証明は，「天下り的」である，と形容されることもあります．

思考の跳躍は，創造的な数学のためには，ある意味で，不可欠とも言えるのですが，一方，一見オラクルのように思える証明の細部が，後で，もっと高い視点から見たときには，納得のゆく説明がつけられることになる，という展開も稀ではありません．ここでも，そのようなことが起っていることを，後での，補題 5.25 や，系 6.47 で，見ることになります．特に，系 6.47 は，(4.66) の，任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対する，K^n への一般化となっています．

[*28] 後で，この命題は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対する K^n での結果として，更に，一般化されることになります: 例 7.1, (2) により，補題 4.36 は，定理 7.11, (2) の特別な場合になっています．

に対しても $\mathbb{a} = r\,\mathbb{b}$ とならないとき)[*29]，任意の $\mathbb{c} \in K^2$ に対し，$a\,\mathbb{a} + b\,\mathbb{b} = \mathbb{c}$ となる $a, b \in K$ が，一意に存在する．

証明． 仮定から，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ は，ゼロベクトルではないので，$\mathbb{a}$ が，$\mathbb{b}$ のスカラー倍でないことから，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{a}$ のスカラー倍でないことが，従う．したがって，定理 4.35 により，$A = [\mathbb{a}\ \mathbb{b}]$ は可逆である．

$\mathbb{c} \in K^2$ に対し，

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := A^{-1}\mathbb{c}$$

とすると，

$$a\,\mathbb{a} + b\,\mathbb{b} = A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A(A^{-1}\mathbb{c}) = (AA^{-1})\mathbb{c} = E_2\mathbb{c} = \mathbb{c}$$

である．

一意性を示すために，$a', b' \in K$ も，等式 $a'\mathbb{a} + b'\mathbb{a} = \mathbb{c}$ を満たすとすると，

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A^{-1}A\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A^{-1}(\underbrace{a'\mathbb{a} + b'\mathbb{b}}_{=\mathbb{c}}) = A^{-1}\mathbb{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

である． □ (補題 4.36)

次の定理は，「線型写像」という名称の由縁を，説明するものとなっている．ここでは，この定理 4.37 は，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像に関する命題として，記述してあるが，直線の概念を，任意の n に対する，$\mathbb{R}^n$ でのものに，自然に拡張すると，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対する，$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に関する命題に，一般化できる (定理 4.85 を参照)．

定理 4.37 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{R}$-線型写像とするとき，次が成り立つ． P-2-14

（1） 任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，$f''\ell$ は，singleton であるか，直線であるかの，いずれかである．更に，$f \restriction \ell$ は，定数値関数であるか，単射であるかの，いずれかである．

（2） 異る $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ と，$r, s \in \mathbb{R}$ で，$r+s \neq 0$ となるものに対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を，$r : s$ に分割する点とする．このとき，$f(\mathbb{c})$ は，

[*29] この条件は，実は，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ が，互いに他のスカラー倍でない，という条件と同値です: 脚注[*26] を参照してください．

$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ の間の区間 $f(\mathbb{a}) \sqcap f(\mathbb{b})$ を，$r:s$ に分割する点となる．特に，$f''\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b} = f(\mathbb{a}) \sqcap f(\mathbb{b})$ となり，$f(\mathbb{a}) \neq f(\mathbb{b})$ なら，$f \restriction \mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ は，単射である[*30].

（3） $f''\mathbb{R}^2$ は，$\mathbb{R}^2$ か，$\mathbb{0}_2$ を通る直線であるか，$\{\mathbb{0}_2\}$ であるかの，いずれかである．$f''\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ のとき (つまり f が上射のとき) には，f は，単射でもある．

（4） 次は，同値である: (a) f は，単射である; (b) f は，全射である; (c) f は，全単射である．

証明． (1): $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ を直線として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ を，$\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} : r \in \mathbb{R}\}$ となるように取る．このとき，$f''\ell = \{f(\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}) : r \in \mathbb{R}\}$ だが，f は，線型写像なので，この等式の右辺は，$\{f(\mathbb{a}) + r\,f(\mathbb{b}) : r \in \mathbb{R}\}$ に等しい．

$f(\mathbb{b}) = \mathbb{0}$ なら，この集合は，singleton $\{f(\mathbb{a})\}$ になる．

$f(\mathbb{b}) \neq \mathbb{0}$ なら，この集合は，直線だが，このときには，$f \restriction S$ は，単射である: これを言うには，$r, r' \in \mathbb{R}, r \neq r$ なら，$f(\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}) \neq f(\mathbb{a} + r'\,\mathbb{b})$ となることが，示せればよいが，これは，補題 4.4, (5) と，

$$(4.67)\quad f(\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}) - f(\mathbb{a} + r'\,\mathbb{b}) \underbrace{=}_{f\text{ は線型写像}} (f(\mathbb{a}) + r\,f(\mathbb{b})) - (f(\mathbb{a}) + r' f(\mathbb{b}))$$
$$= (r - r')f(\mathbb{b}) \underbrace{\neq}_{\text{補題 4.1, (2)}} \mathbb{0}$$

によりよい．

(2): $\mathbb{c}$ が，区間 $\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ を，$r:s$ に，分割する点なら，$\mathbb{c} = \mathbb{a} + \frac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a})$ だから，f の線型性から，

x-4-4 $$(4.68)\quad f(\mathbb{c}) = f(\mathbb{a} + \tfrac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a})) = f(\mathbb{a}) + \tfrac{r}{r+s}(f(\mathbb{b}) - f(\mathbb{a})))$$

である．したがって，$f(\mathbb{c})$ も，$f(\mathbb{a})$ と，$f(\mathbb{b})$ のなす区間を，$r:s$ に分割する．主張の後半は，このことから従う (演習!).

(3): $f''\mathbb{R}^2 \neq \{\mathbb{0}_2\}$ なら，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ で，$f(\mathbb{a}) \neq \mathbb{0}_2$ となるものが存在

[*30] ここで，$f(\mathbb{a})$ と，$f(\mathbb{b})$ が，等しいかどうかで，場合分けをしていないのは，区間の分割の定義 (4.39) で，区間の 2 つの端点が，等しい場合 (つまり，区間が，singleton になる場合) も，許しているからです．

する．f の線型性から，すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$f(r\,\mathbb{a}) = rf(\mathbb{a})$ となるから，$\mathbb{0}_2 \overline{}\, f(\mathbb{a}) \subseteq f''\mathbb{R}^2$ である．もし，$\mathbb{0}_2 \overline{}\, f(\mathbb{a}) \subsetneqq f''\mathbb{R}^2$ なら，$\mathbb{b}$ で，$f(\mathbb{b})$ が $\mathbb{0}_2 \overline{}\, f(\mathbb{a})$ に含まれないものが存在する．特に，$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ は，互いに他のスカラー倍でないから，補題4.36 により，任意の $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ は，r, $s \in \mathbb{R}$ をうまく選ぶと，$\mathbb{c} = rf(\mathbb{a}) + sf(\mathbb{b})$ と表わせる．f の線型性から，$rf(\mathbb{a}) + sf(\mathbb{b}) = f(r\mathbb{a} + s\mathbb{b})$ だから，$\mathbb{c} \in f''\mathbb{R}^2$ である．したがって，この場合には，$f''\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ である．

$f''\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ のときには，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ を，上のように選ぶと，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ も，互いに他のスカラー倍でない (もし，そうでなければ，f の線型性から，$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ も，(互いに他のスカラー倍でない) でなくなってしまい，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の選び方に矛盾である)．従って，任意の異る $\mathbb{c}, \mathbb{d} \in \mathbb{R}^2$ に対し，異る $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r' \\ s' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で，$\mathbb{c} = r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b}$, $\mathbb{d} = r'\,\mathbb{a} + s'\,\mathbb{b}$ となるものが，取れるが，f の線型性から，

$$f(\mathbb{c}) - f(\mathbb{d}) = (r - r')f(\mathbb{a}) + (s - s')f(\mathbb{b})$$

となる．$\begin{bmatrix} r - r' \\ s - s' \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}_2$ だから，上の式の右辺 $\neq \mathbb{0}_2$ である．したがって，補題4.4, (5) により，$f(\mathbb{c}) \neq f(\mathbb{d})$ となり，f が，単射であることが，示せた．

(4):　ここでは，証明を保留し，以下で，系4.75 として，示す．　❑ (定理 4.37)

定理4.37, (1) での，2 つの場合は，実際に起こり得る:

例 4.38　(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\mathbb{a} \mapsto \mathbb{0}$ は，線型写像だが，すべての直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，$f''\ell = \{\mathbb{0}\}$ である．

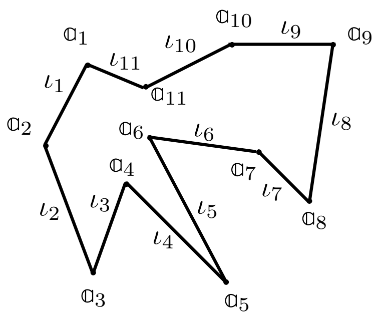
(2)　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると，f は，線型写像だが，$a \in \mathbb{R}$ に対し，$\ell^a = \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\}$ とすると，ℓ^a は，$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る，y-軸と平行な直線で，$f''\ell^a = \{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\}$ である．一方，ℓ^a の形をしていない，任意の $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ に対しては，$f''\ell = \{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$ である．つまり，このときには，$f''\ell$ は，x-軸と一致する．　❑

$k > 2$ に対し，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^2$ を互いに異るものとして，$i \in \overline{k-1}$ に対し，$\iota_i := \mathbb{a}_i \sqcap \mathbb{a}_{i+1}$ とするとき，$\iota_1 \cup \iota_2 \cup \cdots \cup \iota_{k-1}$ の形に表わせる $\mathbb{R}^2$ の部分集

合を，**折線** (おれせん，polygonal chain) とよぶ．

上で，更に $\iota_k = \mathbb{a}_k{}^\frown\mathbb{a}_1$ として，ι_i, $i \in \overline{k}$ が，隣合う ι_i と ι_{i+1} $(i \in \overline{k-1})$ の共通する端点 $\mathbb{a}_{i+1}$ と，ι_k と ι_1 の共通する端点 $\mathbb{a}_1$ 以外に共通する要素を持たないとき，$\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_k$ は，$\mathbb{R}^2$ を，$\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_k$ の内部と外部の 2 つの連結した領域に分割する [*31]．

上のような，ι_i, $i \in \overline{k}$ に対して，$\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_k$ の形に表わせる $\mathbb{R}^2$ の部分集合を，**多角形** (polygon) とよぶことにする．また，$\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_k$ の内部と，その境界 $\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_k$ を合わせた閉領域を，**多角形領域** (polygonal area) とよぶことにする [*32]．



P-2-15 **系 4.39** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}$-線型写像とする．$S \subseteq \mathbb{R}^2$ を，線分 $\iota_1, \ldots, \iota_k$ で囲まれる多角形領域とするとき，f が上射なら，$f''S$ は線分 (または点) $f''\iota_1, \ldots, f''\iota_k$ で囲まれる多角形領域になる．$f''\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^2$ のときには，$f''S$ は，区間となるか，または，$\{\mathbb{0}_2\}$ である．

証明． 多角形領域は三角形に分割されるから (定理 C.3 を参照)，S が 3 辺 ι_1, ι_2, ι_3 で囲まれる三角形の閉領域の場合を考えれば十分である．互いに異る $\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ を，ι_1, ι_2, ι_3 が，それぞれ $\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_2$ と $\mathbb{a}_3$, $\mathbb{a}_3$ と $\mathbb{a}_1$ の間の区間となるように取る．このとき，定理 4.37 により，$f''\iota_1$, $f''\iota_2$, $f''\iota_3$ は，それぞれ，$f(\mathbb{a}_1)$ と $f(\mathbb{a}_2)$, $f(\mathbb{a}_2)$ と $f(\mathbb{a}_3)$, $f(\mathbb{a}_3)$ と $f(\mathbb{a}_1)$ の間の区間となる．$\mathbb{c}^*$ が S の内点なら，ι_1 の上の点 $\mathbb{b}_1$ と ι_2 の上の点 $\mathbb{b}_2$ で，$\mathbb{c}^*$ が，$\mathbb{b}_1$ と

[*31] ここで，説明なしに使っている，内部，外部，連結した，という用語の厳密な定義や，ここで述べた主張 (多角形に関するジョルダンの定理) については，付録 C を参照してください．

[*32] 多角形の定義として，辺が交差したり，角の頂点 (つまり $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$) のいくつかが，一致することも許す流儀もあって，そのような用語の使い方をしているときには，ここでの意味での多角形を，**単純多角形** (simple polygon) と呼びます．

$\mathbb{b}_2$ の間の点となっているようなものが，取れるが，定理 4.37 により，$f(\mathbb{c}^*)$ は $f(\mathbb{b}_1)$ と $f(\mathbb{b}_2)$ の間の点で，$f(\mathbb{b}_1)$ と $f(\mathbb{b}_2)$ の間のすべての点 $\mathbb{d}$ に対し，$\mathbb{b}_1$ と $\mathbb{b}_2$ の間の点 $\mathbb{c}$ で，$f(\mathbb{c}) = \mathbb{d}$ となるようなものが存在する．したがって，$f''S$ は，$f''\iota_1, f''\iota_2, f''\iota_3$ によって囲まれる領域 (これらが互いに 1 点て交わる区間のときには三角形の内部，それ以外のときには，区間，または，singleton) になる．

$f''S$ が，区間になるときには，定理 4.37, (3) により，f は，上射でないから，$f''\mathbb{R}^2$ は，$\mathbb{0}$ を通る直線となる．したがって，S が多角形である一般の場合にも，S を分割する三角形のどれかの f による像が区間となる場合には，$f''S$ も区間である．

$\iota_1, \iota_2, \iota_3$ の囲む領域が三角形であることから，$\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_3 - \mathbb{a}_1$ は互いに他のスカラー倍でない．したがって，補題 4.36 により，すべての $\mathbb{R}^2$ の点は，$\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_3 - \mathbb{a}_1$ の線型結合 $r(\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_1) + s(\mathbb{a}_3 - \mathbb{a}_1)$ の形に書けるが，$f''S$ が singleton となるときには，任意の $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$r, s \in K$ を，上のように取ると，

$$f(\mathbb{c}) = f(r(\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_1) + s(\mathbb{a}_3 - \mathbb{a}_1)) = \mathbb{0}_2$$

となる．したがって，この場合には $f''\mathbb{R}^2 = \{\mathbb{0}_2\}$ となり，特に，$f''S = \{\mathbb{0}_2\}$ である．このことから，上と同様に，一般の多角形 S の場合にも，この分割に含まれる三角形の，少なくとも一つの，f での像が，singleton になるときには，実は，$f''\mathbb{R}^2 = \{\mathbb{0}_2\}$ で，$f''S = \{\mathbb{0}_2\}$ である． ❑ (系 4.39)

例 4.40 （1） $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ として，$f = \varphi_A$ とする．$S \subseteq \mathbb{R}$ を，$\mathbb{a}_1 = \mathbb{0}$, Ex-2-1
$\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 頂点とする三角形とすると，$f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$, $f(\mathbb{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$, $f(\mathbb{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ だから，系 4.39 により，$f''S$ は，$\mathbb{0}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ を 3 頂点とする三角形である．

（2） $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ として，$g = \varphi_B$ とする．$S \subseteq \mathbb{R}^2$ を，(1) での三角形とすると，$g(\mathbb{a}_1) = \mathbb{0}$, $g(\mathbb{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g(\mathbb{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ だから，系 4.39 により，$f''S$

は，区間 $\mathbb{0}\urcorner\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ である． □

実は，定理 4.37 の逆も成り立つ．

P-2-15-0 **定理 4.41** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が，線型写像であることと，以下の，(4.69) と，(4.70) が，成り立つことは，同値である．

x-2-22-0 (4.69) $f(\mathbb{0})=\mathbb{0}$;

x-2-22-1 (4.70) 任意の $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}\in\mathbb{R}^2$ と r, $s\in\mathbb{R}$, $r+s\neq 0$ に対し，$\mathbb{c}\in\mathbb{R}^2$ が区間 $\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を $r:s$ に分割するなら，$f(\mathbb{c})$ も区間 $f(\mathbb{a})\urcorner f(\mathbb{b})$ を $r:s$ に分割する．

証明． この定理は，後述の定理 4.85 の特別な場合であるので，証明は，そこで与える． □ (定理 4.41)

$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ が線型写像なら，$f(\mathbb{0})=\mathbb{0}$ となるのだった (補題 4.21)．この制限を除くために，線型写像に，平行移動を合成して得られる写像も，考えることにして，このようなものを，アファイン写像と呼ぶことにする: つまり，$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ が，**アファイン写像** (afine mapping) であるとは，ある線型写像 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ と，$\mathbb{t}\in\mathbb{R}^n$ があって，

x-2-22-2 (4.71) すべての $\mathbb{a}\in\mathbb{R}^m$ に対し，$f(\mathbb{a})=g(\mathbb{a})+\mathbb{t}$

となること，とする．

$\mathbb{t}=\mathbb{0}_n$ とすると，上の f は，g と等しくなるから，線型写像は，アファイン写像の特別な場合となっていることが分かる．

$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ が，アファイン写像で，線型写像 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ と，$\mathbb{t}\in\mathbb{R}^n$ が，(4.71) を満たすとき，補題 4.21 により，$g(\mathbb{0}_m)=\mathbb{0}_n$ だから，$f(\mathbb{0}_m)=g(\mathbb{0}_m)+\mathbb{t}=\mathbb{t}$ となる．このことから，次が分かる．

P-2-15-1 **補題 4.42** $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ が，アファイン写像となるのは，写像 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$; $\mathbb{a}\mapsto f(\mathbb{a})-f(\mathbb{0})$ が，線型写像となる，ちょうどそのときである．

特に，f が，アファイン写像のときには，$\mathbb{t}:=f(\mathbb{0})$ とすると，平行移動 $t_{\mathbb{t}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$; $\mathbb{b}\mapsto\mathbb{b}+\mathbb{t}$ と，上の g に対し，$f=t_{\mathbb{t}}\circ g$ である．

証明． 補題の前半の主張の “⇒” は，補題の上の注意から明らかである．

逆に，$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n;\ \mathbb{a} \mapsto f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{0})$ が，線型写像なら，$\mathbb{t} = f(\mathbb{0})$ とすると，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$ に対し，$f(\mathbb{a}) = (f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{0})) + f(\mathbb{0}) = g(\mathbb{a}) + f(\mathbb{0}) \underbrace{=}_{g\text{ の線型性による}} g(\mathbb{a}) + \mathbb{t}$ だから，f は，アファイン写像である．

補題の後半の主張については，任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$ に対し，

$$\begin{aligned} t_{\mathbb{t}} \circ g(\mathbb{a}) &\underbrace{=}_{\text{関数の合成の定義}} t_{\mathbb{t}}(g(\mathbb{a})) \underbrace{=}_{g\text{ の定義}} t_{\mathbb{t}}(f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{0})) \underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}\text{ の定義}} (f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{0})) + f(\mathbb{0}) \\ &= f(\mathbb{a}) \end{aligned}$$

となるから，$f = t_{\mathbb{t}} \circ g$ である．　❑ (補題 4.42)

$\mathbb{t} \in \mathbb{R}^2$ に対して，平行移動 $t_{\mathbb{b}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \mathbb{a} \mapsto \mathbb{a} + \mathbb{b}$ は，直線を，直線に移す (補題 4.16, (3)) が，$t_{\mathbb{b}}$ は，区間の分割も保存する．

補題 4.43 $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^2$ として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ とし，$r,\ s \in \mathbb{R},\ r + s \neq 0$ とする． P-2-15-2
$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ を，区間 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{b}$ を $r : s$ に分割する点とするとき，$t_{\mathbb{t}}(\mathbb{c})$ は，区間 $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})\sqcap t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b})$ を $r : s$ に分割する．

証明． $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ が，区間 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{b}$ を $r : s$ に分割するとき，このことの定義 (4.40) から，

$$\mathbb{c} = \mathbb{a} + \frac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \tag{4.72}$$ x-2-22-3

だから，

$$\begin{aligned} t_{\mathbb{t}}(\mathbb{c}) &\underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}\text{ の定義}} \mathbb{c} + \mathbb{t} \underbrace{=}_{(4.72)} \mathbb{a} + \frac{r}{r+s}(\mathbb{b} - \mathbb{a}) + \mathbb{t} \\ &= \mathbb{a} + \mathbb{t} + \frac{r}{r+s}((\mathbb{b} + \mathbb{t}) - (\mathbb{a} + \mathbb{t})) \underbrace{=}_{t_{\mathbb{t}}\text{ の定義}} t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}) + \frac{r}{r+s}(t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b}) - t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})) \end{aligned}$$

である．したがって，$t_{\mathbb{t}}(\mathbb{c})$ は，区間 $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})\sqcap t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b})$ を $r : s$ に分割する．

❑ (補題 4.43)

以上の準備から，次のような，アファイン写像の特徴付け定理が，得られる．

定理 4.44 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が，アファイン写像であることと，以下の (4.70) が，成り立つことは，同値である． P-2-15-3

(4.70) 任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ と，$r, s \in \mathbb{R}, r+s \neq 0$ に対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ が，区間 $\mathbb{a} \frown \mathbb{b}$ を，$r : s$ に分割するなら，$f(\mathbb{c})$ も，区間 $f(\mathbb{a}) \frown f(\mathbb{b})$ を，$r : s$ に分割する．

証明． f が, アファイン写像なら, f は, ある $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^2$ と, 線型写像 $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ により，$t_{\mathbb{t}} \circ f_0$ と表わせる (補題 4.42) から，定理 4.41 と補題 4.43 により，f は (4.70) を満たす．

逆に，f が，(4.70) を満たすなら，$\mathbb{t} = -f(\mathbb{0})$ として，$f_0 = t_{\mathbb{t}} \circ f$ とすると，$f_0(\mathbb{0}) = f(\mathbb{0}) - f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ だから，f_0 は，(4.69) を満たす．また，補題 4.43 により，f_0 は，(4.70) も満たす．したがって，定理 4.41 により，f_0 は線型写像である．よって，$f = t_{-\mathbb{t}} \circ f_0$ は，アファイン写像である．　❑ (定理 4.44)

上の定理 4.44 は，上の証明での定理 4.41 を，その一般化である定理 4.85 で置き換えることで，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ と $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対する定理に，拡張される (4.4.2 節を参照)．

すべての写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が，アファイン写像であるわけではない．

Ex-2-2 **例 + 演習問題 4.45** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ に対し，

(4.73) $f(\mathbb{a}) := \begin{bmatrix} (a_1)^3 \\ 0 \end{bmatrix}$

として定めると，次が成り立つ:

(1) f は，線型写像でなく，アファイン写像でもない．

(2) f は，すべての直線を，直線か，singleton に移す．

(3) f が，直線 ℓ を直線に移すときには，$f \restriction \ell$ は 1-1 である．　❑

4.2.3　平面上の原点を中心とする回転と，内積の幾何学的解釈

rotation 以下の議論では，角度や，直交性や，三角関数が，既知の概念として用いられている．高校の数学では，角度や直交性は，すでにそこにあるもの [*33]，と

*33 「すでにそこにある」は，ここでは，哲学での “アプリオリ” (apriori) という表現の，俗衆語版として使っています．

して用いられていて，三角関数は，それらを用いて説明されるが [*34]，実際には，実数の組の全体からなる集合としての $\mathbb{R}^2$ の上には，そのままでは，角度は，定義されていないので，厳密に議論をするためには，まず，角度の概念を，我々の $\mathbb{R}^2$ の枠組のなかに，導入しなければならない．ところが，付録 A の初めでも述べているように，これを，付録 A での角度の説明の精密化として，実行しようとすると，微分や積分，またそれらの理論での基礎的な事項をここで導入しなくてはならなくなる．付録 B では，これを迂回して，実数体の導入 (実数体の導入の議論の細部については，付録 B の，第 B.2 節で与えられている) と類似の議論により，角度が導入できるとを確かめる．しかし，そこで何が行なわれているかを理解するためには，角度や直交の概念や三角関数が，すでにそこにあるような世界の中で何が起っているかを，あらかじめ見ておくことが，必要になる [*35]．

そこで，まず，以下の議論を，(高校数学の精度で導入された) 角や，三角函数の概念 (これは付録 A で説明されている) を用いて展開して，2 つの直線の直交性の特徴付けを確立し (定理 4.55,(3))，この特徴付けを直交性の定義と読み換えて，$\mathbb{R}^2$ での原点を中心とする回転の三角函数を用いた定義を，その特徴付け (定理 4.52) で置き換え，それから出発して，付録 B で解析学を経由せずに角の定義を行ない，それを用いて，付録 A に戻って，三角函数の概念の精密な導入を行なう．これを行なった後では，以下の，角や三角関数等の用いられている議論は，$\mathbb{R}^2$ 上の厳密な議論として，読みなおすことができることになる．

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，**原点を中心とする反時計回りの角度 θ の回転** (rotation about the origin counter-clockwise by angle θ) とする．つまり，$\mathbb{a} = \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} r\cos\tau \\ r\sin\tau \end{bmatrix}$ と，極座標で表したとき，

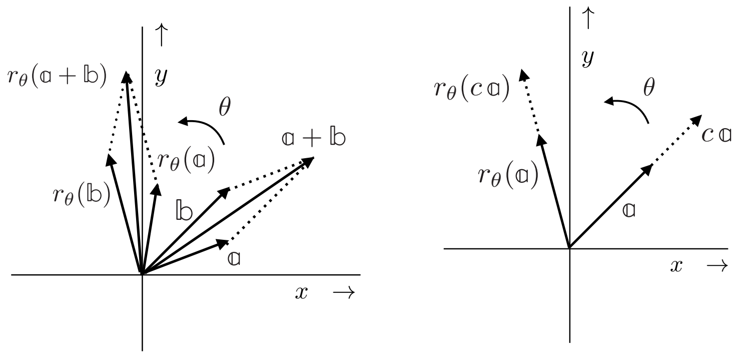
*34 これに対応する解説は，付録 A を参照してください．ただし，付録 A での記述は，その後の付録 B で，より厳密な議論に修正補足されることを，念頭に置いて書かれています．

*35 このような，「卵が先か，鶏が先か」的状況は，数学や，科学の，基礎的な部分をきちんと理解しようとするとき，不可避的に現れることになるものですが，“標準的” な教科書では，(教育的配慮から?) そのような問題を意識的に隠すことが多いので，そのような教科書での記述に洗脳されてしまっている読者は，本書の，ここでのような説明を，奇異なものと受けとってしまう危険があるかもしれません．

$$r_\theta(\mathbb{a}) := \begin{bmatrix} r\cos(\tau+\theta) \\ r\sin(\tau+\theta) \end{bmatrix}$$

とする [*36]．r_θ は，線型写像である．これは，以下のような図を，$\mathbb{R}^2$ の行列の和とスカラー倍の幾何学的意味付け (90 ページ前後を参照) と合せて考えると，理解できる．

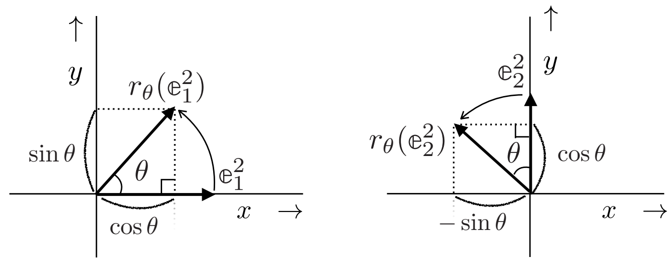
linearity-of-rtheta



rotation-lin

♦ figur05x.pdf，figur06x.pdf

回転 r_θ が線型写像であるという事実 [*37] と，定理 4.23 を用いると，以下のようにして r_θ の表現行列 R_θ が求まる:



♦ figur13x.pdf，figur14x.pdf

$$r_\theta(\mathbb{e}_1^2) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

$$r_\theta(\mathbb{e}_2^2) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

rotation-matrix

*36 ここでの，角度や三角函数 ($\sin\theta$, や $\cos\theta$ など) の扱いについては，付録 A を参照してください．

*37 ここでは，あえて，「回転 r_θ が線型写像であるという事実」と言っていますが，既に何度か注意したように，幾何学的直観の数学的定義での置き換えを行なった後では，これは「事実」でなく，「原点を中心とする反時計回りの角度 θ の回転」の定義の一部となります．

幾何学的直観の足場を取りさった後の，回転の定義となるべき性質は，すぐ後の，定理 4.52. (b) で，与えられることになりますが，123 ページで導入されることになる直交行列の概念と，第 6 章で導入される行列式の概念を用いると，定理 4.52. (b) は，原点を中心とする回転の最終版の定義となるべき，「行列式が 1 となる直交行列により表現される線型写像である」，という性質とも同値になることが示されます (第 8.3 節を参照)．

♦ 定理 6.44 の後に「A が直交行列なら $\det(A)$ は 1 か -2」という Lemma を加えてそこで，130 ページの議論を引用する．

だから，定理 4.23 により，

$$(4.74)\quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ x-2-23

である．

(4.74) の形の 2-次の正方行列 R_θ を，**2 次元の回転行列** (two dimensinal rotation matrix) あるいは，略して，単に，**回転行列**とよぶ．

補題 4.46 R を，2 次元の回転行列とするとき，${}^tRR = E_2$ が成り立つ．つまり，以下で導入することになる用語を先取りすると，2 次元の回転行列は，直交行列である． P-2-16

証明． θ を，$R = R_\theta$ となるように取ると，

$$(4.75)\quad {}^tR = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = R_{-\theta}$$ x-2-24

となることが，分かる．したがって，${}^tRR = R_{-\theta}R_\theta$ であるが，この右辺は (定理 4.24 により)，原点を中心とした反時計回り θ の回転への，原点を 中心とした反時計回り $-\theta$ の回転の合成の行列表現となっていて，そのような合成の結果は，角度 0 の回転，つまり，$id_{\mathbb{R}^2}$ である，E_2 は，この表現行列だから，$R_{-\theta}R_\theta = E_2$ である． □ (補題 4.46)

上の，幾何学的直観的を含む議論は，次の代数的な計算で，置き換えることができる [*38]．

補題 4.46 の代数的計算による証明:

$$(4.76)\quad {}^tRR = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ x-2-25

□ (補題 4.46)

$\mathbb{R}$ 上の正方行列 A が，等式 orthogonal-matrix

---

*38 (4.76) の計算と，それに至る考察で用いられている，三角関数の性質は，公式 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ のみであることを，注意しておきます．これらについては，付録の第 A.1 節と，第 A.2 節を，参照してください．

x-4-5-0　(4.77) ${}^tAA = E$

を満たすとき，A は，**直交行列** (orthogonal matrix) であるという．補題 4.46 により，2 次元の回転行列は，直交行列である．線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が，直交行列を表現行列として持つとき，f は**直交変換** (orthogonal transformation) である，と言う．

直交行列は，内積を保存する行列，あるいは，距離を保存する行列，あるいは，ノルムを保存する行列，として特徴付けることができる:

P-2-17 **定理 4.47** A を，$\mathbb{R}$ 上の n-次の正方行列として，$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$ とする．
このとき，以下の (a)〜(d) は同値である．

(a) A は直交行列である．

(b) すべての $i, j \in \overline{n}$ に対して，$(\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) = \delta_{i,j}$ が成り立つ．

(c) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(A\mathbb{a}, A\mathbb{b}) = (\mathbb{a}, \mathbb{b})$ が成り立つ．

(d) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$d(A\mathbb{a}, A\mathbb{b}) = d(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ が成り立つ．

(e) すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\mathbb{a}\| = \|A\mathbb{a}\|$ が成り立つ．

証明． (a) $\Rightarrow$ (b):　A を，直交行列とすると，定義から，${}^tAA = E_n$ だから，

$$(\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) \underbrace{=}_{\text{内積の定義}} \sum_{k \in \overline{n}} a_{k,i} a_{k,j} = {}^tAA \text{ の } (i,j)\text{-成分} = \delta_{i,j}$$

である．

(b) $\Rightarrow$ (a):　(b) を，仮定すると，

$${}^tAA \text{ の } (i,j)\text{-成分} = \sum_{k \in \overline{n}} a_{k,i} a_{k,j} \underbrace{=}_{\text{内積の定義}} (\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) \underbrace{=}_{\text{(b)}} \delta_{i,j}$$

だから，${}^tAA = E_n$ である．

(b) $\Rightarrow$ (c):　(b) を，仮定する．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とすると，

$$(A\mathbb{a},\, A\mathbb{b}) = (A(\sum_{i\in\overline{n}} a_i \mathbb{e}^n_i),\, A(\sum_{j\in\overline{n}} b_j \mathbb{e}^n_j)) \underbrace{=}_{\text{補題 3.12,(3),(5)}} (\sum_{i\in\overline{n}} a_i A\mathbb{e}^n_i,\, \sum_{j\in\overline{n}} b_j A\mathbb{e}^n_j)$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 4.6, (1),(2),(3)}} \sum_{i,j\in\overline{n}} a_i b_j (A\mathbb{e}^n_i,\, A\mathbb{e}^n_j) \underbrace{=}_{\text{補題 4.3}} \sum_{i,j\in\overline{n}} a_i b_j (\mathbb{a}_i,\, \mathbb{a}_j) \underbrace{=}_{\text{(b)}} \sum_{i,j\in\overline{n}} a_i b_j \delta_{i,j}$$

$$= \sum_{i\in\overline{n}} a_i b_i = (\mathbb{a},\, \mathbb{b})$$

である．

(c) ⇒ (d):　(4.27) と，(4.23) により，$d(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \sqrt{(\mathbb{b}-\mathbb{a},\, \mathbb{b}-\mathbb{a})}$ だから，(c) を仮定すると，

$$d(A\mathbb{a}, A\mathbb{b}) \overbrace{=}^{d(\cdot,\cdot)\text{ の定義による}} \sqrt{(A\mathbb{b}-A\mathbb{a},\, A\mathbb{b}-A\mathbb{a})} \overbrace{=}^{\text{補題 3.12, (4), (5) による}^{*39}} \sqrt{(A(\mathbb{b}-\mathbb{a}),\, A(\mathbb{b}-\mathbb{a}))}$$

$$\underbrace{=}_{\text{(c) による}} \sqrt{(\mathbb{b}-\mathbb{a},\, \mathbb{b}-\mathbb{a})} \underbrace{=}_{d(\cdot,\cdot)\text{ の定義による}} d(\mathbb{a},\mathbb{b})$$

である．

(d) ⇒ (e):　ノルムの定義 (4.23) と，距離の定理，(4.27) により，$\|\,\mathbb{a}\,\| = d(\mathbb{a}, \mathbb{0})$ となるから，よい．

(e) ⇒ (a):　(e) を仮定する．$i \in \overline{n}$ に対し，

$$(4.78)\quad (\mathbb{a}_i,\, \mathbb{a}_i) = (A\mathbb{e}^n_i, A\mathbb{e}^n_i) \overbrace{=}^{\text{ノルムの定義 (4.23)}} \|\, A\mathbb{e}^n_i \,\|^2 \underbrace{=}_{\text{(e)}} \|\, \mathbb{e}^n_i \,\|^2 = 1$$ x-2-26

である．

$i, j \in \overline{n}$ で，$i \neq j$ のとき，

$$(4.79)\quad (\mathbb{a}_i + \mathbb{a}_j,\, \mathbb{a}_i + \mathbb{a}_j) \underbrace{=}_{\text{補題 4.3 と補題 3.12,(3) による}} (A(\mathbb{e}^n_i + \mathbb{e}^n_j),\, A(\mathbb{e}^n_i + \mathbb{e}^n_j))$$ x-2-27

$$\overbrace{=}^{\text{ノルムの定義 (4.23)}} \|\, A(\mathbb{e}^n_i + \mathbb{e}^n_j) \,\|^2 \underbrace{=}_{\text{(e)}} \|\, \mathbb{e}^n_i + \mathbb{e}^n_j \,\|^2$$

---

*39 ベクトルは，行列の特別な場合なので，ここで，行列の掛け算に関する計算規則が，適用できることに，注意します．

$$\overbrace{=}^{\text{ノルムの定義 (4.23)}} (\mathbb{e}_i^n + \mathbb{e}_j^n,\, \mathbb{e}_i^n + \mathbb{e}_j^n) \overbrace{=}^{\text{内積の定義 (4.21)}} \textstyle\sum_{k\in\overline{n}}(\delta_{k,i} + \delta_{k,j})^2$$
$$= (\underbrace{\delta_{i,i}}_{=1} + \underbrace{\delta_{i,j}}_{=0})^2 + (\underbrace{\delta_{j,i}}_{=0} + \underbrace{\delta_{j,j}}_{=1})^2 = 2$$

である．一方，

x-2-28 $$(\mathbb{a}_i + \mathbb{a}_j,\, \mathbb{a}_i + \mathbb{a}_j) \underbrace{=}_{\text{補題 4.6, (1), (2) による}} \|\,\mathbb{a}_i\,\|^2 + 2(\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) + \|\,\mathbb{a}_j\,\|^2 \underbrace{=}_{(4.78)} 2 + 2(\mathbb{a}_i,\, \mathbb{a}_j)$$

だから，これを，(4.79) と合せると，

x-2-29 $$(4.80)\quad (\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) = 0$$

が，分かる．したがって，この (4.78) と，(4.80) から，

$${}^tAA \text{ の } (i,j)\text{-成分 } = (\mathbb{a}_i,\, \mathbb{a}_j) = \delta_{i,j}$$

となるので，${}^tAA = E_n$ である． ❑ (定理 4.47)

上の定理での，直交行列の特徴付けは，定理 6.51 で，更に拡張されることになる．

P-4-a-1 **系 4.48** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，直交変換とするとき，f は，任意の多角形を，それと合同な多角形に移す．特に，直交変換 f は，任意の多角形の面積を保存する．

証明． 任意の多角形 P を，対角線を用いて三角形 $T_1, \ldots, T_k$ に分割すると (定理 C.3 を参照)，系 4.39 と，定理 4.47 により，各 $f''T_i$ は，各三辺の長さが T_i の対応する辺と等しい三角形となるから，T_i と合同である．したがって，それらを，P の，$T_1, \ldots, T_k$ の貼り合せと，対応するやり方で，貼り合せて得られている $f''P$ は，P と合同である．

特に，

$$P \text{ の面積} = \sum_{i\in\overline{k}} (T_i \text{ の面積}) = \sum_{i\in\overline{k}} (f''T_i \text{ の面積}) = f''P \text{ の面積}$$

である． ❑ (系 4.48)

次の補題の (2) では，第 6 章で証明されることになる事実 (定理 6.50) を，用いている．んんみやけ@三宅敏恒，1944(昭和 19 年)〜

補題 4.49　(1) n-次の正方行列 A, B について，A と B が，直交行列なら，AB も，直交行列である． P-2-17-a

(2)　n-次の正方行列 A が，直交行列なら，A は，可逆で，$A^{-1} = {}^tA$ で，A^{-1} も，直交行列である．

証明． (1):　仮定により，${}^tAA = E_n$, ${}^tBB = E_n$ である．したがって，

$$
{}^t(AB)(AB) \underbrace{=}_{\text{補題 } 3.15} {}^tB{}^tA(AB) = {}^tBE_nB = {}^tBB = E_n
$$

である．

(2):　定理 6.50 と，直交行列の定義から，$A^{-1} = {}^tA$ である．任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A^{-1}\mathbb{a} = \mathbb{b}$ とすると，$A\mathbb{b} = \mathbb{a}$ だから，A が直交行列であることと，定理 4.47 により，$\|A^{-1}\mathbb{a}\| = \|\mathbb{b}\| = \|A\mathbb{b}\| = \|\mathbb{a}\|$ である．したがって，再び，定理 4.47, (a) $\Leftrightarrow$ (e) により，A^{-1} も直交行列である． ❏ (補題 4.49)

上の補題 4.49, (2) の証明で，第 6 章で証明されることになる，定理 6.50 の使用では，循環は生じていないことが確かめられるが，本節の以下の議論で問題となる，$n = 2$ の場合には，補題 4.49, (2) は，現段階で利用できる道具だけを用いることでも，証明できる．これを説明するために，まず，定理 6.50 を弱めた，次の補題を見ておく:

補題 4.50 A と B を，n-次の正方行列として，B が，可逆で， P-5-1

(4.81)　$BA = E_n$ x-5-6

なら，A も，可逆で，$A^{-1} = B$ である．

証明． B は，可逆だから，逆行列 B^{-1} を持つ．したがって，

$$
A = E_nA = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA) \underbrace{=}_{(4.81) \text{ による}} B^{-1}E_n = B^{-1}
$$

である．よって，A も，可逆で，$A^{-1} = (B^{-1})^{-1} \underbrace{=}_{\text{補題 4.29 による}} B$ である． □ (補題 4.50)

補題 4.49 の，$n = 2$ の場合の直接証明: 定理 4.24 により，$\varphi_{{}^tA} \circ \varphi_A = id_{\mathbb{R}^2}$ だから，補題 2.11, (1) により，φ_A は単射である．一方，$\varphi_A(\mathbb{e}^2_1) = \mathbb{a}_1$, $\varphi_A(\mathbb{e}^2_2) = \mathbb{a}_2$ だから，補題 4.12 により，$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，上射でもある (演習!)．したがって，φ_A の逆写像が存在する．よって，定理 4.34 により，A は可逆である．このことと，補題 4.50, および，直交行列の定義 (4.77) から，$A^{-1} = {}^tA$ が従う． □

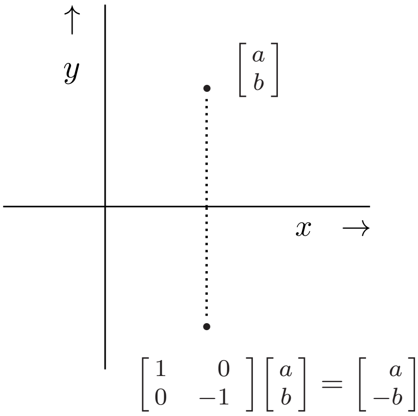
直交行列を，表現行列として持つ，線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を，(n-次の) **直交変換** (orthogonal transformation) と呼ぶことにする．補題 4.49, 定理 4.24, 定理 4.34 により，直交変換は，全単射で，n-次の直交変換の全体は，写像の合成と逆写像の演算に関して閉じている．

補題 4.46 により，

$$2 \text{ 次元の回転行列の全体} \subseteq 2 \text{ 次元の直交行列の全体}$$

だが，“=” は，成立しない．

例 4.51 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，$(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1$, $(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = 1$, $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = 0$ により，A は，直交行列である．$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ だから，A は，x-軸を軸とする鏡像変換の，表現行列となっている．特に，φ_A は，原点の回りの回転ではない．



♦ figur20x.pdf

$\mathbb{R}^2$ での，原点を中心とする回転は，以下のような，三角関数や，角の概念を含まない特徴付けが，可能である．

定理 4.52 $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し，以下は，同値である: P-2-17-0

(a)　r は，原点を中心とする回転である．

(b)　ある $a, b \in \mathbb{R}$ で，$a^2 + b^2 = 1$ を満たすものに対し，$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ が r の表現行列となる (つまり，$r = \varphi_A$ である) *40.

証明． (a) $\Rightarrow$ (b):　(a) を仮定して，$r = r_\theta$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を取ると，$r_\theta = \varphi_{R_\theta}$ だが，$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ だから，$a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ とすると，$a^2 = b^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ だから，これらの a, b は r が (b) を満たすことの例証になっている．

(b) $\Rightarrow$ (a):　(b) を仮定して，a, b, A を (b) のようなものとすると，$a^2+b^2 = 1$ により，$\theta \in \mathbb{R}$ で，$\cos\theta = a$, $\sin\theta = b$ となるものが，取れる．このとき $A = R_\theta$ となるから，$r = \varphi_A$ は，原点を中心とする回転である．　❑ (定理 4.52)

上の定理の “(a) $\Rightarrow$ (b)” の証明は，回転角を用いた議論を経由せずに，次のようにして示すこともできる *41: r が，(平面上の原点を中心とした) 回転

*40 特に，このような A は，直交行列であることに注意します．

*41 付録 B では，実数を定義して，そこに，角度の概念を導入する方法について論じますが，平面上の，原点を中心とした回転は，その際に，主要な役割の一つを，果すことになります．
　ここでのパラグラフで述べることは，付録 B での議論で，角度の概念を用いずに (した

のときには，r の表現行列を $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ とすると，$r(\mathbb{e}_1^2)=A\mathbb{e}_1^2=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $r(\mathbb{e}_2^2)=A\mathbb{e}_1^2=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ だから，$a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ で，ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ は，直交しなくてはならない．つまり，$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)=0$ とならなくてはならない．このことから，$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ は，$\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ であるか，$\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ であるかの，どちらかでなくてはならないことが，分かる．

rotation-det-1　後者は回転の表現を与えない: これは，第 8.3 節 で，より一般的な形で議論することになるが，そこでの要点を先取りして述べると，次のように意味付けることができる: ここでの “原点を中心とする回転” は，回転前のベクトルを，回転した後のベクトルに対応させる関数だが，**連続的な時間変化としての回転**を考えると，$\mathbb{e}_1^2$ と $\mathbb{e}_2^2$ を，距離を保って (つまり，各瞬間の状態が，直交行列による変換になっている，ようにして) 連続的に，それぞれ，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ へ，変形することはできないことが示せるからである．

技術的には，このことは，次のように議論できる: 2-次の正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ に対し，$d(A):=ad-bc$ とする．回転行列の候補である，$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, $a^2+b^2=1$ に対しては，この値は，$d\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right)=a^2+b^2=1$, $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\right)=-a^2-b^2=-1$ となる．今，連続関数

$$\rho:[0,1]\rightarrow \text{回転行列の候補となる 2-次の正方行列の全体}$$

を，$\rho(0)=E_2$ (“角度 0” の回転) を連続的に変化させて，目的の回転 $\rho(1)$ に至る “時間変化の表現” とすると，$d\circ\rho$ も，連続な関数でなくてはならないから，この値が，$d(E_2)=1$ から，-1 に不連続的に変化することは，あり得ない．したがって，この回転の結果である $A=\rho(1)$ も，$d(A)=1$ となる行列でなくてはならないことが，分かる [*42]．このことから，回転行列は，ある a,

---

がって，循環が起ってしまうことなく)，平面上の，原点を中心とした回転を，論じることができるために，重要になります．

*42 A に対する，ここで言っている「連続的な時間変化としての回転」は，三角関数の知識を仮定すると，例えば，

$$\rho:\ [0,1]\ni t\mapsto \begin{bmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{bmatrix}\in \text{2-次の直交行列の全体}$$

$b \in \mathbb{R}$ で，$a^2 + b^2 = 1$ となるものに対し，$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ と表わせる行列である (べきである) ことが結論される．つまり，この，原点を中心とする平面上の回転の表現行列 A は，(b) でのようなものでなければならない． rotation-matrix-x

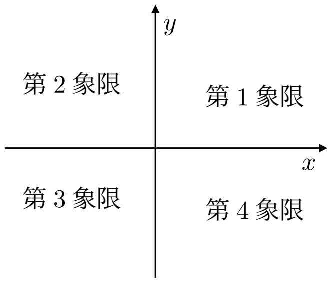
次の補題は，定理 4.52 と共に，付録 B の第 B.4 節での，構成の動機を与えることになるものである [*43].

まず，以下で用いている，**第 n 象限** ($n \in \overline{4}$, n'th quadrant) という用語について触れておく．$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{a} \text{ が，第 1 象限に属す} \;\Leftrightarrow\; a \geq 0 \text{ かつ，} b \geq 0; \\
&\mathbb{a} \text{ が，第 2 象限に属す} \;\Leftrightarrow\; a \leq 0 \text{ かつ，} b \geq 0; \\
&\mathbb{a} \text{ が，第 3 象限に属す} \;\Leftrightarrow\; a \leq 0 \text{ かつ，} b \leq 0; \\
&\mathbb{a} \text{ が，第 4 象限に属す} \;\Leftrightarrow\; a \geq 0 \text{ かつ，} b \leq 0
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

P-2-17-0-0

とする．つまり，平面に座標系を入れて図示すると:



♦ figur07x.pdf

ただし，ここでは，x-軸と，y-軸の上の点は，それぞれ，隣接する象限の領域の，すべてに属するものとしている．

(4.82) での象限の定義は，数学的なものであるが，上の図で，x-軸上の座標の値が，左から右にむかって増加していることや，y-軸上の座標の値が，下から上に向って増加していることは，数学的な記述の外側にある事柄である [*44].

として実現できます．

*43 この補題は，三角関数の半角の公式 (付録 A の系 A.3) と関連性を持っています．ここで与えられている証明では，半分の回転の含まれるべき象限についての議論を除くと，幾何学や三角関数は直接用いられてはいないことに注意してください．このことの意義については，脚注*48 も参照してください．

*44 上下の概念は，少なくとも地球上では，(ローカルには) 地球の引力の逆の方向と，引力の方向，として説明ができますが，右左の区別の出所を何と定めたらよいかは，そう簡単には，説明できそうにありません．少なくとも，幼稚園児に教えるときに使う，「おはしを持 left-right

したがって，上の図で見てとれる，象限の，上下左右の位置関係に関する情報は，幾何学的な直観には属すが，数学の定式化には，含まれない．

P-2-17-1 **補題 4.53** $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，原点を中心とする回転として，$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ を，$r=\varphi_A$ となるように取る [*46]．このとき，r の半分の回転の表現行列 $A_{\frac{1}{2}}$ は，

x-2-29-a-0 (4.83) $a, b>0$ または，$a<0$ かつ $b>0$ の場合 (つまり，ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ が，第 1 象限か，第 2 象限にあるとき) には，

$$A_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{bmatrix}$$

となり，

x-2-29-a-1 (4.84) $a, b<0$ または，$a>0$ かつ $b<0$ の場合 (つまり，ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ が，第 3 象限か，第 4 象限にあるとき) には，

$$A_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & -\sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{bmatrix}$$

となる．

いずれの場合にも，「回転の半分」という幾何学的な直観に対応する等式

x-2-29-0 (4.85) $(A_{\frac{1}{2}})^2=A$

が成り立っている．

つ手が右」は，左利きである著者には，通用しません．

左右が認識できたり，伝達できたりするためには，左右が違わなくてはならないわけですが，この，我々にとっての左右の違いが，地球上の生物学的，あるいは，有機化学的な偶然の左右の不均一[*45]によって生じているに過ぎないものなのか，もし有機化学的なものだとすると，その左右不均一の成立は，実は偶然ではなく，地球の自転の方向や月の軌道の方向などと関係して成立したものだ，という可能性はないか，あるいは，これは，宇宙のもっと広い範囲の化学的左右不均一に起因するものなのか，それとも，何か更に本質的な，物理学的な非対称性によるものなのか，等々は，大変に興味深い問題に思えます．

なお，物理学や，化学では，上で述べたような左右不均一は，**パリティの破れ** (parity violation) として研究されています．

[*46] 定理 4.52 により，回転の表現行列は，このような形の行列として取れること，に注意してください．

証明． 定理 4.52 により，$a^2+b^2=1$ である．また 定理 4.52 により，$c, d \in \mathbb{R}$ で，

$$(4.86)\quad c^2+d^2=1,$$ x-2-29-0-0

$$(4.87)\quad A_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$ x-2-29-0-1

となるものが，取れる．$A_{\frac{1}{2}}$ が，A の表現する回転の半分の回転を，表現することから，$A=A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}}$ である．したがって，

$$(4.88)\quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2-d^2 & -2cd \\ 2cd & c^2-d^2 \end{bmatrix}$$ x-2-29-1

である．特に，(4.88) の両辺の $(1,1)$-成分の比較から，

$$(4.89)\quad a=c^2-d^2$$ x-2-29-2

が得られる．これに (4.86) から得られる $c^2=1-d^2$ を代入すると，$a=1-2d^2$ したがって，$d^2=\frac{1-a}{2}$ が得られる．この式と (4.86) から，$c^2=\frac{1+a}{2}$ である．

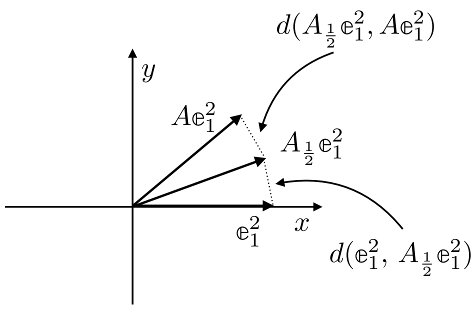
以上で，c は $\sqrt{\frac{1+a}{2}}$，または，$-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$; d は $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$，または，$-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$ でなければならないことが分った．

$A\mathbb{e}^2_1=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ が第 1 象限か第 2 象限にあるときには，$A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}^2_1=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ は第 1 象限になくてはならないから，$c>0$, $d>0$ である．$A\mathbb{e}^2_1=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ が第 3 象限か第 4 象限にあるときには，$A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}^2_1=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ は第 2 象限になくてはならないから，$c<0$, $d>0$ である．したがって，$A_{\frac{1}{2}}$ は，(4.83) と (4.84) を満たす．

この $A_{\frac{1}{2}}$ が，実際に，(4.85) を満たすことは，計算によって確認することができる (演習!). □ (補題 4.53)

上の $A_{\frac{1}{2}}$ が，先に導入した，$\mathbb{R}^2$ での距離 (4.27) の意味でも，A の回転角の半分の回転角を持つ回転の表現となっていることは，次の補題で確かめられる:

補題 4.54 $a, b \in \mathbb{R}$ を，$a^2+b^2=1$ となるものとして，$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ とする、[*47]．$A_{\frac{1}{2}}$ を 補題 4.53 でのように定義されたものとすると，$d(A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}^2_1, A\mathbb{e}^2_1)=d(\mathbb{e}^2_1, A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}^2_1)$ が成り立つ． P-2-17-2



♦ figur07x.pdf

証明． $a,\, b \geq 0$ の場合について示す — 他の場合も同様に示せる．この場合には，

$$A_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{bmatrix}$$

となるので (補題 4.53 を参照)，$A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} \end{bmatrix}$, $A\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ である．

したがって，

$$\begin{aligned} d(A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}_1^2,\, A\mathbb{e}_1^2) &= \sqrt{\left(a - \sqrt{\tfrac{1+a}{2}}\right)^2 + \left(b - \sqrt{\tfrac{1-a}{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a} + \tfrac{1+a}{2} + b^2 - b\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a} + \tfrac{1-a}{2}} \\ &\underbrace{=}_{a^2+b^2=1} \sqrt{2 - a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a} - b\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-a}} \\ &\underbrace{=}_{b=\sqrt{1-a^2}=\sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1-a}} \sqrt{2 - a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a} - \sqrt{1+a}\cdot\sqrt{2}\cdot(1-a)} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a}} \end{aligned}$$

である．一方

rotation-matrixA

*47 123 ページでは，(原点を中心とする回転の表現となっている) 回転行列を，回転角 θ を介して，R_θ という形をしている行列 ((4.74) を参照)，として定義しましたが，付録 B で，角度の概念の導入を行なうときには，この定義による回転行列を，そこで使うと，循環が起ってしまうので，定理 4.52 を念頭に置いて，ここでの A のような形の行列 (つまり，$a^2 + b^2 = 1$ となる実数 a, b に対し，$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ と表わせるような行列 A) を，回転行列とよぶ，として再定義します．

$$d(\mathbb{e}_1^2,\, A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}_1^2) = \sqrt{\Big(1 - \sqrt{\tfrac{1+a}{2}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\tfrac{1-a}{2}}\Big)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a} + \tfrac{1+a}{2} + \tfrac{1-a}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a}}$$

となるから，$d(A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}_1^2,\, A\mathbb{e}_1^2) = d(\mathbb{e}_1^2,\, A_{\frac{1}{2}}\mathbb{e}_1^2)$ である． ❑ (補題 4.54)

原点を中心とする回転を，用いると，内積の，次のような，幾何学的な特徴付けが，得られる．次の定理の (1) と (3) は，補題 4.46 の最初の証明でと同じように，幾何学的直観と，代数的な議論の，混合を，含む (したがって，まだ，幾何学的直観をどのように $\mathbb{R}^2$ に関する議論に融合するか，ということの解決の得られていない段階では，厳密には意味をなさない) ものになっている[*48]．

定理 4.55 （1）$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ を，同一直線上にない 3 点とする．任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ を 3 つの頂点とする三角形と，$r_\theta(\mathbb{a}), r_\theta(\mathbb{b}), r_\theta(\mathbb{c})$ を 3 つの頂点とする三角形は合同である．特に，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ を変位ベクトルと見るとき，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角は，$r_\theta(\mathbb{a})$ と $r_\theta(\mathbb{b})$ のなす角と等しい． P-2-18

（2） 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，回転 r_θ は，内積を保存する．つまり，任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (r_\theta(\mathbb{a}), r_\theta(\mathbb{b}))$ が，成り立つ．

（3） $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = 0$ となるのは，変位ベクトルとしての $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角が，直角である，ちょうどそのときである．

証明． (1): r_θ の表現行列 R_θ は，直交行列なので (定理 4.46)，距離を，保存する (定理 4.47, (a) $\Leftrightarrow$ (d))．したがって，$d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = d(r_\theta(\mathbb{a}), r_\theta(\mathbb{b}))$, $d(\mathbb{b}, \mathbb{c}) = d(r_\theta(\mathbb{b}), r_\theta(\mathbb{c}))$, $d(\mathbb{c}, \mathbb{a}) = d(r_\theta(\mathbb{c}), r_\theta(\mathbb{a}))$ である．したがって，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$ を頂点とする三角形と，$r_\theta(\mathbb{a}), r_\theta(\mathbb{b}), r_\theta(\mathbb{c})$ を頂点とする三角形は合同である．

[*48] 定理 4.55 (1),(3) の問題点は，ベクトルのなす角，という幾何学的な概念が，ここでの $\mathbb{R}^2$ での代数的議論と一緒に用いられていることです．三角形の合同の概念は，(4.27) で定義された 2 点の距離を用いて規定されていますが，それと，ここですでに我々が知っているものとして使ってしまっている，ベクトルのなす角との擦り合せがうまくできている，という保証がどこにあるのか，判然としないものになってしまっています． problematic

既に，この小節 (4.2.3 節) の初め (120 ページ) で述べたように，ベクトルのなす角を，我々の枠組の中で再定義する (ないしは，直観を厳密な定義で置き換える) 作業を，付録 B.4 で行なうことになりますが，定理 4.55 で得られる洞察は，そのときに，踏台として用いられることになります (付録 B の第 B.4 節を参照してください)．

$\mathbb{a}$ が $\mathbb{b}$ のスカラー倍で，$\mathbb{a} = c\mathbb{b}$ $(c \in \mathbb{R},\ c \neq 0)$ とすると，$c > 0$ なら，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度は 0, $c < 0$ なら $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度は π となる．一方 $r_\theta(\mathbb{a}) = r_\theta(c\mathbb{b}) = c\,r_\theta(\mathbb{b})$ だから，この場合には，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度は，$r_\theta(\mathbb{a})$ と，$r_\theta(\mathbb{b})$ の，なす角度と等しいことが，分かる．

$\mathbb{a}$ が，$\mathbb{b}$ のスカラー倍でないときには，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{0}$ は，同一直線上にないから，上で見たように，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{0}$ を頂点とする三角形は，$r_\theta(\mathbb{a}), r_\theta(\mathbb{b}), r_\theta(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ を頂点とする三角形と合同である．$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度と，$r_\theta(\mathbb{a})$ と $r_\theta(\mathbb{b})$ のなす角度は，それぞれ，$\angle\mathbb{a}\,\mathbb{0}\,\mathbb{b}$, $\angle r_\theta(\mathbb{a})\,\mathbb{0}\,r_\theta(\mathbb{b})$ だから，これらは等しい．

(2):　$r_\theta = \varphi_{R_\theta}$ で，R_θ が，直交行列である (定理 4.46) ことに留意すると，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$(r_\theta(\mathbb{a}),\ r_\theta(\mathbb{b})) = (R_\theta\mathbb{a},\ R_\theta\mathbb{b}) \underbrace{=}_{\text{定理 4.47, (a)} \Leftrightarrow \text{(c)}} (\mathbb{a},\ \mathbb{b})$$

である．

(3):　(1) と (2) により，必要なら回転を施して，$\mathbb{a}$ は $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ という形をしている (つまり $\mathbb{a}$ は x-軸上のベクトル)，としてよい．$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ だから，$a \neq 0$ である．したがって，$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbb{a},\ \mathbb{b})}_{=ab_1} = 0 \ &\Leftrightarrow\ b_1 = 0 \ (\text{つまり } \mathbb{b} \text{ は } y\text{-軸上のベクトル}) \\ &\Leftrightarrow\ \mathbb{b} \text{ は } \mathbb{a} \text{ と直交する} \end{aligned}$$

である [*49]．　□ (定理 4.55)

上の定理 4.55, (3) は，幾何学的な直観を排した数学の基礎付けで，変位ベクトルの直交性の定義が，何であるすべきかを示唆するものになっている: 変位ベクトルとしての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ が**直交する** (つまり，線分 $\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{0}}$ と $\overline{\mathbb{b}\,\mathbb{0}}$ が直交する) ということを，$(\mathbb{a},\ \mathbb{b}) = 0$ であること，として定義する．

より一般的には，次を，直交性の定義として採用する: 任意の $n \in \mathbb{N}$ と，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ に対し，線分 $\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{b}}$ を，$\mathbb{R}^2$ と同様に (4.39) で定義する．こ

---

*49 ここでは，x-軸と，y-軸が直交していることと，直交性が原点を中心とした回転で保存されること，(のみ) が前提として用いられていることに注意します．

のとき，

(4.90)　$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{a}, \mathbb{b}\}$ に対し，線分 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{c}$ と，線分 $\mathbb{b}\sqcap\mathbb{c}$ が，**直交する** (perpendicular to each other)，とは，$(\mathbb{a}-\mathbb{c}, \mathbb{b}-\mathbb{c}) = 0$ となることである．　x-2-30

この定義は，平面 $\mathbb{R}^2$ 上では，直交性の直観的な理解を，上書きするものになる．4.3.3 節の終りで，$\mathbb{R}^3$ に対しても，(4.90) と同様の直交性の定義が幾何学的な直観に，うまく対応するものになっていることを示す．

いずれにしても，ここで定義された直交性が，直観的な意味での直交性の持つ基本性質を満たすことは，検証しておく必要がある．以下で，そのような性質のうちのいくつかについて，それらが成り立つことを示しておく．

$\ell, \ell' \in \mathbb{R}^2$ を直線とするとき，ℓ と ℓ' が，**直交する**とは，$\ell \cap \ell'$ は singleton で，$\ell \cap \ell = \{\mathbb{c}\}$ として，ある $\mathbb{a} \in \ell \setminus \{\mathbb{c}\}$, $\mathbb{b} \in \ell' \setminus \{\mathbb{c}\}$ に対し，線分 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{c}$ と，線分 $\mathbb{b}\sqcap\mathbb{c}$ が，直交すること，とする．

◆ 直交性の定義を $\mathbb{R}^n$ に拡張したところで，直行行列の名称の由来を説明し直す．

次の補題は，2 つの直線の直交性は，それを保証する線分 (上の直線の直交性の定義での $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{c}$ と $\mathbb{b}\sqcap\mathbb{c}$) に依存せず，$\ell$ と ℓ' の交点にも依存しないこと，を示している:

補題 4.56 $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ を直線とするとき，以下の (a)～(d) は同値である:　P-2-18-0

(a)　$\ell \cap \ell'$ は，singleton で，$\ell \cap \ell' = \{\mathbb{c}\}$ とするとき，ある $\mathbb{a} \in \ell \setminus \{\mathbb{c}\}$ と $\mathbb{b} \in \ell' \setminus \{\mathbb{c}\}$ に対し，線分 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{c}$ と，線分 $\mathbb{b}\sqcap\mathbb{c}$ が，直交する (つまり，ℓ と ℓ' は直交する)．

(b)　$\ell \cap \ell'$ は，singleton で，$\ell \cap \ell' = \{\mathbb{c}\}$ とするとき，すべての，$\mathbb{a} \in \ell \setminus \{\mathbb{c}\}$ と，$\mathbb{b} \in \ell' \setminus \{\mathbb{c}\}$ に対し，線分 $\mathbb{a}\sqcap\mathbb{c}$ と，線分 $\mathbb{b}\sqcap\mathbb{c}$ は，直交する．

(c)　ある，異る $\mathbb{a}, \mathbb{a}' \in \ell$ と，ある，異る $\mathbb{b}, \mathbb{b}' \in \ell'$ に対し，ベクトル $\mathbb{a}-\mathbb{a}'$ と，ベクトル $\mathbb{b}-\mathbb{b}'$ が，直交する．

(d)　すべての，異る $\mathbb{a}, \mathbb{a}' \in \ell$ と，すべての，異る $\mathbb{b}, \mathbb{b}' \in \ell'$ に対し，ベクトル $\mathbb{a}-\mathbb{a}'$ とベクトル $\mathbb{b}-\mathbb{b}'$ は直交する．

証明． (a) $\Rightarrow$ (b):　$\mathbb{c}, \mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ を，(a) でのようなものとする．このとき，線分の直交性の定義 (4.90) から，

(4.91)　$(\mathbb{a}-\mathbb{c}, \mathbb{b}-\mathbb{c}) = 0$　x-2-30-a-0

である．$\mathbb{a}, \mathbb{c} \in \ell$, $\mathbb{b}, \mathbb{c} \in \ell'$ だから，補題 4.13 により，

$$\ell = \{\mathbb{c} + r(\mathbb{a} - \mathbb{c}) \,:\, r \in \mathbb{R}\};$$
$$\ell' = \{\mathbb{c} + r(\mathbb{b} - \mathbb{c}) \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$

である．したがって, 任意の $\mathbb{a}' \in \ell \setminus \{\mathbb{c}\}$ と $\mathbb{b}' \in \ell \setminus \{\mathbb{c}\}$ に対し, $r', s' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ で,

x-2-30-a-1
$$\mathbb{a}' = \mathbb{c} + r'(\mathbb{a} - \mathbb{c}); \quad \mathbb{b}' = \mathbb{c} + s'(\mathbb{b} - \mathbb{c}) \tag{4.92}$$

となるものが，取れる．

$$(\mathbb{a}' - \mathbb{c}, \mathbb{b}' - \mathbb{c}) \underbrace{=}_{(4.92)} (r'(\mathbb{a} - \mathbb{c}), s'(\mathbb{b} - \mathbb{c})) \underbrace{=}_{\text{補題 }4.6,(1),(3)} r's'(\mathbb{a} - \mathbb{c}, \mathbb{b} - \mathbb{c}) \underbrace{=}_{(4.91)} 0$$

だから，区間 $\mathbb{a}' \sqcap \mathbb{c}$ と，区間 $\mathbb{b}' \sqcap \mathbb{c}$ は，直交する．

(b) ⇒ (a):　は，論理的に自明である [*50]．

(a) ⇒ (c):　も，自明である ($\mathbb{c}, \mathbb{a}, \mathbb{b}$ を，(a) でのように取るとき，$\mathbb{a}, \mathbb{c}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ を，それぞれ，(c) での $\mathbb{a}, \mathbb{a}', \mathbb{b}, \mathbb{b}'$ とすればよい)．

(c) ⇒ (d):　(c) を仮定して，$\mathbb{a}, \mathbb{a}' \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{a}'$ と，$\mathbb{b}, \mathbb{b}' \in \ell'$, $\mathbb{b} \neq \mathbb{b}'$ を，

x-2-30-a
$$(\mathbb{a} - \mathbb{a}', \mathbb{b} - \mathbb{b}') = 0 \tag{4.93}$$

となるものとする．このとき，補題 4.13 により，

$$\ell = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{a}' - \mathbb{a}) \,:\, r \in \mathbb{R}\};$$
$$\ell' = \{\mathbb{b} + r(\mathbb{b}' - \mathbb{b}) \,:\, r \in \mathbb{R}\}$$

である．$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in \ell$, $\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{a}_2$ と，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in \ell'$, $\mathbb{b}_1 \neq \mathbb{b}_2$ を，任意に取ると，$r', r'', s', s'' \in \mathbb{R}$ $r' \neq r''$, $s' \neq s''$ で，

[*50] “(b) ⇒ (a)” が自明なのは，一般に，“すべての … を満たす対象 x に対し $\uwave{\qquad}$ である” という形の命題が成立して，“… を満たす対象 x が存在する” も成り立つなら，“ある … を満たす対象 x で $\uwave{\qquad}$ となるものが存在する” が論理的に導けるからです．

$$(4.94)\quad \mathbb{a}_1 = \mathbb{a} + r'(\mathbb{a}' - \mathbb{a});\quad \mathbb{a}_2 = \mathbb{a} + r''(\mathbb{a}' - \mathbb{a});$$
$$\mathbb{b}_1 = \mathbb{b} + s'(\mathbb{b}' - \mathbb{b});\quad \mathbb{b}_2 = \mathbb{b} + s''(\mathbb{b}' - \mathbb{b})$$ x-2-30-0

となるものが，取れる．このとき，

$$(\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_1, \mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1) \underbrace{=}_{(4.94)} ((r'' - r')(\mathbb{a}' - \mathbb{a}), (s'' - s')(\mathbb{b}' - \mathbb{b}))$$
$$\underbrace{=}_{\text{補題 4.6,(1),(3)}} (r'' - r')(s'' - s') \underbrace{(\mathbb{a}' - \mathbb{a}, \mathbb{b}' - \mathbb{b})}_{= 0,\ (4.93)\ \text{による}} = 0$$

だから，$\mathbb{a}' - \mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}' - \mathbb{b}$ は，直交する．

(d) $\Rightarrow$ (a):　(d) を，仮定する．$\ell \cap \ell'$ が，singleton であることが示せれば，十分である．

$\mathbb{a}, \mathbb{a}' \in \ell, \mathbb{a} \neq \mathbb{a}', \mathbb{b}, \mathbb{b}' \in \ell'$ $\mathbb{b} \neq \mathbb{b}'$ を，任意に取る．(d) により，$\mathbb{a}' - \mathbb{a}$ と $\mathbb{b}' - \mathbb{b}$ は，直交する．したがって，補題 4.7 と，補題 4.12 (あるいは，これの一般化となっている 補題 4.36) により，方程式は $\mathbb{a} + r(\mathbb{a}' - \mathbb{a}) = \mathbb{b} + s(\mathbb{b}' - \mathbb{b})$ は，一意に決まる解を持つ．このことは $\ell \cap \ell'$ が，singleton であることを意味している．　□ (補題 4.56)

次の補題は，$\mathbb{R}^2$ で記述されているが，$\mathbb{R}^3$ や，$n > 3$ に対する $\mathbb{R}^n$ での，直線の概念や，2 つの直線の直交性の概念を，(4.90) の前後でのようにして，定義すると，一般の $\mathbb{R}^n$ で成り立つ補題に自然に拡張でき，以下の証明も，そのままで，この一般化の証明になる (演習!).

補題 4.57 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ を，直線として，$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2 \setminus \ell$ とするとき，$\mathbb{c}$ を通る直線で，ℓ と直交するものが，一意に存在する． P-2-19

証明． まず，このような直線 ℓ' の存在を示す．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ を $\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} : r \in \mathbb{R}\}$ となるように取る．

$\mathbb{c}$ と，ある $r \in \mathbb{R}$ に対する，ℓ 上の点 $\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}$ を通る直線が，ℓ と直交するという条件は，

$$(4.95)\quad (\mathbb{c} - (\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}), \mathbb{b}) = 0$$ x-2-31

と表わせるが，この式の左辺は，補題 4.6, (1), (2), (3) により，

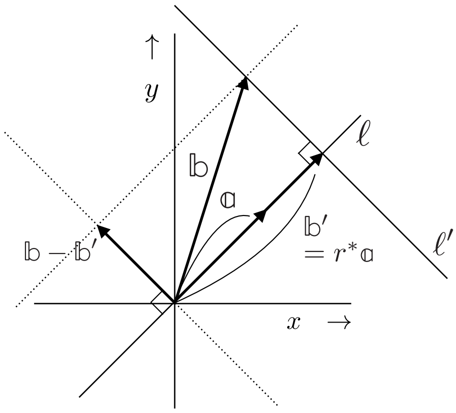
$$(\mathbb{c} - (\mathbb{a} + r\,\mathbb{b}),\, \mathbb{b}) = (\mathbb{c} - \mathbb{a},\, \mathbb{b}) - r(\mathbb{b}, \mathbb{b}) = (\mathbb{c} - \mathbb{a},\, \mathbb{b}) - r\|\,\mathbb{b}\,\|^2$$

である．$\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ だから，補題 4.9 により $\|\,\mathbb{b}\,\|^2 \neq 0$ である．したがって，条件 (4.95) は

x-2-32 (4.96) $r = \dfrac{(\mathbb{c} - \mathbb{a},\, \mathbb{b})}{\|\,\mathbb{b}\,\|^2}$

と同値である．そのような r に対して，$\mathbb{d} := \mathbb{a} + r\,\mathbb{b}$ としたときの，直線 $\ell' = \{\mathbb{c} + s\,\mathbb{d} : s \in \mathbb{R}\}$ は求めるようなものとなる．(4.96) は，r を，一意に指定しているから，このような ℓ' も，一意に定まる． ❑ (補題 4.57)

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ とする．$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，**$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ への射影** (projection of $\mathbb{b}$ on $\mathbb{a}$) を次のように定義する： $\mathbb{b}$ が，$\mathbb{a}$ のスカラー倍のときには，$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ への射影は，$\mathbb{b}$ 自身，とする．そうでないときには，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{0}$ と $\mathbb{a}$ を通る直線 $\ell = \{r\,\mathbb{a} : r \in \mathbb{R}\}$ に，含まれない点となるから，補題 4.57 により，$\mathbb{b}$ を通る直線 ℓ' で，ℓ と直交 … $\cap\,\ell'$ は，singleton だから，$\{r^*\mathbb{a}\} = \ell \cap$ … この r^* に対する $\mathbb{b}' := r^*\mathbb{a}$ を，$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ …



♦ figur07x.pdf

P-2-20 **定理 4.58** $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ とする．$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\mathbb{b}'$ を，$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ への射影として，$\mathbb{b}' = r^*\mathbb{a}$ とする．このとき，

x-2-33 (4.97) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = r^*\|\,\mathbb{a}\,\|^2$

が，成り立つ．特に，$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ への射影は，

x-2-34 (4.98) $\dfrac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\,\mathbb{a}$

と表わせる．

証明． 射影の定義から，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}-\mathbb{b}'=\mathbb{b}-r^*\mathbb{a}$ は，直交する．つまり，$(\mathbb{a},\,\mathbb{b}-r^*\mathbb{a})=0$ である．したがって，

$$(4.99)\quad (\mathbb{a},\,\mathbb{b})=(\mathbb{a},\,r^*\mathbb{a}+(\mathbb{b}-r^*\mathbb{a}))\underbrace{=}_{\text{補題 4.6,(1),(2),(3)}}r^*(\mathbb{a},\,\mathbb{a})+\underbrace{(\mathbb{a},\,\mathbb{b}-r^*\mathbb{a})}_{=0}=r^*(\mathbb{a},\mathbb{a}) \qquad \text{x-2-35}$$
$$=r^*\|\,\mathbb{a}\,\|^2$$

である．$\mathbb{a}\neq\mathbb{0}$ だから，$\|\,\mathbb{a}\,\|\neq 0$ なので (補題 4.9)，(4.99) の両辺を，$\|\,\mathbb{a}\,\|^2$ で割ると，

$$(4.100)\quad r^*=\frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}$$

が得られる．したがって，$\mathbb{b}'=r^*\mathbb{a}=\dfrac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a}$ である．

□ (定理 4.58)

系 4.59 $\mathbb{a}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{0}\}$ に対し，　P-2-21

$$(4.101)\quad p_{\mathbb{a}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\,\mathbb{b}\mapsto\mathbb{b}\text{ の }\mathbb{a}\text{ への射影} \qquad \text{x-2-36}$$

とすると，$p_{\mathbb{a}}$ は，$\mathbb{R}$-線型写像である．$\mathbb{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ として，$p_{\mathbb{a}}$ の表現行列は，

$$(4.102)\quad \begin{bmatrix}\dfrac{a_1}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a} & \dfrac{a_2}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a}\end{bmatrix} \qquad \text{x-2-37}$$

である．

証明． 定理 4.23 により，2-次の正方行列 A を，$A:=\begin{bmatrix}\dfrac{a_1}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a} & \dfrac{a_2}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a}\end{bmatrix}$ と定義するとき，$p_{\mathbb{a}}=\varphi_A$ となることが示せれば，よい．

任意の $\mathbb{b}\in\mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ とすると，

$$\varphi_A(\mathbb{b})=\begin{bmatrix}\dfrac{a_1}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a} & \dfrac{a_2}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}a_1\\\frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}a_2\end{bmatrix}=\frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2}\mathbb{a}$$
$$\underbrace{=}_{\text{定理 4.58 による}}p_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})$$

である．

□ (系 4.59)

P-2-22 **系 4.60** $p_{\mathbb{e}_1^2}$, $p_{\mathbb{e}_2^2}$ は，それぞれ例 4.18, (4) の B, C に対する φ_B, φ_C と等しい．

証明． (4.102) により，$p_{\mathbb{e}_1^2}$, $p_{\mathbb{e}_2^2}$ の表現行列は，それぞれ，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\|\,\mathbb{e}_1^2\,\|^2}\mathbb{e}_1^2 & \dfrac{0}{\|\,\mathbb{e}_1^2\,\|^2}\mathbb{e}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \dfrac{0}{\|\,\mathbb{e}_2^2\,\|^2}\mathbb{e}_2^2 & \dfrac{1}{\|\,\mathbb{e}_2^2\,\|^2}\mathbb{e}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

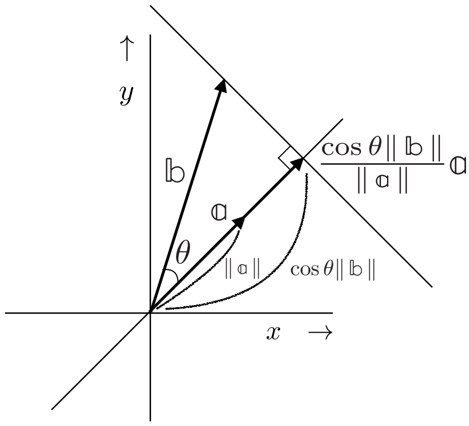
である．これらは，それぞれ，例 4.18, (4) の B と C に等しい．　❏ (系 4.60)

◆ 付録 B の議論はここに挿入する

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ として，ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ のなす角を，θ とする．$0 \leq \theta \leq 2\pi$ である．$\dfrac{1}{\|\,\mathbb{a}\,\|}\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ 方向の大きさが 1 のベクトルだから，$\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ への射影は，

x-2-38 (4.103) $$\frac{\cos\theta\,\|\,\mathbb{b}\,\|}{\|\,\mathbb{a}\,\|}\mathbb{a}$$

と表わせる．



◆ figur11x.pdf

これは (4.98) と等しいから，$\dfrac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|^2} = \dfrac{\cos\theta\|\,\mathbb{b}\,\|}{\|\,\mathbb{a}\,\|}$ したがって，

x-2-39 (4.104) $$\cos\theta = \frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|\,\|\,\mathbb{b}\,\|}$$

である．この両辺に，$\cos(\cdot) \restriction [0,\,\pi] : [0,\,\pi] \to [-1,\,1]$ の逆関数である $\arccos(\cdot) : [-1,\,1] \to [0,\,\pi]$ を，施すと，

x-2-40 (4.105) $$\theta = \arccos\left(\frac{(\mathbb{a},\,\mathbb{b})}{\|\,\mathbb{a}\,\|\,\|\,\mathbb{b}\,\|}\right)$$

が得られる．

演習問題 4.61　(1)　ℓ_1 と ℓ_2 を，互いに平行でない異る直線として，ℓ_3, ℓ_4 を，それぞれ，ℓ_1, ℓ_2 と直交する直線とする．このとき，ℓ_3 と ℓ_4 は，互いに平行でない異る 2 直線である．　Exer-3

(2)　$\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \mathbb{p}_3 \in \mathbb{R}^2$ を，同一直線上にない 3 点とするとき，$\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \mathbb{p}_3$ を含む円周が，ちょうど一つ存在する．

ヒント． (2): 異る 2 点 $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ と等距離にある点の全体が，直線 $\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{b}}$ と直交する直線になることを示し，このことと，(1) に，定理 4.14 を適用する．

より具体的には，区間 $\overline{\mathbb{p}_1\,\mathbb{p}_2}$ の中点を通り，この直線と垂直な直線を ℓ_3 すると，ℓ_3 上の点の全体は，2 点 $\mathbb{p}_1$, $\mathbb{p}_2$ を含む，ある円の中心となっている点の全体と一致する．

同様に，区間 $\overline{\mathbb{p}_2\,\mathbb{p}_3}$ の中点を通り，この直線と垂直な直線を ℓ_4 すると，ℓ_4 上の点の全体は，2 点 $\mathbb{p}_2$, $\mathbb{p}_3$ を含む，ある円の中心となっている点の全体と一致する．

(1) により，ℓ_3 と ℓ_4 は平行でない異る 2 直線だから，定理 4.14 により，ℓ_3 と ℓ_4 は，ちょうど一つの共通点 (交点) を $\mathbb{o}$ 持つが，この点が，唯一求めるような円の中心となっていて，円の半径は，$\mathbb{p}_1$ と $\mathbb{o}$ の距離 ($=$ $\mathbb{p}_2$ と $\mathbb{o}$ の距離 $=$ $\mathbb{p}_3$ と $\mathbb{o}$ の距離) として一意に特定されるから，このような円は一意に決まることが分かる．　□ (演習問題 4.61)

4.3　3-次元ベクトルの演算と空間幾何

4.3.1　3-次元ベクトル空間での点と直線と平面

3-dim
♦ lin-alg-1-06-2020-06-11.pdf p.1
points-lines-planes

3-次元ベクトル空間

$$\mathbb{R}^3 = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

は，多くの場合，平面 $\mathbb{R}^2$ と同様，ないしは，類似のやり方で，扱かうことができる．第 4.2 節で示した，平面 $\mathbb{R}^2$ に対して成り立つ命題の多くは，そのまま，空間 $\mathbb{R}^3$ でも，成り立つが，いくつかの命題では，それらが，$\mathbb{R}^3$ で成り

立つようにするための，若干の修正が必要だったり，稀には，$\mathbb{R}^3$ では，全く成り立たなかったり，することもある．

(物理的な空間の数学モデルとしての) 3 次元空間は，座標を入れて，空間の各点を，その点の座標 (実数の 3 つ組) に対応させることで，集合 $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ として扱かえるが，2 次元のときと同様に，この集合と $\mathbb{R}$ を，$(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ という対応で，同一視する．この同一視に関して，位置ベクトル，変位ベクトルという言い方も，2 次元のときと同様に用いる．また $\mathbb{R}^3$ は，$\langle x, y, z\rangle \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ という対応で，デカルト積の意味での $\mathbb{R}^3$ とも，同一視する．

$\mathbb{R}^3$ でも，直線の概念は，2-次元ベクトル空間と同様に導入できる: $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ が，**直線** (line) であるとは，ℓ が，あるベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ よって，$\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} : r \in \mathbb{R}\}$ と表わされること，とする．

$\mathbb{R}^2$ での直線に対して成立する命題の多くは，$\mathbb{R}^3$ でも同様に成り立つ．補題 4.13 は，そのような例の一つである:

P-2-22-0 **補題 4.62** (補題 4.13 の $\mathbb{R}^3$ 版) $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ を直線として，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ とするとき，

x-2-40-0 (4.106) $\ell = \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\}$

である．

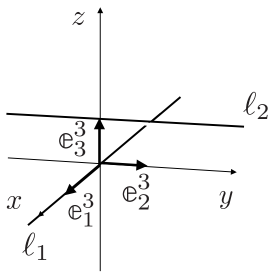
証明． 補題 4.13 の証明で，“$\mathbb{R}^2$” を “$\mathbb{R}^3$” で置き換えたものが，ここでの証明になる． □ (補題 4.62)

平面上では，2 つの直線は，同一であるか，1 点で交じわるか，互いに平行であるかの，いずれかだったが，3-次元ベクトル空間では自由度が増えるため，この 3 つ以外の，2 つの直線がねじれの位置にある，という場合も，あり得る．

Ex-4-0 **例 4.63**

$$\ell_1 = \{r\mathbb{e}^3_1 : r \in \mathbb{R}\},$$
$$\ell_2 = \{\mathbb{e}^3_3 + r\mathbb{e}^3_2 : r \in \mathbb{R}\}$$

とすると，$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ だが，ℓ_1 は x-軸と一致し，ℓ_2 は y-軸方向の直線である．



♦ figur16x.pdf

一方，次の性質は，$\mathbb{R}^2$ でと同様に，成り立つ．

補題 4.64 直線 $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^3$ が共通部分を持つとき，$\ell = \ell'$ か，$\ell \cap \ell'$ は，singleton であるかの，いずれかである．　L-4-0

証明． 補題 4.62 から従う (演習!)．　❏ (補題 4.64)

$\mathbb{R}^3$ での 2 直線の平行性の定義 (152 ページを参照) には，$\mathbb{R}^3$ での平面の定義が必要になる．

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ が，**原点を含む平面** (plane containing the origin) であるとは，E は，互いに他のスカラー倍となっていない [*51] $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbb{0}\}$ によって，

$$(4.107)\quad E = \{r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} \,:\, r, s \in \mathbb{R}\}$$　x-2-41

と表わせること，とする．$\mathbb{0} = 0\,\mathbb{a} + 0\,\mathbb{b}$ だから，確かに，このとき，$\mathbb{0} \in E$ である．このような E は，**ベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ の張る平面** (plane spanned by vectors $\mathbb{a}$ and $\mathbb{b}$) とも，よばれる．

例 4.65 $\mathbb{e}^3_1$ と $\mathbb{e}^3_2$ の張る平面，$\mathbb{e}^3_2$ と $\mathbb{e}^3_3$ の張る平面，$\mathbb{e}^3_1$ と $\mathbb{e}^3_3$ の張る平面は，それぞれ，**xy-平面**，**yz-平面**，**xz-平面**と呼ばれる．　❏　Ex-2-2-0

演習問題 4.66 Oxford Dictionary of English の，“plane” (平面) の定義は，“a flat surface on which a straight line joining any two points on it would wholly lie” とある．“flat” は，“2 つのベクトルによって張られたものである”，　line-in-plane

---

*51 “互いに他のスカラー倍となっていない” という表現については，脚注*26 を参照してください．

ということの言い換え，だと思うことにすれば，上の (4.107) の意味の，原点を含む平面は，この辞書の定義を満たす． □

“A straight line joining any two points on it would wholly lie” という性質だけなら， $\mathbb{R}^3$ 自身も満たすが，平面は，$\mathbb{R}^3$ と一致することはない．これは (直観的に) 明らかだと思う人もあるかもしれないが，このことの，一番自然な説明は，7.3.2 節で述べることになる，次元の理論の一般論を，用いるものである．ここでは，次のような，直接証明を与えることにする．

♦ n-次元のベクトル空間は，$m < n$ 個のベクトルでは張れない．

P-2-23

補題 4.67 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を，原点を含む平面とするとき，$E \neq \mathbb{R}^3$ である．

証明． E を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の張る平面とするとき，次の連立方程式を考える:

x-2-42

$$(4.108)\quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \ = 0 \end{cases}$$

第 5 章で示すことになるように．上の連立方程式は，無限個の解を持つ [*52]．特に，解 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3$ で，$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ となるものが，取れる．

$\mathbb{c}$ に対する条件としての連立方程式 (4.108) は，

x-2-43

$$(4.109)\quad (\mathbb{a}, \mathbb{c}) = 0, \text{ かつ，} (\mathbb{b}, \mathbb{c}) = 0$$

を，主張しているものになっていることに，注意する．

$\mathbb{c}$ を上のように取ると，$\mathbb{c} \notin E$ である: もし $\mathbb{c} \in E$ だったとすると，$r, s \in \mathbb{R}$ で，$\mathbb{c} = r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b}$ となるものが，取れる．この等式の両辺の，$\mathbb{c}$ との内積を取ると，

[*52] この事実は，$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ のうちのどれが 0 となっているか，ということに関する場合分けを行なって，中学で習うような連立方程式の解法を使って，力づくで計算して確認することもできます．

一方，次の第 5 章で論じることになる，連立一次方程式の一般論を使うと，(4.108) のような，変数の数が式の数より多い連立方程式で，$=$ の右辺がすべて 0 となっているものについては，常に，無限個の解が存在することが，言えます (系 5.16 を参照)．

$$\underbrace{0 \neq (\mathbb{c},\,\mathbb{c})}_{\mathbb{c}\neq\mathbb{0}\text{ と補題 }4.6,(4)} = (r\,\mathbb{a}+s\,\mathbb{b},\,\mathbb{c}) \underbrace{=}_{\text{補題 }4.6,(2),(3)} r(\mathbb{a},\,\mathbb{c})+s(\mathbb{b},\mathbb{c}) \underbrace{=}_{(4.109)} 0$$

となるから矛盾である．　□ (補題 4.67)

補題 4.68 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を，原点を含む平面とする．任意の，互いに他のスカラー倍となっていない $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$ に対し，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る，原点を含む平面 $\{r\mathbb{a}+s\mathbb{b} : r, s \in \mathbb{R}\}$ は，E と一致する． P-2-24

証明． E は原点を含む平面だから，互いに他のスカラー倍になっていない $\mathbb{a}_0$, $\mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^3$ で，

$$E = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 : r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.110}$$ x-2-43-0

となるものが，取れる．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$ だから，$r_\mathbb{a}$, $s_\mathbb{a}$, $r_\mathbb{b}$, $s_\mathbb{b} \in \mathbb{R}$ で，

$$\begin{aligned}\mathbb{a} &= r_\mathbb{a}\mathbb{a}_0 + s_\mathbb{a}\mathbb{b}_0\,,\\ \mathbb{b} &= r_\mathbb{b}\mathbb{a}_0 + s_\mathbb{b}\mathbb{b}_0\end{aligned} \tag{4.111}$$ x-2-44

となるものが存在する．$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ は，互いに他のスカラー倍でないから，ベクトル $\begin{bmatrix} r_\mathbb{a} \\ s_\mathbb{a}\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} r_\mathbb{b} \\ s_\mathbb{b}\end{bmatrix}$ は，互いに他のスカラー倍でない．したがって，補題 4.35 により，行列 $A = \begin{bmatrix} r_\mathbb{a} & r_\mathbb{b} \\ s_\mathbb{a} & s_\mathbb{b}\end{bmatrix}$ は，可逆である．$A^{-1} = \begin{bmatrix} t & u \\ v & w\end{bmatrix}$ とする．

(4.111) により，$\begin{bmatrix} \mathbb{a} \\ \mathbb{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\mathbb{a} & r_\mathbb{b} \\ s_\mathbb{a} & s_\mathbb{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{a}_0 \\ \mathbb{b}_0\end{bmatrix}$ だから，この等式の両辺に，左から A^{-1} をかけると，

$$\begin{bmatrix} t & u \\ v & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{a} \\ \mathbb{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_0 \\ \mathbb{b}_0\end{bmatrix} \tag{4.112}$$ x-2-44-0

が得られる．つまり，

$$\begin{aligned}\mathbb{a}_0 &= t\,\mathbb{a} + u\,\mathbb{b}\,,\\ \mathbb{b}_0 &= v\,\mathbb{a} + w\,\mathbb{b}\end{aligned} \tag{4.113}$$ x-2-44-1

である．

$$E' = \{r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} : r, s \in E\} \tag{4.114}$$ x-2-45

として，$E = E'$ が，示せればよい．(2.21) により，このためには，$E' \subseteq E$ と，$E \subseteq E'$ が，示せればよい．

$E' \subseteq E$:　$\mathbb{c} \in E'$ とすると，(4.114) により，$r,\ s \in \mathbb{R}$ で，$\mathbb{c} = r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b}$ となるものが，存在する．この式に，(4.111) を，代入すると，

x-2-46
$$\begin{aligned}\mathbb{c} &= r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} = r(r_{\mathbb{a}}\mathbb{a}_0 + s_{\mathbb{a}}\mathbb{b}_0) + s(r_{\mathbb{b}}\mathbb{a}_0 + s_{\mathbb{b}}\mathbb{b}_0) \\ &= (rr_{\mathbb{a}} + sr_{\mathbb{b}})\mathbb{a}_0 + (rs_{\mathbb{a}} + ss_{\mathbb{b}})\mathbb{b}_0\end{aligned} \tag{4.115}$$

となるから，(4.110) により，$\mathbb{c} \in E$ である．

$E \subseteq E'$:　$\mathbb{c} \in E$ とすると，(4.110) により，$r,\ s \in \mathbb{R}$ で，$\mathbb{c} = r\,\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0$ となるものが，存在する．この等式に，(4.113) を，代入すると，

x-2-47
$$\begin{aligned}\mathbb{c} &= r\,\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 = r(t\,\mathbb{a} + u\,\mathbb{b}) + s(v\,\mathbb{a} + w\,\mathbb{b}) \\ &= (rt + sv)\mathbb{a} + (ru + sw)\mathbb{b}\end{aligned} \tag{4.116}$$

となる．したがって，$\mathbb{c} \in E$ である．　□ (補題 4.68)

より一般的には，$E \subseteq \mathbb{R}^3$ が平面である，とは，$\mathbb{R}^3$ の原点を含む平面を平行移動して得られる図形のこと，とする．つまり，$E \subseteq \mathbb{R}^3$ が，**平面** (plane in $\mathbb{R}^3$) であるとは，

x-2-47-a
(4.117) E が，ある原点を含む平面 E_0 と $\mathbb{c}_0 \in \mathbb{R}^3$ により，$E = \{\mathbb{d} + \mathbb{c}_0 : \mathbb{d} \in E_0\}$ と表わせること，

である．このような E_0 に対し，原点を含む平面の定義から，互いに他のスカラー倍でない $\mathbb{a}_0,\ \mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^3$ で，$E_0 = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 : r, s \in \mathbb{R}\}$ となるものが，取れるが，この $\mathbb{a}_0,\ \mathbb{b}_0$ 対し，

x-4-6
$$E = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 : r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.118}$$

である．

$\mathbb{c}_0 = \mathbb{0}$ のときには，$E = E_0$ だから，原点を含む平面は，この命名の示唆に矛盾せず，平面の，特別な場合になっている．

P-2-25
補題 4.69 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を，平面とする．$\mathbb{c} \in E$ として，

x-2-47-0
$$E' = \{\mathbb{d} - \mathbb{c} : \mathbb{d} \in E\} \tag{4.119}$$

とすると，E' は，原点を含む平面で，E' は，$\mathbb{c}$ の選び方に依存せず，一意に決まる．

証明． E は，平面だから，平面の定義から，互いに他のスカラー倍でない $\mathbb{a}_0$, $\mathbb{b}_0 \in \mathbb{R}^3$ と，$\mathbb{c}_0 \in \mathbb{R}^3$ で，原点を含む平面

$$E_0 = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.120}$$ x-2-47-1

に対し，$E = \{\mathbb{d} + \mathbb{c}_0 \,:\, \mathbb{d} \in E_0\}$ となるものが，取れる．特に，

$$E = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.121}$$ x-2-48

である．

$\mathbb{c} \in E$ だから，$r^*, s^* \in \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{c} = r^*\mathbb{a}_0 + s^*\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 \tag{4.122}$$ x-2-49

となものが，取れる．このとき，

$$\begin{aligned}
E' &\underbrace{=}_{(4.119),\,(4.121)\text{ による}} \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 - \mathbb{c} \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \\
&\underbrace{=}_{(4.122)\text{ による}} \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 - (r^*\mathbb{a}_0 + s^*\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0) \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(r - r^*)\mathbb{a}_0 + (s - s^*)\mathbb{b}_0 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \underbrace{=}_{(4.120)\text{ による}} E_0
\end{aligned}$$

である．つまり，E' は，原点を含む平面 E_0 として，($\mathbb{a}_0$, $\mathbb{b}_0$, $\mathbb{c}_0$ の選び方に依存せず) 一意に決まる．　❏ (補題 4.69)

次は，「直線」,「平面」, という単語自身の含意から，あたりまえに思えてしまうかもしれないが (実際，証明を見てみると，殆どあたりまえ，とも言えるのだが)，これらの概念の，ここでの定義が，直観から来る含意に沿うものになっているかどうかは，検証する必要のある事柄である:

補題 4.70 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を平面とする．このとき，（1）$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ なら，$\mathbb{a}$ P-2-26

と $\mathbb{b}$ を通る直線は E に含まれる [*53].

（2） E に含まれる任意の直線は，E を決定しない.

証明. 平面の定義 (4.117) (とその別表現 (4.118)) により，$\mathbb{a}_0, \mathbb{b}_0, \mathbb{c}_0 \in \mathbb{R}^3$ で，$\mathbb{a}_0$ と，$\mathbb{b}_0$ は，互いに他のスカラー倍でなく，

x-2-50 $$(4.123)\quad E = \{r\,\mathbb{a}_0 + s\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\}$$

と，なるようなものが，取れる.

(1): $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$ だから，$t, u, v, w \in \mathbb{R}$ で，

x-2-51 $$(4.124)\quad \mathbb{a} = t\,\mathbb{a}_0 + u\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0; \quad \mathbb{b} = v\,\mathbb{a}_0 + w\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0$$

と，なるようなものが，取れる．$\mathbb{d}$ を，$\mathbb{a}$ と，$\mathbb{b}$ を通る直線上の，任意の点とすると，補題 4.62 により，ある $d \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{d} = \mathbb{a} + d(\mathbb{b} - \mathbb{a})$ となるから，

$$\begin{aligned} \mathbb{d} &= \mathbb{a} + d(\mathbb{b} - \mathbb{a}) \\ &\underbrace{=}_{(4.124)} t\,\mathbb{a}_0 + u\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 + d(v\,\mathbb{a}_0 + w\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 - (t\,\mathbb{a}_0 + u\,\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0)) \\ &= (t + d(v - t))\mathbb{a}_0 + (u + d(w - u))\mathbb{b}_0 + \mathbb{c}_0 \end{aligned}$$

である．したがって，(4.123) により，$\mathbb{d} \in E$ である．したがって，$\mathbb{a}\overline{}\mathbb{b} \subseteq E$ である.

(2): ℓ を，E に含まれる任意の直線として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ とする．補題 4.67 により，$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ が，取れるが，平面 E' を，

x-4-7 $$(4.125)\quad E' = \{r(\mathbb{a} - \mathbb{c}) + s(\mathbb{b} - \mathbb{c}) \,:\, r, s \in \mathbb{R}\}$$

で定義すると，$\ell \subseteq E'$ だが (演習![*54])，$\mathbb{c} \in E'$ だから，$E' \neq E$ である.

□ (補題 4.70)

$\mathbb{R}^3$ でも，$\mathbb{R}^2$ でと同じように，直線上の異なる 2 点が，この直線を決定する (補題 4.62 を参照)．補題 4.70, (2) で見たように，$\mathbb{R}^3$ の平面の 2 点は，平面を

*53 実は，これは演習問題 4.66 の答になっています.

*54 ここで，演習として示さなくてはいけないのは，$\mathbb{a} - \mathbb{c}$ と $\mathbb{b} - \mathbb{c}$ が互いに他のスカラー倍になっていないこと (このことから，(4.125) が平面を定義していることが確認できます) と，$\ell \subseteq E'$ が成り立っていることです.

決定しないが，平面を決定するためには，3 点あれば十分である．

補題 4.71 同一の直線上にない 3 点 $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ は，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in E$ となる平面 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を，一意に決定する．特に，E は，$E = \{s(\mathbb{a}-\mathbb{c}) + t(\mathbb{b}-\mathbb{c}) + \mathbb{c} : s, t \in \mathbb{R}\}$ と表わせる． P-2-27

証明． $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ を，同一の直線上にない 3 点とする．

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in E$ となる平面 E が存在することは，

$$E := \{r(\mathbb{a}-\mathbb{c}) + s(\mathbb{b}-\mathbb{c}) + \mathbb{c} : r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.126}$$ x-4-8

がそのようなものになっていることからよい．上の式が平面を定義していることを言うには，$\mathbb{a}-\mathbb{c}$ と，$\mathbb{b}-\mathbb{c}$ が互いに他のスカラー倍になっていないことを示す必要があるが，これは，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ の選び方からよい (演習!)．$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in E$ となることは，$\mathbb{a} = 1(\mathbb{a}-\mathbb{c}) + 0(\mathbb{b}-\mathbb{c}) + \mathbb{c}$, $\mathbb{b} = 0(\mathbb{a}-\mathbb{c}) + 1(\mathbb{b}-\mathbb{c}) + \mathbb{c}$, $\mathbb{c} = 0(\mathbb{a}-\mathbb{c}) + 0(\mathbb{b}-\mathbb{c}) + \mathbb{c}$ により，よい．

E の一意性を示すために，$E' \subseteq \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$ を要素として含む任意の平面とする．このとき，補題 4.69 により，$E_0 = \{\mathbb{d}-\mathbb{c} : \mathbb{d} \in E\}$ と，$E'_0 = \{\mathbb{d}-\mathbb{c} : \mathbb{d} \in E'\}$ は，両方とも，原点を含む平面で，$\mathbb{a}_0 = \mathbb{a}-\mathbb{c}$, $\mathbb{b}_0 = \mathbb{b}-\mathbb{c}$ を含む．上で演習とした主張により，$\mathbb{a}_0$ と，$\mathbb{b}_0$ は，互いに他のスカラー倍でないから，補題 4.68 により，$E'_0 = E_0$ である．したがって，$E' = \{\mathbb{d}+\mathbb{c} : \mathbb{d} \in E'_0\} = \{\mathbb{d}+\mathbb{c} : \mathbb{d} \in E_0\} = E$ である． □ (補題 4.71)

次の定理の (2) の証明には，$\mathbb{R}^3$ が 3 次元である，という事実を使う必要が出てくる．今までの証明で，$\mathbb{R}^2$ が 2 次元である，という事実は，定理 4.35 を使って，うまく躱(かわ)してきたのだが，ここでは，以下の (4.127) を，ブラックボックスとして使い，その証明は，第 7.1 節まで先送りにすることにする (補題 7.13 を参照)．

定理 4.72 （1）任意の平面 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ と，直線 $\ell \in \mathbb{R}^3$ に対し，次の 3 つの場合のどれかが，成り立つ: (i) $\ell \cap E = \emptyset$; (ii) $\ell \cap E$ は singleton である; (iii) $\ell \subseteq E$. P-2-29

（2） E, $E' \subseteq \mathbb{R}^3$ を 2 つの平面とするとき，次のいずれかが成り立つ: (i) $E \cap E' = \emptyset$, (ii) $E \cap E'$ は直線である．(iii) $E = E'$.

証明． (1):　$E \cap \ell \neq \emptyset$ で $E \cap \ell$ が singleton でないなら，補題 4.70, (1) により，$\ell \subseteq E$ である．

(2):　以下の命題 (4.127) を仮定して，証明する．(4.127) は，補題 7.13 として，第 7.1 節で証明する．

x-2-51-3 (4.127)　$E, E' \subseteq \mathbb{R}^3$ を平面とするとき，$E \cap E \neq \emptyset$ なら，$E \cap E'$ は singleton ではない[*55]．

$E \cap E' \neq \emptyset$ なら，(4.127) により，$E \cap E'$ は，少なくとも 2 つの異なる要素 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ を持つ．ℓ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を含む直線とすると，補題 4.70, (1) により，$\ell \subseteq E \cap E'$ である．もし $(E \cap E') \setminus \ell \neq \emptyset$ なら，$\mathbb{c} \in (E \cap E') \setminus \ell$ とすると，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ は，同一直線上にないから，補題 4.71 により，$E'' \subseteq \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ を含む平面とすると，$E = E'' = E'$ である．　□ (定理 4.72)

parallel-in-space　$\mathbb{R}^3$ の平面の概念を用いて，$\mathbb{R}^3$ の 2 直線 ℓ, ℓ' が，**平行**である，とは，ℓ と ℓ' は，同一平面上にあり，$\ell \cap \ell' = \emptyset$ となることである，と定義する．

4.3.3 節で，任意の平面は，平行移動と回転の組合せで，xy-平面に移せることを見るが，このことを使うと，$\mathbb{R}^2$ 上で，点や，直線に対して，成り立つ命題は，$\mathbb{R}^3$ の平面上の，点や，直線に対しても，成り立つことが示せる．

4.3.2　3-次元ベクトル空間での平行移動，線形変換，アファイン変換

3D-afine　$\mathbb{R}^3$ の**平行移動** (ある $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^3$ に対する変換 $t_{\mathbb{t}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \mathbb{a} \mapsto \mathbb{a} + \mathbb{t}$) は，距離を保存し，直線を直線に移し，平面を平面に移す:　このことは，次の補題 4.73 で示すが，この補題は，2-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ での，補題 4.16 と，補題 4.43 に，対応するものである．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間，$\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{b}}$，および区間 $\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{b}}$ を $r : s$ に分割する点 $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ は，$\mathbb{R}^2$ でと同様に，(4.39), (4.40) で定義する．

P-2-30 **補題 4.73** $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbb{0}\}$ とする．このとき次が成り立つ:（1）$t_{\mathbb{t}}$ は，$\mathbb{R}^3$ の 2 点の距離を保存する．つまり，任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$d(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = d(t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}), t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b}))$

[*55] この命題は，$E, E' \subseteq \mathbb{R}^3$ であることがキーポイントになっています．165 ページの例 4.83 を参照してください．

である．

(2) $t_{\mathbb{t}}$ は，$\mathbb{R}^3$ から，$\mathbb{R}^3$ への，全単射である．

(3) 任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，直線である．

(4) $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ を，直線として，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ とすると，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})$ を含む平面に含まれる直線となる．特に，ℓ と $t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，同一の平面に含まれる．

(α) $\mathbb{a} + \mathbb{t} \notin \ell$ なら，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell \cap \ell = \emptyset$ である．特に，このときには，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，ℓ と平行である．

(β) $\mathbb{a} + \mathbb{t} \in \ell$ なら，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell = \ell$ である．

(5) 任意の直線 ℓ, $\ell' \subseteq \mathbb{R}^3$ と，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3$ に対し，

(α) $\ell \cap \ell' = \emptyset \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell' = \emptyset$;

(β) $\ell \cap \ell' = \{\mathbb{a}\} \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell' = \{t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a})\}$;

(γ) $\ell = \ell' \;\Leftrightarrow\; t_{\mathbb{t}}{}''\ell = t_{\mathbb{t}}{}''\ell'$.

特に，(上の (α) と以下の (7) により)，ℓ, $\ell' \subseteq \mathbb{R}^3$ が互いに平行な直線のときには，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ と $t_{\mathbb{t}}{}''\ell'$ も互いに平行となる．

(6) $\mathbb{t} \in \mathbb{R}^3$ として，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ とし，r, $s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ とする．$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ を，区間 $\mathbb{a} \frown \mathbb{b}$ を $r : s$ に分割する点とするとき，$t_{\mathbb{t}}(\mathbb{c})$ は，区間 $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}) \frown t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b})$ を，$r : s$ に分割する．

(7) $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を，平面とするとき，$t_{\mathbb{t}}{}''E$ も，$\mathbb{R}^3$ の平面である．$\mathbb{a} \in E$ とすとき，

(α) $\mathbb{a} + \mathbb{t} \notin E$ なら，$E \cap t_{\mathbb{t}}{}''E = \emptyset$ である．

(β) $\mathbb{a} + \mathbb{t} \in E$ なら，$t_{\mathbb{t}}{}''E = E$ である．

証明． (1), (2), (3): それぞれ，補題 4.16, (1), (2), (3) でと同じ証明で示せる．

(4): $\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \ell$, $\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$ とする．

(α): $\mathbb{a} + \mathbb{t} \notin \ell$ とする．

x-2-51-4 (4.128) $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{a}+\mathbb{t}$ は，同一直線上にない

から，補題 4.71 により，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{a}+\mathbb{t}$ は $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{a}+\mathbb{t} \in E$ となる平面 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ を一意に決定する．補題 4.71 により，

x-2-51-5 (4.129) $E = \{\underbrace{r\mathbb{t} + s(\mathbb{b}-\mathbb{a}) + \mathbb{a}}_{(*)} : r, s \in \mathbb{R}\}$

だから，$(*)$ の r と s に，それぞれ，1, 0 と，1, 1 を，代入すると，$t_{\mathbb{t}}(\mathbb{a}) = \mathbb{a}+\mathbb{t} \in E$, $t_{\mathbb{t}}(\mathbb{b}) = \mathbb{b}+\mathbb{t} \in E$ が，分かる．したがって，補題 4.70, (1) により，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell \subseteq E$ である．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$ だから，$\ell \subseteq E$ でもある．

$\ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell = \emptyset$ である: そうでなかったとして，$\mathbb{d} \in \ell \cap t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ とすると，r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{d} = \mathbb{a} + r_1(\mathbb{b}-\mathbb{a}) = (\mathbb{a}+\mathbb{t}) + r_2\underbrace{(\mathbb{b}+\mathbb{t}-(\mathbb{a}+\mathbb{t}))}_{=\mathbb{b}-\mathbb{a}}$$

となるものが，取れるから，

$$\mathbb{t} = r_1(\mathbb{b}-\mathbb{a}) - r_2(\mathbb{b}-\mathbb{a}) = (r_1-r_2)(\mathbb{b}-\mathbb{a})$$

である．したがって，$\mathbb{a}+\mathbb{t} = \mathbb{a} + (r_1-r_2)(\mathbb{b}-\mathbb{a}) \in \ell$ となり，(4.128) に矛盾である．

したがって，ℓ と，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，同一の平面 E 上にあるのだったから，ℓ と，$t_{\mathbb{t}}{}''\ell$ は，平行である．

(β): $\mathbb{a}+\mathbb{t} \in \ell$ とする．このときには，

$$\mathbb{a}+\mathbb{t} = \mathbb{a} + r_0(\mathbb{b}-\mathbb{a})$$

となる $r_0 \in \mathbb{R}$ が，取れる．

$$\begin{aligned} t_{\mathbb{t}}{}''\ell &= \{(\mathbb{a}+\mathbb{t}) + r(\mathbb{b}-\mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbb{a} + r_0(\mathbb{b}-\mathbb{a}) + r(\mathbb{b}-\mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbb{a} + (r_0+r)(\mathbb{b}-\mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\} \\ &\underbrace{=}_{*56} \{\mathbb{a} + r(\mathbb{b}-\mathbb{a}) : r \in \mathbb{R}\} = \ell \end{aligned}$$

である．

(5):　補題 4.16, (5) と同じ証明で示せる．

(6):　補題 4.43 と同じ証明で示せる．

(7):　$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in E$ を，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が同一直線上にないように選ぶ[*57]．補題 4.71 により，$\mathbb{a}_0 = \mathbb{b} - \mathbb{a}$, $\mathbb{b}_0 = \mathbb{c} - \mathbb{a}$ とすると，

$$E = \{r\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.130}$$ x-2-51-5-0

となるから，

$$t_{\mathbb{t}}{}''E = \{r\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} + \mathbb{t} \,:\, r, s \in \mathbb{R}\} \tag{4.131}$$ x-2-51-5-1

である．特に，(4.131) から，$t_{\mathbb{t}}{}''E$ が，$\mathbb{R}^3$ の平面であることが，分かる．

(α):　$\mathbb{a} \in E$ に対し，

$$\mathbb{a} + \mathbb{t} \notin E \tag{4.132}$$ x-2-51-6

と仮定する．このとき，$E \cap t_{\mathbb{t}}{}''E \neq \emptyset$ だったとして，矛盾を示す．

$E \cap t_{\mathbb{t}}{}''E \neq \emptyset$ なら，$\mathbb{d} \in E \cap t_{\mathbb{t}}{}''E$ が，取れる．r_0, s_0, r_1, $s_1 \in \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{d} = r_1\mathbb{a}_0 + s_1\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} = r_2\mathbb{a}_0 + s_2\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} + \mathbb{t}$$

となるものが，取れるが，この式から，

$$\mathbb{a} + \mathbb{t} = (r_1 - r_2)\mathbb{a}_0 + (s_1 - s_2)\mathbb{b}_0 + \mathbb{a}$$

となる．したがって，(4.130) により，$\mathbb{a} + \mathbb{t} \in E$ となるが，これは仮定 (4.132) に矛盾である．

(β):　ある $\mathbb{a} \in E$ に対し，$\mathbb{a} + \mathbb{t} \in E$ となると仮定する．このときには，r^*, $s^* \in \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{a} + \mathbb{t} = r^*\mathbb{a}_0 + s^*\mathbb{b}_0 + \mathbb{a}$$

となるものが，取れる．したがって，脚注*56 と同様の理由から，

[*56] この等式が成り立つのは，対応 $\mathbb{R} \ni r \mapsto r_0 + r \in \mathbb{R}$ が，上への写像だからです． onto

[*57] このような $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$ が，取れることは，補題 4.70, (2) からわかります．

$$
\begin{aligned}
t_{\mathbb{t}}{}''E &= \{r\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} + \mathbb{t} : r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{r\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 + (r^*\mathbb{a}_0 + s^*\mathbb{b}_0 + \mathbb{a}) : r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(r + r^*)\mathbb{a}_0 + (s + s^*)\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} : r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{r\mathbb{a}_0 + s\mathbb{b}_0 + \mathbb{a} : r, s \in \mathbb{R}\} \\
&= E
\end{aligned}
$$

である． ❑ (補題 4.73)

次の，$\mathbb{R}^3$ 上の線型写像に関する補題は，$\mathbb{R}^2$ での，定理 4.37 に，対応するものである．

P-2-31 **補題 4.74** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}$-線型写像とするとき，次が成り立つ．

(1) 任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$f''\ell$ は，singleton であるか，直線であるかの，いずれかである．更に，$f''\ell$ が直線となるのは，$f \restriction \ell$ が単射である，ちょうどそのときである．

(2) $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ と，$r, s \in \mathbb{R}$ で $r + s \neq 0$ となるものに対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{a} \frown \mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を $r : s$ に分割する点とする．このとき，$f(\mathbb{c})$ は，$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ の間の区間 $f(\mathbb{a}) \frown f(\mathbb{b})$ を $r : s$ に分割する点となる．特に，$f''\mathbb{a} \frown \mathbb{b} = f(\mathbb{a}) \frown f(\mathbb{b})$ となり，$f(\mathbb{a}) \neq f(\mathbb{b})$ なら，$f \restriction \mathbb{a} \frown \mathbb{b}$ は，単射である

(3) $E \subseteq \mathbb{R}^3$ が，平面のとき，$f''E$ は，singleton であるか，直線であるか，平面であるかの，いずれかである．$f''E$ が，平面となるのは，$f \restriction E$ が単射となる，ちょうどそのときである．

証明． (1), (2): 定理 4.37 のものと同じ証明で，示せる．

(3): $f''E$ が singleton でないとすると，$f''E$ は少なくとも 2 つの異なる要素 $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ を持つ [*58]．$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{b}_1 = f(\mathbb{a}_1), \mathbb{b}_2 = f(\mathbb{a}_2)$ となるものとする．このとき，$\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{a}_2$ である．ℓ_1 と，ℓ_2 を，それぞれ，$\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$ を含む直線，および，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ を含む直線とすると，(1) により，$f''\ell_1 = \ell_2$ で，$f \restriction \ell_1$ は，単射である．補題 4.70, (1) により，$\ell_1 \subseteq E$ だから，$\ell_2 = f''\ell_1 \subseteq f''E$ である．$\ell_2 \neq f''E$ なら，$\mathbb{b} \in f''E \setminus \ell_2$ が，取れるが，$\mathbb{a}_3 \in E$ を，$f(\mathbb{a}_3) = \mathbb{b}$

*58 $E \neq \emptyset$ なので，$f''E \neq \emptyset$ であることに，注意します．

となるようなものとすると，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ は，同一直線上になく，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ も，同一直線上にない．したがって，補題 4.71 により，

$$E = \{r(\mathbb{a}_1 - \mathbb{a}_3) + s(\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_3) + \mathbb{a}_3 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\}$$

である．このことと f の線型性から，

$$f''E = \{r(\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_3) + s(\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_3) + \mathbb{b}_3 \,:\, r, s \in \mathbb{R}\}$$

となることが，示せる．よって，$f''E$ は $\mathbb{R}^3$ の平面である．また，f の線型性から，

$$\begin{aligned} f \restriction E : E \ni r(\mathbb{a}_1 - \mathbb{a}_3) + s(\mathbb{a}_2 - \mathbb{a}_3) + \mathbb{a}_3 \\ \mapsto \quad r(\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_3) + s(\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_3) + \mathbb{b}_3 \in f''E \end{aligned}$$

だから，$f \restriction E$ は E から $f''E$ への全単射である．

$f''E$ が平面でなければ，上から，$f''E$ は，singleton であるか，直線である．$f''E$ が singleton なら，$f \restriction E$ が単射でないことは明らかである．$f''E$ が直線 ℓ のときには，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in E$ を $f(\mathbb{a}) \neq f(\mathbb{b})$ となるように取ると，$\ell_0 = \{r(\mathbb{b} - \mathbb{a}) + \mathbb{b} : r \in \mathbb{R}\} \subseteq E$ として，$f''\ell_0 = \ell = f''E$ である．一方，補題 4.70, (2) により，$\ell \subsetneq E$ だから，f は，単射ではないことがわかる．

❑ (補題 4.74)

補題 4.74, (3) を応用すると，保留にしてあった，定理 4.37, (4) の証明が，得られる．以下の系 4.75 は，定理 7.74 で，任意の体 K と，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対する，線型写像 $f : K^n \to K^n$ に関する命題に，一般化され，演習問題 8.3, (2) で，任意の有限次元の線型空間 X に対する，線型写像 $f : K^n \to K^n$ に関する命題に，一般化されることになる．

系 4.75 (定理 4.37, (4)) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{R}$-線型写像とするとき，以下は，同値である: (a) f は，単射である; (b) f は，全射である; (c) f は，全単射である． P-2-31-0

証明． $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，任意の $\mathbb{R}$-線型写像として，$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$f(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \end{bmatrix}$ とする．このとき $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に

対し，

$$(4.133)\quad \tilde{f}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_1(a_1, a_2) \\ f_2(a_1, a_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

として，定義する．$\tilde{f}$ は，線型写像で，$\mathbb{R}^3$ の xy-平面

$$E_{xy} = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_3 = 0\}$$

に対し，$f''\mathbb{R}^2 = \tilde{f}''E_{xy}$ となり，

x-4-9
$$(4.134)\quad \begin{aligned} f \text{ は，単射 } &\Leftrightarrow \tilde{f} \restriction E_{xy} \text{ は，単射} \\ f \text{ は，全射 } &\Leftrightarrow \tilde{f}''E_{xy} = E_{xy} \end{aligned}$$

である．一方，

$$\tilde{f} \restriction E_{xy} \text{ は，単射 } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{補題 4.74, (3) の後半}} \tilde{f}''E_{xy} \text{ は平面 } \overbrace{\Leftrightarrow}^{\tilde{f}''E_{xy} \subseteq E_{xy} \text{ で } \tilde{f} \text{ は線型写像だから}} \tilde{f}''E_{xy} = E_{xy}$$

により，この同値性を，(4.134) での言い換えに適用すると，系の主張での，(a), (b), (c) の同値性が，得られる．　❑ (系 4.75)

補題 4.73 と補題 4.74 から，補題 4.74 の主張は，アフィン写像に対しても，成り立つことが，分かる．

♦ 有限次元線型空間 X について線型写像 $f : X \to X$ が単射 ⇔ 全射．有限次元でなければなりたたない例を示す．

P-2-32
定理 4.76 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，アファイン写像とするとき，次が，成り立つ．

（1） 任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，$f''\ell$ は， singleton であるか，直線であるかの，いずれかである．更に，$f \restriction \ell$ が直線となるのは，f が単射となる，ちょうどそのときである．

（2） 異なる $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ と，$r, s \in \mathbb{R}$ で $r + s \neq 0$ となるものに対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{a}^\frown\mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を，$r : s$ に分割する点とする．このとき，$f(\mathbb{c})$ は，$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ の間の区間を，$r : s$ に分割する点となる．特に，ι を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間とすると，$f''\iota$ は，$f(\mathbb{a})$ と，$f(\mathbb{b})$ の間の，区間となり，$f(\mathbb{a}) \neq f(\mathbb{b})$ なら，$f \restriction \iota$ は，単射である．

（3） $E \subseteq \mathbb{R}^3$ が，平面のとき，$f''E$ は，singleton であるか，直線である

か，平面であるかの，いずれかである．$f''E$ が，平面となるのは，$f\restriction E$ が，単射である，ちょうどそのときである．□

直交変換は，線型写像で，補題 4.49 (2) (と定理 4.34) により，全単射だから，補題 4.73 と補題 4.74 により，以下が分る:

定理 4.77 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を，平行移動と直交変換の (複数回の[*59]) 合成によって得られる写像とする．このとき，f は全単射で，以下が成り立つ． P-2-32-0

(1') 任意の直線 $\ell\subseteq\mathbb{R}^3$ に対し，$f''\ell$ は，直線である．

(2') 異る $\mathbb{a},\mathbb{b}\in\mathbb{R}^3$ と，$r,s\in\mathbb{R}$ で $r+s\neq 0$ となるものに対し，$\mathbb{c}\in\mathbb{a}\urcorner\mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を，$r:s$ に分割する点とする．このとき，$f(\mathbb{c})$ は，$f(\mathbb{a})$ と，$f(\mathbb{b})$ の間の，区間を，$r:s$ に分割する点となる．特に，ι を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間とすると，$f''\iota$ は，$f(\mathbb{a})$ と，$f(\mathbb{b})$ の間の，区間となる．

(3') $E\subseteq\mathbb{R}^3$ が，平面のとき，$f''E$ は，平面である．□

4.3.3　3-次元ベクトル空間での原点を中心とする回転

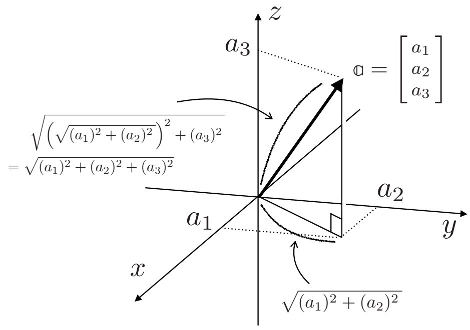
$n=3$ のときの，$\mathbb{R}^n$ での，ノルムの定義 (4.23) と，距離の定義 (4.27) は，$\mathbb{a},\mathbb{b}\in\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\mathbb{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ に対し， 3-dim-rotation

$$\text{(4.135)}\quad \|\,\mathbb{a}\,\| = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\,, \qquad \text{x-2-52}$$

$$\text{(4.136)}\quad d(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} \qquad \text{x-2-53}$$

として与えられるが，これらは，3-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ での，幾何学的な直観としてのベクトルの大きさや，幾何学的な直観としての，(位置ベクトルとしての) 点の間の距離に，対応するものになっている．このことは，以下の図で表現される状況から，理解できる:

[*59] ここでも，“複数回” は 0 回 (つまり，f は平行移動か直交変換かのいずれかである場合) や 1 回 (例えば，平行移動と直交変換の 1 つづつ合成) も含むものとします．



♦ figur19x.pdf

$\mathbb{R}^3$ での，原点を固定する回転も，$\mathbb{R}^2$ での原点を中心とする回転 (122 ページの図を参照) と同様にして，$\mathbb{R}^3$ から，$\mathbb{R}^3$ への，線型変換でなければならないことが，分かる．回転は，線分の長さを保存するべきである，ということから，この表現行列は，直交行列である (べきである) ことも，分かる (定理 4.47 を参照).

一方，$\mathbb{R}^3$ での原点を固定する回転を，満足のゆくやり方で定義するには，第 6 章で定義されることになる行列式の概念が必要となり ((8.32) の前後を参照)，この一般的な原点を固定する回転の定義が，次に導入する x-軸，y-軸 z-軸を回転軸とする $\mathbb{R}$ の回転の合成として表わせる回転と一致することを示すには，行列の固有値の議論 (オイラーの回転定理 — 定理 8.20 の前を参照) が必要になる．

そこで，本節では，以下のような，具体的な回転で議論できること，のみを使って，議論することにする: x-軸 (または，それぞれ y-軸，z-軸) を，回転軸として持つ，$\mathbb{R}^3$ の回転は，$\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする回転の表現行列を調節することで，次のように，表現することができる [*60].

まず，z-軸を回転軸とする角度 θ の反時計回りの回転については,

x-2-54

$$(4.137)\quad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表現できる．反時計回り方向とは，その方向に右ネジを回したときネジの進

*60 ここでは，系 4.75 の証明で，f から，$\tilde{f}$ を作ったときと，類似のアイデアが用いられていることに，注意します．ただし，$\tilde{f}$ を f から作ったときには，新しい座標上の点はすべて $\mathbb{0}$ に対応させていたのに対し，ここでは，新しい座標上の点は，同じ点に移すことで，$\mathbb{R}^2$ での回転を，$\mathbb{R}^3$ の回転に拡張しています．

む方向が z-軸の正の方向になっている，ということである [*61]．同じ関係を x-軸と y-軸を回転軸とする回転について考えると，これらは，それぞれ，$R_z(\theta)$ の行と列を，それぞれ，1 (または 2) づつシフトしたものになるので，これらは，

$$(4.138)\quad R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$ x-2-55

である．

補題 4.78 $R_x(\theta)$ (または，それぞれ，$R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$) は直交行列である． P-2-33

証明． $R_z(\theta)$ について，補題 4.47, (b) が成り立つことを示す．$R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ についても，同様に示せる．

$$\left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 = 1,$$

$$\left(\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 0 = 1, \quad \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$\left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

□ (補題 4.78)

ここでは，$R_x(\theta_1)$, $R_y(\theta_2)$, $R_z(\theta_3)$ の形の行列の積としてあらわせる行列を，表現行列として持つ，線型変換を，**原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転**と，暫定的に定義することにする．暫定的と言ったのは，原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転と看做せる線型変換が，すべて，このような積として書けるのかどうか，ということについての議論が，今の時点で，まだ，できていないからである．原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転の，十分に一般的と思える定義を 333 ページで導入し，この定義の，ここでの暫定的な定義との同値性を系 8.22 で示すが，これによって，ここで与えた，原点を固定する，$\mathbb{R}^3$ の回転の定義を，最終的なものとして採

[*61] 脚注*44 で，既に注意したように，ここでも，“右”, “左” は直観的な理解の助けのために言っている “言葉の綾” にすぎず，数学的な厳密な定義は，象限に関する場合分けで行なわれるべきものです．

用されてよい，ということの説明が，得られることになる．

補題 4.78 と補題 4.49, (1) により，上の意味での原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転の表現行列は，直交行列であることに注意する．

P-2-34 **補題 4.79** （1）任意のベクトル $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3$ に対し，原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転 $\rho_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で，$\rho_0(\mathbb{a})$ が $\mathbb{e}_1^3$ のスカラー倍となるようなものが存在する．

（2） 任意のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を共に xy-平面上の点に移すような，原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転 $\rho_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在する．

証明． (1): $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ とする．x-軸を回転軸とする $\mathbb{R}^3$ の回転 r_1 を，行列

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}} & \frac{a_3}{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}} \\ 0 & -\frac{a_3}{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}} & \frac{a_2}{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}} \end{bmatrix}$$

を表現行列として持つものとすると，

$$r_1(\mathbb{a}) = R_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \sqrt{(a_2)^2 + (a_3)^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．

z-軸を回転軸とする $\mathbb{R}^3$ の回転 r_2 を，行列

$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}} & \frac{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{(a_2)^2+(a_3)^2}}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}} & \frac{a_1}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を表現行列として持つものとすると，

$$(r_2 \circ r_1)(\mathbb{a}) = R_2 \begin{bmatrix} a_1 \\ \sqrt{(a_2)^2 + (a_3)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．したがって，$r_2 \circ r_1$ は求めているような $\mathbb{R}^3$ の回転となっている．

(2): $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ として，r_1, r_2 を，上のようなものとし，$(r_2 \circ r_1)(\mathbb{b}) = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$ とする．r_3 を，x-軸を回転軸とする $\mathbb{R}^3$ の回転で，行列

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_2'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}} & \frac{b_3'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}} \\ 0 & -\frac{b_3'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}} & \frac{b_2'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}} \end{bmatrix}$$

を，表現行列として持つものとすると，上と同様に，

$$(r_3 \circ r_2 \circ r_1)(\mathbb{a}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$(r_3 \circ r_2 \circ r_1)(\mathbb{b}) = \begin{bmatrix} b_1' \\ \sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるから，回転 $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ は，求めるようなものである．　❏ (補題 4.79)

定理 4.80 任意の平面 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，平行移動 t と，原点を固定する回転 r で， $r \circ t''E$ が，xy-平面となる，ようなものが，存在する．　P-2-35

証明． $\mathbb{t} \in E$ を，任意に取ると，$t_{-\mathbb{t}}$ は，E を，原点を含む平面 $t_{-\mathbb{t}}''E$ に移す．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in t_{-\mathbb{t}}''E$ を，互いに他のスカラー倍でないベクトルとすると，補題 4.79, (2) により，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を xy-平面上に移す，原点を固定する回転 r で，$r(\mathbb{a})$ と，$r(\mathbb{b})$ が，共に xy-平面に含まれるようなものがとれるが，定理 4.77 により，$r \circ t_{-\mathbb{t}}''E$ は，$r(\mathbb{a})$ と $r(\mathbb{b})$ の張る平面となるから，xy-平面と一致する．　❏ (定理 4.80)

次の補題は，第 7 章で導入することになる用語を用いると，「$\mathbb{R}^3$ の xy-平面は，$\mathbb{R}^2$ と線型空間として同型で，標準的な同型写像は，ノルムも保存するものとなっている」，と述べることができる．xy-平面は，yz-平面，または，zx-平面で置き換えても，同様である．

補題 4.81　P-2-36

$i_{xy} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ は，1-1 な線型写像で，$i_{xy}''\mathbb{R}^2$ は，xy-平面と一致する．i_{xy} は，内積も保存する．つまり，すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (i_{xy}(\mathbb{a}), i_{xy}(\mathbb{b}))$ が，成り立つ[*62]．

[*62] 等式の左辺の $(\cdot,\cdot)$ は，$\mathbb{R}^2$ の内積で，右辺の $(\cdot,\cdot)$ は，$\mathbb{R}^3$ の内積であることに，注意してください．

$$i_{yz} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}, \qquad i_{zx} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

に対しても，同様の主張が，成り立つ．

証明． 演習．　□ (補題 4.81)

補題 4.80，定理 4.77 と，補題 4.81 により，$\mathbb{R}^2$ で成り立つ幾何学的な命題は，$\mathbb{R}^3$ の任意の平面上で成り立つ命題に翻訳できる．次の定理と，その証明は，そのような翻訳の例の一つである．

P-2-37 **定理 4.82** ($\mathbb{R}^3$ での平行線の公理)　任意の直線 $\ell \in \mathbb{R}^3$ と，$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \ell$ に対し，直線 $\ell' \subseteq \mathbb{R}^3$ で，$\mathbb{b}$ を通り，ℓ と平行なものが，一意に存在する．

証明． E を，直線 ℓ と，点 $\mathbb{b}$ を含む，平面とする (このようなものが取れることは，補題 4.71 と，補題 4.70, (1) により，よい)．$\mathbb{R}^3$ での，2 つの直線の平行性の定義から，$\mathbb{b}$ を通る，ℓ と平行な直線は，存在すれば，E に含まれることに注意する．定理 4.80 により，E を，xy-平面に移す，平行移動と回転の合成となっている写像 $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，存在するが，定理 4.77 により，補題の主張が，成り立つことと，$s''\ell$ と平行な $s(\mathbb{b})$ を通る xy-平面上の直線が，一意に存在することは，同値である．補題 4.81 により，このことは，$\mathbb{R}^2$ 上の直線 $(i_{xy})^{-1}{}''(s''\ell)$ と平行な $(i_{xy})^{-1}(s(\mathbb{b}))$ を通る $\mathbb{R}^2$ の直線が，一意に存在することと，同値となる．この，最後の命題は，定理 4.17 により，成り立つ．

□ (定理 4.82)

$\mathbb{R}^3$ での，2 つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の直交性を，それらの内積が $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = 0$ となることで定義できること ((4.90) の $n = 3$ の場合) の妥当性も，定理 4.80 を介して，次のように議論することができる:

2 つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の張る (原点を含む) 平面は，補題 4.79, (2) により，原点を中心とする回転で xy-平面に移せる．この変換で，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ が，それぞれ $\mathbb{a}'$ と $\mathbb{b}'$ に移るとする．原点を中心とする回転は，直交変換だから (補題 4.78 と，補題 4.49, (1) による)，直交変換の特徴付け (定理 4.47) を思い出すと，(ピタゴラスの定理を直角の定義としたとき) $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ が直交することと，$\mathbb{a}'$ と $\mathbb{b}'$ が直交することは，同値である (と考えてよい)．補題 4.81 でのように，$\mathbb{R}^3$ での xy-平面を $\mathbb{R}^2$ と同一視すると，この同一視は，

内積も保存するものになっているから，(定理 4.55 により) $\mathbb{a}'$, $\mathbb{b}'$ が ($\mathbb{R}^2$ の点の意味で) 直交すること，($\mathbb{R}^3$ での内積の意味で) $(\mathbb{a}', \mathbb{b}') = 0$ となることが，同値になることがわかる．直交変換としての原点を中心とする回転も，内積を保存するから (定理 4.47)，これは，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = 0$ と同値である．

4.4　一般次元のベクトル空間

$n > 3$ に対する $\mathbb{R}^n$ では，$\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ でのような "絵" を描くことはできないが，直線や，平面を，$\mathbb{R}^3$ でと同様に定義することにより，$\mathbb{R}^n$ での幾何学を，$\mathbb{R}^3$ でと同様に展開することができる． n-dim

つまり，$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ に対し，$\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ が，**直線**であるとは，ある $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ により，$\ell = \{\mathbb{a} + r\,\mathbb{b} : r \in \mathbb{R}\}$ と表わされること，とする．

$\mathbb{R}^2$ や，$\mathbb{R}^3$ でと同様に，一般の $\mathbb{R}^n$ でも，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間，$\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$, および，区間 $\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ を $r : s$ に分割する点 $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$ を，(4.39), (4.40) で定義する．

$\mathbb{R}^3$ でと同様に，任意の $n \geq 3$ に対して，$E \subseteq \mathbb{R}^n$ が，**原点を含む平面** (plane containing the origin) であるとは，E は，互いに他のスカラー倍となっていない[*63] $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{0}\}$ によって，$E = \{r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} : r, s \in \mathbb{R}\}$ と表わせること，とする．より一般には，$E \subseteq \mathbb{R}^n$ が，**平面** (plane) であるとは，ある原点を含む平面 $E_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ と，$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$ により，$E = \{\mathbb{a} + \mathbb{c} : \mathbb{a} \in E_0\}$ と表わせること，とする．

4.4.1　一般次元のベクトル空間での点と直線と平面

第 4.3.1 節で述べた点や直線や平面に関する命題の多くは，$n > 3$ に対する $\mathbb{R}^3$ でも，第 4.3.1 節での証明により，成り立つことが，示せる (演習)．しかし，定理 4.72 (2), 特に，(4.127) は，$n > 3$ に対する $\mathbb{R}^n$ では，成り立たない: n-dim-line-plane

例 4.83 $\mathbb{R}^4$ で，平面 E_1, E_2 を，$E_1 = \{r\,\mathbb{e}^4_1 + s\,\mathbb{e}^4_2 : r, s \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{r\,\mathbb{e}^4_3 + s\,\mathbb{e}^4_4 : r, s \in \mathbb{R}\}$ と定義すると，$E_1 \cap E_2 = \{\mathbb{0}_4\}$ である． ❏ Ex-2-4

[*63] "互いに他のスカラー倍となっていない" という表現については，脚注*26 を，参照してください．

4.4.2　$\mathbb{R}$-線型写像の幾何学的特徴付け

germetr-char

以下で，定理 4.41 の一般化となっている，$\mathbb{R}$-線型写像の幾何学的特徴付けを与える定理 4.85 を証明する．この定理は，更に，幾つかの改良が存在するが，これらの改良については，第 II 巻で述べる．

◆ 第 II 巻に「選択公理と線型代数」という章を設ける．

まず，定理 4.37 と，その拡張である，補題 4.74 は，同じ証明により，次の補題 4.84 に拡張できる，ことを見る．

P-4-a

補題 4.84 $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を，$\mathbb{R}$-線型写像とするとき，次が，成り立つ．

（1） 任意の直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^m$ に対し，$f''\ell$ は，singleton であるか，直線であるかの，いずれかである．更に，$f \restriction \ell$ は定数値関数であるか，1-1 であるかの，いずれかである．

（2） $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ と，$r, s \in \mathbb{R}$ で $r + s \neq 0$ となるものに対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ を，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を $r : s$ に分割する点とする．このとき，$f(\mathbb{c})$ は，$f(\mathbb{a})$ と $f(\mathbb{b})$ の間の区間 $f(\mathbb{a}) \sqcap f(\mathbb{b})$ を $r : s$ に分割する点となる．特に，$f''\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b} = f(\mathbb{a}) \sqcap f(\mathbb{b})$ となり，$f(\mathbb{a}) \neq f(\mathbb{b})$ なら，$f \restriction \mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ は 1-1 である

（3） $E \subseteq \mathbb{R}^m$ が平面のとき，$f''E$ は，singleton であるか，直線であるか，平面であるか，のいずれかである．$f''E$ が，平面となるのは，$f \restriction E$ が，単射となる，ちょうどそのときである．

証明． (1), (2) は，それぞれ 定理 4.37, (1), (2) と同じ証明で示せる．(3) は，補題 4.74, (3) と同じ証明で示せる．　□（補題 4.84）

P-4-0

定理 4.85 $m, n \in \mathbb{N}$ として，$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とするとき，以下の (a) と (b) は，同値である:

（a） f は，線型写像である．

x-2-56 （b） (4.139) $f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$;

x-2-57 (4.140) 任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ と $r, s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ に対し，$\mathbb{c} \in \mathbb{R}^m$ が区間 $\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$ を $r : s$ に分割するなら，$f(\mathbb{c})$ も区間 $f(\mathbb{a}) \sqcap f(\mathbb{b})$ を $r : s$ に分割する．

証明. (a) $\Rightarrow$ (b):　補題 4.84 によりよい.

(b) $\Rightarrow$ (a):　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が, (4.139) と, (4.140) を, 満たすとする. $f''\mathbb{R}^m = \{\mathbb{0}_n\}$ なら, f は, 明らかに線型写像である. したがって, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ で $f(\mathbb{b}) \neq \mathbb{0}_n$ となるものがある, と仮定する. 補題 4.21 により, $\mathbb{b} \neq \mathbb{0}_m$ である.

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$ とする, $c\,\mathbb{a}$ は, 区間 $\mathbb{0}_m \ulcorner \mathbb{a}$ を, $c : 1-c$ に分割する ($c\,\mathbb{a} = \frac{c}{c+(1-c)}(\mathbb{a} - \mathbb{0}_m) + \mathbb{0}_m$). したがって, (4.140) により, $f(c\,\mathbb{a})$ は, $f(\mathbb{0}_m) \ulcorner f(\mathbb{a})$ を, $c : 1-c$ に分割する. よって,

$$f(c\,\mathbb{a}) = \underbrace{\tfrac{c}{c+(1-c)}}_{=c}(f(\mathbb{a}) - \underbrace{f(\mathbb{0}_m)}_{=\mathbb{0}_n}) + \underbrace{f(\mathbb{0}_m)}_{=\mathbb{0}_n} = cf(\mathbb{a}) \tag{4.141}$$ x-2-58

である. したがって, f は, (4.54) を満たす.

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ とする. $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ なら,

$$f(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = f(2\mathbb{a}) \underbrace{=}_{(4.141)\text{ による}} 2f(\mathbb{a}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{a}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})$$

である.

$\mathbb{a} \neq \mathbb{b}$, なら, $\mathbb{a} + \mathbb{b}$ は, 区間 $2\mathbb{a} \ulcorner 2\mathbb{b}$ を, $1:1$ に分割する. したがって, f に対する仮定から, $f(\mathbb{a} + \mathbb{b})$ は, $f(2\mathbb{a}) \ulcorner f(2\mathbb{b}) \underbrace{=}_{(4.141)\text{ による}} 2f(\mathbb{a}) \ulcorner 2f(\mathbb{b})$ を, $1:1$ に分割する. したがって ((4.40) により),

$$f(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = 2f(\mathbb{a}) + \tfrac{1}{1+1}(2f(\mathbb{b}) - 2f(\mathbb{a})) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})$$

である.

以上から, f は, (4.53) も, 満たす. □ (定理 4.85)

次の系は, アファイン写像の定義と定理 4.85 から直ちに導かれる:

系 4.86 $m, n \in \mathbb{N}$ として, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とするとき, 以下は同値である: P-4-1

(a) f は, アファイン写像である.

(b) (4.140) 任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ と $r, s \in \mathbb{R}$, $r + s \neq 0$ に対し, $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^m$ が区間 $\mathbb{a} \ulcorner \mathbb{b}$ を $r : s$ に分割するなら, $f(\mathbb{c})$ も区間 $f(\mathbb{a}) \ulcorner f(\mathbb{b})$

を $r:s$ に分割する. ❑

第 5 章

連立一次方程式

sys-eqs

> The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations
>
> ...
>
> and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices.
>
> — Arthur Cayley [5][*1]

5.1　連立一次方程式と係数行列

coefficient-matrices

5.1.1　一次方程式

linear-equation

一次方程式 (linear equation) とは,

x-5-0

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{5.1}$$

という形をした式のことである．ここで，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ は，具体的に与えられた定数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は，**不定定数** (ふていじょうすう，unknowns) または，**不定変数** (unknown variables) あるいは単に **変数** (variables) とよばれる記号である[*2]． 数の n-組 [*3] $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle$, あるいは，ベクトルとして捉えた，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ が，一次方程式 (5.1) の**解** (solution) である，とは，$c_1, \ldots, c_n$ を，それぞれ，変数 $x_1, \ldots, x_n$ に代入したとき，数の等式 $a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \cdots + a_n \cdot c_n = b$ が成り立つこと，とする．一次方程式 (5.1) での，$a_1, \ldots, a_n, b$ を，この方程式の**係数** (coefficients) とよぶ．$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etc. に対し，一次方程式 (5.1) の係数が，すべて K の要素のとき，これを，**K-係数の一次方程式** (linear equation with coefficients in K) とよぶ．脚注*3 でも述べたように，ただ一

---

*1 ケイリー (Arthur Cayley, 1821(文政 4 年，リッチモンド (英国))〜1895(明治 28 年，ケンブリッジ (英国))) は，第 1 章の脚注*1 で触れたシルヴェスターと共に，行列や (第 6 章で見ることになる) 行列式の理論の基礎を確立した，イギリスの数学者です．1858 年 (安政 5 年) の [5] は，数学史上，行列の理論を確立することになった文献，と解釈されることが多いものです．

*2 “未定常数” (unknown constants) という呼び方をすることもあります．「未定常数」は，“まだ値が決まっていなくて，後で値を固定して定数にするつもりのもの” というニュアンスがありますが，それとは違った使い方をするときには，この含意が邪魔になる可能性もあります．本書では，主に，一番単純な「変数」という言い方を，主に使うことにします．

*3 以下では，主に，実数の範囲での数を念頭に置いて議論していますが，この章で述べることは，任意の体 K の範囲 (特に $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{C}$) で考えたときにも，同様に成り立ちます．そこで，章の後半では，明示的に，より一般的な，体 K に対する，K-係数の連立方程式についての記述に，移行しています．

次方程式と言った場合には，$\mathbb{R}$-係数の一次方程式のこととする．特に断らない限り，K-係数の一次方程式の解，と言ったときには，K の要素の組のみを，考えることにする．

E を，一次方程式とするとき，S(E) で，E の解の全体を表わすことにする [*4]．S(E) を，E の**解集合** (solution set) とよぶ．例えば，$K = \mathbb{R}$ で考えて，E が，(5.1) の形をしているときには，

$$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \{ \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \,:\, a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \cdots + a_n \cdot c_n = b \} \tag{5.2}$$ x-5-1

である．2 つの一次方程式 E と E′ が，**同値** (equivalent) であるとは，E と E′ を，同じ変数のセットを持つ一次方程式と見做したとき [*5]，S(E) = S(E′) が，成り立つこと，とする．

例 5.1 実数係数の 2 変数の一次方程式 E: $ax_1 + bx_2 = c$ を，考えてみる． Ex-5-0

（1） $a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$ のときには，E を満たす実数の組は，存在しないから， $\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \emptyset$ である．

（2） $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$ のときには，すべての実数の組は，E を満たすから，$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \mathbb{R}^2$ である．

（3） $a \neq 0$ のときには，E は，E′: $x_1 + \frac{b}{a}x_2 = \frac{c}{a}$ と同値になるから，

$$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \{ \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in \mathbb{R},\ u = -\tfrac{b}{a}t + \tfrac{c}{a} \}$$

となり，S(E) は，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線である [*6]．$b \neq 0$ のときも，同様である．
❏

[*4] この S(·) という書き方は，スタンダードなものではなく，著者が本書での記述のために選んだ記法です．インターネットで調べてみると，ドイツ語の講義録等では，ドイツ語で「解集合」をあらわす，„Lösungsmenge“ の頭文字をとった，L. (ここでの例では，S(E) に対応して，L_{E}) という記号を，解集合を表わすために，あてているものがあります． fn-5-a

[*5] 例えば，$ax_1 + bx_2 = c$ は，$ax_1 + bx_2 + 0x_3 = c$ と読みなおすことができるので，変数 x_1, x_2, x_3 を持つ方程式と見ることもできます．“E と E′ を同じ変数のセットを持つ一次方程式と見做す” とは，必要なら，このような読み換えをして，E と E′ が，同じ変数の組を持つものと見做す，という意味です．ここでの $0x_3$ のように，もとの方程式には，明示的には含まれていない変数で，方程式の意味を変えずに付け加えられたものは，**ダミー変数** (dummy variable) と呼ばれることもあります． fn-5-0

Ex-5-1 **例 5.2** 実数係数の 3 変数の一次方程式 E: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ の解集合 S(E) も，容易に分析できる．

（1） $a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ b \neq 0$ のときには，E を満たす実数の 3 つ組は，存在しないから，S(E) $= \emptyset$ である．

（2） $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$ のときには，すべての実数の 3 つ組は，方程式の解になるから，S(E) $= \mathbb{R}^3$ である．

（3） 係数 a_1, a_2, a_3 の，少なくとも 1 つは 0 でないときには，$\mathbb{a} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ として，$\|\mathbb{a}\| \neq 0$ である．$c := \|\mathbb{a}\|$ として，$\mathbb{b} := \frac{b}{c^2}\mathbb{a}$ とすると，

x-5-1-0
$$(5.3) \quad (\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \frac{b}{c^2}(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = b$$

となるから，$\mathbb{b}$ は E の (1 つの) 解になっている．変数の 3 つ組を $\mathbb{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ と表わすことにすると，E は，内積を用いて，$(\mathbb{a}, \mathbb{x}) = b$ と表わせるから，上式 (5.3) から，この式を引くと，E と同値な方程式

x-5-2-0
$$(5.4) \quad (\mathbb{a}, \mathbb{b} - \mathbb{x}) = 0 \quad (\Leftrightarrow \ (\mathbb{b}, \mathbb{b} - \mathbb{x}) = 0)$$

が得られる．内積が 0 になることの幾何学的な意味を思い出すと (4.3.3 節の終りを参照)，この式のそれぞれの解 $\mathbb{c}$ は，線分 $\overline{\mathbb{0}\,\mathbb{b}}$ を垂線として，点 $\mathbb{b}$ を含む平面上の点になっていることが，分かる (実際，(5.4) を満たす $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ の全体が，(4.117) の意味での平面と一致することの厳密な証明は，系 7.66 で示される)．したがって S(E) $\subseteq \mathbb{R}^3$ は，この場合には，$\mathbb{R}^3$ の平面である． ❏

一般の $n \in \mathbb{R},\ n \geq 3$, に対しても，内積が 0 となることを，ベクトルの直交性と解釈すると，例 5.2 と同様の主張が，得られる．

P-5-a **定理 5.3** $n \in \mathbb{N}$ に対し，K を，体として，$a_1, \ldots, a_n, b \in K$ として，E を，K での一次方程式 $a_1x_1 + \cdots a_nx_n = b$ とする．

（1） $a_1 = \cdots = a_n = 0$ で，$b \neq 0$ のときには．S(E) $= \emptyset$ である．

（2） $a_1 = \cdots = a_n = 0$ かつ $b = 0$ のときには，S(E) $= K^n$ である．

---

*6 これは $b = 0$ の場合と，そうでない場合に分けて考えると，スムーズに理解できます (演習!)．

（3） $a_1, \ldots, a_n$ の，少なくともどれか1つは，0 と異るとき，つまり，

$\mathbb{a} := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ として，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ となっているとき，$b = 0$ なら，$\mathsf{S}(\mathsf{E})$ は，内積を用いて，

$$\text{(5.5)} \quad \mathsf{S}(\mathsf{E}) = \{\mathbb{c} \in K^n \,:\, (\mathbb{a}, \mathbb{c}) = 0\}$$ x-5-2-0-0

と表わせる．

$b \neq 0$ なら，$c := \|\mathbb{a}\|$ として，$\mathbb{b} = \frac{b}{c^2}\mathbb{a}$ とすると，$\mathsf{S}(\mathsf{E})$ は，

$$\text{(5.6)} \quad \mathsf{S}(\mathsf{E}) = \{\mathbb{c} \in K^n \,:\, (\mathbb{b}, \mathbb{b} - \mathbb{c}) = 0\}$$ x-5-2-1

と表わせる． ❑

上の (5.5)，または，(5.6) の形の集合は，K^n の**超平面**と呼ばれる．超平面の特徴付けについては，定理 7.65 と，その前後を参照されたい．

5.1.2　連立一次方程式，係数行列と，ベクトルの方程式

一次方程式を，複数個集めた集合 $\mathcal{S}$ を，**連立一次方程式** (system of linear equations) とよぶ．ここでの「複数個」は，0 個の場合 (つまり $\mathcal{S} = \emptyset$ の場合) も，1 個の場合も含むことにする [*7]．連立一次方程式 $\mathcal{S}$ に現れる変数が，すべて，$x_1, \ldots, x_n$ のどれかになっているとき，これらの変数は，すべて，$\mathcal{S}$ に含まれる各々の一次方程式に実際に現れる，と考えてよい．これは，$\mathsf{E} \in \mathcal{S}$ に $x_i, \ldots$ を含む項が，明示的に含まれていないときには，E に，$0 \cdot x_i, \ldots$ という，項を足して得られる，E と同値な一次方程式で，E を，置き換えることが，できるからである (脚注*5 の例を参照 — このようにして加えられた，$x_i, \ldots$ をダミー変数と呼ぶことにしたのだった)．$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ が，変数 $x_1, \ldots, x_n$ を持つ，連立一次方程式 $\mathcal{S}$ の，**解** (solution) であるとは，$\mathbb{c}$ が，$\mathcal{S}$ に含まれる，すべての一次方程式の解になっていることとする．$\mathcal{S}$ の解の全体からなる集合を，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ と表わし (脚注*4 を参照)，$\mathcal{S}$ の**解集合** (solution set) とよぶ．連立方程式 $\mathcal{S}$ が，0 個の一次方程式からなるとき，つまり $\mathcal{S} = \emptyset$ のときは，

[*7] 一次方程式を無限個含む連立方程式を考えることもできますが，ここでは，「複数個」は，有限の個数の場合のみを，考えることにします．

$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathbb{R}^n$ である．ただし，ここでの n は，$\mathcal{S}$ を，どの変数を持つ連立一次方程式と見るかに依存して，決まる．特に，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}^n$ で，$n' \geq n$ なら，ダミー変数を加えることで，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ と見ることもできる．

$\mathcal{S} = \{\mathsf{E}\}$ なら，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathsf{S}(\mathsf{E})$ である．一般には，$\mathcal{S} = \{\mathsf{E}_1, ..., \mathsf{E}_m\}$ なら，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathsf{S}(\mathsf{E}_1) \cap \cdots \cap \mathsf{S}(\mathsf{E}_m)$ である．

連立一次方程式 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ についても， $\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathsf{S}(\mathcal{S}')$ のとき，$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ は**同値** (equivalent) である，ということにする．ここでも，同値性は，必要な変数の集合の調節を行なって，$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が，同じ変数の集合を持つものと見做した上で議論することにする．

変数 $x_1, ..., x_n$ を持つ連立一次方程式 $\mathcal{S}$ が，

x-5-2
$$(5.7) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \qquad \vdots & \ \ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

という形をしているとき [*8]，$\mathcal{S}$ の係数 $a_{i,j}$，b_i $(i \in \overline{m},\ j \in \overline{n})$，を拾って，$m \times n$-行列 $A := [a_{i,j}]$ と，m-次元 (列) ベクトル $\mathbb{b} := [b_i]$ を作り，変数からなるベクトル $\mathbb{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を取ると，連立方程式 $\mathcal{S}$ は，**n-次元ベクトルに関する方程式** (linear n-dimensional vector equation)

x-5-3
$$(5.8) \quad A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

で，表現することができることになる．これは，いずれにしても，便利な記法であるが，実は，この読み換えは，記法の問題に留まらない，本質的なものである: (m, n)-列 A を n-ベクトル $\mathbb{a}$ に右からかけるという演算は，n-次元ベクトル $\mathbb{a}$ に，対応する線型写像

$$\varphi_A : K^n \to K^m; \mathbb{a} \mapsto A\mathbb{a}$$

[*8] ここでは，連立一次方程式は，一次方程式の有限集合と定義していたので，(5.7) での連立方程式の (集合としての) 実体は，
$\{a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1\ , ...,\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m\}$
です．

を施す，ということの別表現と看做せるのだったから，方程式 (5.8) は，線型写像の方程式 $\varphi_A(\mathbb{x}) = \mathbb{b}$ と，読み換えることが，できるからである．

ベクトルに関するー次方程式 (5.8) を，$\mathbb{E}$ と呼ぶことにして，$\mathbb{E}$ を，連立一次方程式 $\mathcal{S}$ の別表現として扱うことにする．特に，$\mathsf{S}(\mathbb{E}) = \mathsf{S}(\mathcal{S})$ とする．上の考察から，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathsf{S}(\mathbb{E}) = (\varphi_A)^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ である．

一般には，方程式とは，いくつかの変数を含む項 t, u により，$t = u$ と書くことのできる表現のことである．方程式には，(5.1) の形をした一次方程式や，(5.8) の形のベクトルに関する方程式を始め，$n > 1$ に対する，n-次方程式，常微分方程式，偏微分方程式など，様々な種類のものがあるが，本巻で扱う方程式は，主に，一次方程式なので，以降，**方程式** (equation)，また，**連立方程式** (system of equations) と言ったときには，特に断らない限り，それぞれ，一次方程式，または，連立一次方程式のこと，とする．

連立方程式 $\mathcal{S}$: (5.7) (または，これに対応するベクトルに関する方程式 $\mathbb{E}$: (5.8)) での行列 A を，連立方程式 $\mathcal{S}$ (または，方程式 $\mathbb{E}$) の，**係数行列** (coefficient matrix) とよぶ．係数行列 A に，ベクトルに関する方程式 (5.8) での $\mathbb{b}$ を，$n+1$-列として加えて得られる $m \times (n+1)$-行列

$$(5.9)\quad \tilde{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}, & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$ 7-2

を，連立方程式 $\mathcal{S}$ (または，方程式 $\mathbb{E}$) の，**拡大係数行列** (augmented coefficient matrix) とよぶ．拡大係数行列の最後の列が，連立方程式の右辺から来ていることを，強調するために，

$$(5.10)\quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{1,1}, & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}, & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$ x-5-4

と破線を入れて書いたり，これを $\tilde{A} = [\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ と表わしたりする．

ベクトルに関する方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ で $\mathbb{b} = \mathbb{0}$ となっているものを**斉次方程式** (homogeneous equation) とよぶ．同様に，連立方程式 $\mathcal{S}$ で，$\mathcal{S}$ に含まれる，すべての式の右辺が 0 であるようなものを，**斉次連立方程式** (homogeneous system of equations) という．(5.8) のベクトルに関する方程式 $\mathbb{E}$ に対し，斉

♦ macro を改良する! lrap と raisebox の組合せで作成.

次方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ を，$\mathbb{E}$ **の斉次方程式** と言うことにする．行列 A は，斉次方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ の拡大係数行列 $[\,A \,\vdots\, \mathbb{0}\,]$ の略記としても，扱かうことにする．同様に，(5.7) での連立方程式 $\mathcal{S}$ で，右辺をすべて 0 で置き換えたものを，$\mathcal{S}$ の斉次連立方程式とよぶ．以下では，$\mathcal{S}$ の斉次連立方程式を添字 0 を付けて $\mathcal{S}_0$ と表わすことが多い．同様に，(5.8) のベクトルに関する一次方程式 を $\mathbb{E}$ と表したとき，対応する斉次方程式 ($A\mathbb{x}=\mathbb{0}$) も，$\mathbb{E}_0$ と表わすことが多い．

E を，n-変数の斉次方程式とするとき，n-次のゼロベクトル $\mathbb{0}_n$ は，常に E の解である．したがって，n-変数の斉次連立方程式の解集合は，常に，空集合ではない．これに対して，斉次でない連立方程式 $\mathcal{S}$ では，$\mathsf{S}(\mathcal{S})=\emptyset$ となることも，あり得る．

$\mathsf{S}([\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]) := \mathsf{S}(\mathbb{E})$ $(=\mathsf{S}(\mathcal{S}))$ とする．$\mathbb{E}_0$ (または，$\mathcal{S}_0$) を，$\mathbb{E}$ (または，$\mathcal{S}$) の斉次方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ とするとき，$\mathsf{S}(A)$ で，$\mathsf{S}(\mathbb{E}_0)$ $(=\mathsf{S}(\mathcal{S}_0))$ を表わす．この 2 つの記法は，(5.10) のような破線を加えた書き方をしないと，意味が一義的に決まらないが，どちらの意味で使われているか，文脈から明らかなときには，特に注意しないことにする．

拡大係数行列 $[\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ と，$[\,A' \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ が，**同値** とは，$\mathsf{S}([\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,])=\mathsf{S}([\,A' \,\vdots\, \mathbb{b}'\,])$ となること，とする．これは，これらの行列に対応する連立一次方程式 (またはベクトルに関する方程式) が，互いに同値である，ということである．(斉次方程式の) 係数行列 A, A' が同値とは，$\mathsf{S}(A)=\mathsf{S}(A')$ となること，つまり，$\mathbb{E}_0$ と $\mathbb{E}'_0$ をそれぞれ $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$, $A'\mathbb{x}=\mathbb{0}$ として，$\mathsf{S}(\mathbb{E}_0)=\mathsf{S}(\mathbb{E}'_0)$ となること，とする．

(連立) 方程式の解集合と，その斉次 (連立) 方程式の解集合の間の，以下の関係は，重要である:

P-5-0 **補題 5.4** $\mathcal{S}$ を連立一次方程式として，$\mathcal{S}_0$ を，$\mathcal{S}$ の斉次連立方程式とするとき，$\mathbb{c}\in\mathsf{S}(\mathcal{S})$ とすると，

x-5-5
$$\mathsf{S}(\mathcal{S})=\{\mathbb{c}+\mathbb{d} : \mathbb{d}\in\mathsf{S}(\mathcal{S}_0)\} \tag{5.11}$$

が成り立つ．

証明． $\mathcal{S}$ は，ベクトルに関する方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ に対応するものとする．$A\mathbb{c}=\mathbb{b}$ である．(5.11) の右辺を S と呼ぶことにする．等式を示すには，$\mathsf{S}(\mathcal{S})\subseteq S$ と $\mathsf{S}(\mathcal{S})\supseteq S$ を示せばよい．

$\mathsf{S}(\mathcal{S}) \subseteq S$: $\mathbb{a} \in \mathsf{S}(\mathcal{S})$ なら, $A\mathbb{a} = \mathbb{b}$ だから, $A(\mathbb{a}-\mathbb{c}) = A\mathbb{a} - A\mathbb{c} = \mathbb{b} - \mathbb{b} = \mathbb{0}$ である．したがって，$\mathbb{a} - \mathbb{c} \in \mathsf{S}(\mathcal{S}_0)$ だが，$\mathbb{a} = \mathbb{c} + (\mathbb{a} - \mathbb{c})$ だから，$\mathbb{a} \in S$ である．

$\mathsf{S}(\mathcal{S}) \supseteq S$: $\mathbb{a} \in S$ として，ある $\mathbb{d} \in \mathsf{S}(\mathcal{S}_0)$ に対し，$\mathbb{a} = \mathbb{c} + \mathbb{d}$ とする．このとき，$A\mathbb{a} = A(\mathbb{c} + \mathbb{d}) = A\mathbb{c} - A\mathbb{d} = \mathbb{b} - \mathbb{0} = \mathbb{b}$ だから，$\mathbb{a} \in \mathsf{S}(\mathcal{S})$ である．

❏ (補題 5.4)

上の補題は，連立方程式 $\mathcal{S}$ の解の全体が何になるかを知るためには，$\mathcal{S}$ の解を 1 つ見付けて，$\mathcal{S}$ の斉次連立方程式 $\mathcal{S}_0$ の解の全体が求まればよい (つまり，このとき，$\mathcal{S}$ の解集合は，(5.11) により定まる) ことを示している．

5.2　2-変数と 3-変数の実数係数連立一次方程式の解集合

連立一次方程式 $\mathcal{S}$ に対する，解集合 $\mathsf{S}(\mathcal{S})$ の構造についての一般理論を，確立する，ということが，次の節での，主要テーマの一つとなるが [*9]，$\mathbb{R}$-係数の，2-変数と，3-変数の連立方程式に関しては，前節の例 5.1, 例 5.2 と，第 4 章での考察を合せると，そのような連立方程式の解集合の構造に関する，幾何学的な説明を与えることができる． solution-spaces

以下では，変数 $x_1, ..., x_n$ を持つ一次方程式 E (または，連立方程式 $\mathcal{S}$, あるいは，それに対応するベクトルに関する方程式 $\mathbb{E}$) が，**自明** (trivial) である，とは，$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \emptyset$, または，$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \mathbb{R}^n$ となる (あるいは，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \emptyset$, または，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathbb{R}^n$ となる) こととする．定理 5.3 により，一次方程式が自明かどうかは，容易に判定できる．

連立方程式 $\mathcal{S}$ が n-変数である，とは，ある n 個の変数を取ると，$\mathcal{S}$ に含まれる方程式に現れる変数が，これらの n 個の変数の中にすべて含まれていること，とする．前にも述べたように，(少なくとも連立一次方程式の場合には) ダミー変数を，方程式に取り込むこと (脚注*5 の例を参照) で，$\mathcal{S}$ の各方程式は，これらの変数を，実際に，すべて含んでいるものとしてよい．$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ ($\subseteq \mathbb{R}^n$) が

[*9] 次節のもう一つの主要テーマは，与えられた連立一次方程式の解法のアルゴリズムの確立です．次節では，この解法のアルゴリズム (ガウスの消去法) の分析から，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ の構造理論も，導き出されることになります．

問題となっているときには，変数の名前が何であるかは問題とならないので，特に指定しないときには，$\mathcal{S}$ の n 個の変数は，$x_1, \ldots, x_n$ である，とする．

例 5.5 連立方程式，

$$\begin{cases} w + 3x - y + z = 5 \\ 2y + z - u = -3 \\ w + u = 6 \end{cases}$$

は，これと同値な，

$$\begin{cases} 1x_1 & +3x_2 & -1x_3 & +1x_4 & +0x_5 & = & 5 \\ 0x_1 & +0x_2 & +2x_3 & +1x_4 & -1x_5 & = & 3 \\ 1x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +1x_5 & = & 6 \end{cases}$$

と同一視することができ，この連立方程式の拡大係数行列は，

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

である．

n-変数連立方程式 $\mathcal{S}$ で，$E \in \mathcal{S}$ が自明のとき，特に，$\mathsf{S}(E) = \mathbb{R}^n$ のときには，$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{E\}$ とすると，$\mathsf{S}(\mathcal{S}') = \mathsf{S}(\mathcal{S})$ である．また，$\mathsf{S}(E) = \emptyset$ のときには，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \emptyset$ である．

したがって，n-変数連立一次方程式の解集合の，構造の分析には，自明でない一次方程式のみからなる，連立方程式についての，解集合の構造が分ればよい．2-変数と，3-変数の，$\mathbb{R}$-係数の連立一次方程式については，これは，以下のような，十分に満足のできる，幾何学的な把握が，可能である．

5.2.1　2-変数の実数係数連立一次方程式

sys-eqs-2vars

$\mathcal{S}_0$ を変数 x_1, x_2 を持つ，自明でない斉次一次方程式からなる，$\mathbb{R}$-係数の連立方程式とする．例 5.1 で見たように，$\mathcal{S}_0$ の各方程式 E の解集合 $\mathsf{S}(E)$ は，原点 $\mathbb{0}$ を含む $\mathbb{R}^2$ の直線となるから，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_0) \supseteq \{\mathbb{0}_2\}$ である．したがって，$\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$ が，singleton のときには，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_0) = \bigcap\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$

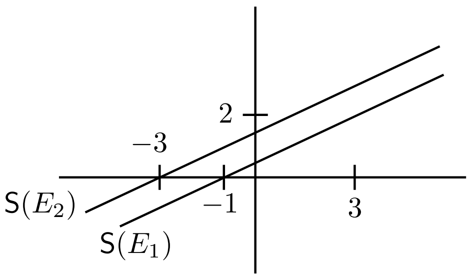
は，$\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{0}$ を含む直線で，$\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$ が 2 つ以上の要素を持つなら，定理 4.14 により，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_0) = \bigcap\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\} = \{\mathbb{0}_2\}$ である．

$\mathcal{S}$ が，変数 x_1, x_2 を持つ，自明でない，必ずしも斉次でない，$\mathbb{R}$-係数の一次方程式からなる，連立方程式なら，各 $E \in \mathcal{S}$ の解集合 $\mathsf{S}(E)$ は，(必ずしも原点を含まない) $\mathbb{R}^2$ の直線となる．$\mathcal{S}$ の解集合は，これらの直線の共通部分である．このことから，$\mathcal{S}$ の解集合 $\mathsf{S}(\mathcal{S})$ は，定理 4.14 での，3 つの場合に対応した，以下の例でのような，3 つのシナリオが実際に可能であることが，分かる:

例 5.6 連立方程式 Ex-5-1-1

$$\begin{cases} \ \ x_1 - 2x_2 = -1 & \cdots\ (E_1) \\ -x_1 + 2x_2 = \ \ 3 & \cdots\ (E_2) \end{cases}$$

の解集合は，$\emptyset$ (空集合) である．

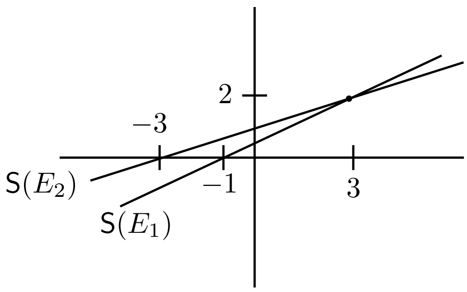


♦ figur5-02.pdf

例 5.7 連立方程式 Ex-5-1-0

$$\begin{cases} \ \ x_1 - 2x_2 = -1 & \cdots\ (E_1) \\ -x_1 + 3x_2 = \ \ 3 & \cdots\ (E_2) \end{cases}$$

の解集合は，$\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ である．

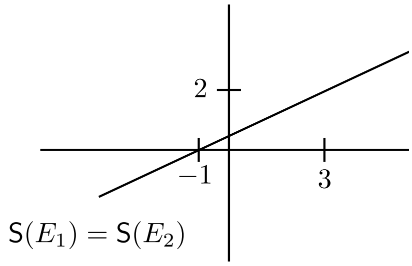


♦ figur5-01.pdf

例 5.8 連立方程式 Ex-5-1-2

$$\begin{cases} \ \ x_1 - 2x_2 = -1 & \cdots\ (E_1) \\ -x_1 + 2x_2 = \ \ 1 & \cdots\ (E_2) \end{cases}$$

の解集合は，直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 上の，点の全体である．



♦ figur5-03.pdf

5.2.2　3-変数の実数係数連立方程式

sys-eqs-3vars

$\mathcal{S}_0$ を，変数 x_1, x_2, x_3 を持つ，自明でない，$\mathbb{R}$-係数の斉次一次方程式からなる，連立方程式とする．例 5.2 で見たように，$\mathcal{S}_0$ に属す，それぞれの方程式 E の解集合 $\mathsf{S}(E)$ は，原点 $\mathbb{0}$ を含む $\mathbb{R}^2$ の平面となるから，$\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$ が，singleton のときには，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_0) = \bigcap\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$ は，$\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{0}$ を含む平面で，$\{\mathsf{S}(E) : E \in \mathcal{S}_0\}$ が 2 つ以上の要素を持つなら，定理 4.72, (1) と (2) により，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ は，原点を通る直線であるか，あるいは，原点のみからなる singleton であるかの，いずれかである．

$\mathcal{S}$ が，変数 x_1, x_2, x_3 を持つ，自明でない，必ずしも斉次でない，実係数の一次方程式からなる，連立方程式なら，各 $E \in \mathcal{S}$ の解集合 $\mathsf{S}(E)$ は，(必ずしも原点を含まない) $\mathbb{R}^2$ の平面となる．$\mathcal{S}$ の解集合は，これらの平面の共通部分である．したがって，再び，定理 4.72 から，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ は，空集合であるか，singleton であるか，直線であるか，平面であるかの，いずれかである．

特に，$\mathcal{S}$ が 2 つの自明でない 3-変数の，$\mathbb{R}$-係数の一次方程式からなる，連立方程式とするときには，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ は，空集合である (2 つの方程式の解集合が，異る平行な平面となる場合) か，直線である (2 つの方程式の解集合が，平行でない平面となるとき) か，平面である (2 つの方程式の解集合が，同一平面となるとき) かの，いずれかである．

5.3　ガウスの消去法

gauss
♦ lin-alg-1-07-2020-06-18-contents.tex を修正して再利用

連立一次方程式 (簡単のために，以下では，単に連立方程式と言うことにする) $\mathcal{S}$ の解の全体 (解集合) を，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ と書くことにしたのだった．2 つの連立方程式 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ は，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_1) = \mathsf{S}(\mathcal{S}_2)$ が成り立つとき同値である，と言うことに

したのだった．例えば，

$$(5.12)\quad \begin{cases} 2x & +3y & -z = -3 \\ -x & +2y & +2z = 1 \\ x & +y & -z = -2 \end{cases}$$ 7-5

は，連立方程式

$$(5.13)\quad \begin{cases} x & & = 1 \\ & y & = -1 \\ & & z = 2 \end{cases}$$ 7-6

と，同値であることを，確かめることができる．(5.12) と (5.13) の拡大係数行列は，それぞれ，

$$(5.12)' \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$(5.13)' \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

だが，このとき，拡大係数行列 $(5.12)'$ と $(5.13)'$ も同値である，と言うことにしたのだった．

(5.12) では，この連立方程式の解の全体が，何になるかは，見ただけでは直ぐには分らないが，(5.13) では，その解の全体が，$\mathsf{S}(\mathcal{S}_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ となること，つまり，$x = 1, y = -1, z = 2$ が，唯一の解となることが，即座に読み取れる．

ガウスの消去法 (Gaussian elimination, 日本語の教科書では，「**ガウスの掃き出し法**」と呼ばれることもある) は，任意の連立方程式 (あるいは，それに対応する拡大係数行列) を，同値な連立方程式 (あるいは，それに対応する拡大係数行列) に，順次変形してゆき，最終的には，(5.13) のような (あるいは，これに対応する $(5.13)'$ のような)，解が何になっているかが，即座に読み取れる形の (元の連立方程式と同値な)，連立方程式 (あるいは，それに対応する拡大係数行列) を得る方法 (アルゴリズム) である．このことの説明を，以下

で与える．

n-次の正方行列 B が，**可逆**であるとは，n-次の正方行列 C で，$BC = CB = E_n$ となるようなものが存在することだった (107 ページを参照)．ここで，E_n は，n-次の単位行列である．行列の掛け算は，一般には可換ではない (つまり，掛け算の順序を入れ換えると，計算結果が変ることがある) ので，BC と CB は，異る可能性があり，$BC = CB = E_n$ という条件は，$BC = E_n$ あるいは，$CB = E_n$ で，単純に置き換えることはできない．

inverse-matrix-problem

実は，後で，$BC = E_n$ となる C が存在する，あるいは，$CB = E_n$ となる C が存在することだけから，B が可逆であることが導ける，ことが証明されるが，この証明は，自明でない[*10]．

正方行列 B に対し，$BC = CB = E_n$ となるような行列 C は，B の**逆行列**であると言うことにしたのだった．B が逆行列を持てば，それは一意に決まる (補題 4.28) ので，それを B^{-1} と表わすことにしたのだった．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，可逆な n-次の正方行列の全体は，行列の掛け算に関して閉じている (補題 4.32) ことに注意する．

可逆な行列の，連立方程式の解法における意義は，次の命題で見ることができる．

P-x7-2

命題 5.9 $[\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ を，m 個の式からなる連立方程式の拡大係数行列として，B を，可逆な m-次の正方行列とするとき，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と，連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ は，同値である．つまり，拡大係数行列 $[\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ と，$[\,BA \,\vdots\, B\mathbb{b}\,]$ は，同値である．

証明． 任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ について，$\mathbb{a}$ が，方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解になることと，連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解になることが，同値である，ことを示せばよい．もし，$\mathbb{a}$ が，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解になっているとすると，$A\mathbb{a} = \mathbb{b}$ だから，この両辺に，左から B を掛けると，$(BA)\mathbb{a} = B\mathbb{b}$ である．したがって，$\mathbb{a}$

[*10] 本書では，補題 6.50 で，行列式を用いて，このことの証明を与え，定理 7.72 で，次元定理を用いた別証を与えることになります．本書の第 II 巻や第 III 巻では，無限の縦横サイズを持つ行列 (に対応する数学的対象) も考察することになりますが，そのような一般化された行列では，$AB = E$ あるいは $BA = E$ の片方から，もう片方を導くことはできません．このことは，上で言った事実の証明には，我々が，ここで行列と呼んでいる対象の，縦横サイズの有限性が，その証明のどこかで，本質的に用いられていなくてはならないことを，示唆しています．

◆第 III 巻への reference あり!

は，$(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解である．逆に，$\mathbb{a}$ が，$(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解になっているとすると，$(BA)\mathbb{a} = B\mathbb{b}$ だから，この両辺に，B^{-1} を，左から掛けると，$A\mathbb{a} = (B^{-1}B)A\mathbb{a} = B^{-1}(BA)\mathbb{a} = B^{-1}B\mathbb{b} = \mathbb{b}$ となり，$\mathbb{a}$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解であることが，分かる．

$B\tilde{A} = B[\,A \vdots \mathbb{b}\,] = [\,BA \vdots B\mathbb{b}\,]$ だから，$B\tilde{A}$ は，連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の拡大係数行列である．　❑ (命題 5.9)

上の命題で，B が，可逆であることは，本質的である:

例 5.10 任意の n-個の方程式からなる m 変数の連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ に対し，O_n を両辺の左からかけると，$\mathbb{0} = \mathbb{0}$ という形の連立方程式が得られるが，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$ は，この方程式を (無内容的に) 満たすから，もとの方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ がそのようなものでなければ，この方程式と，それの両辺に O_n をかけたものは，同値でない．O_n は，可逆でないことに注意する (例 4.30, (1) を参照)．　❑

(拡大係数) 行列の，**行に関する基本変形** (elementary row operation) とは，次の 3 つのタイプの操作のことである:

(1*)　1 つの行を定数倍する (ただし倍率の定数は 0 以外の数とする),

(2*)　2 つの行を入れ換える,

(3*)　1 つの行に他の行の定数倍を加える[*11].

これらの操作は，行列を連立方程式の係数行列，または，拡大係数行列と見たときに，この連立方程式に，次のような変形を行なうことに対応している:

(1)　方程式の 1 つを定数倍する (ただし倍率の定数は 0 以外の数とする),

(2)　2 つの方程式を入れ換える,

(3)　1 つの方程式に他の方程式の定数倍を加える．

これらの 3 つの操作は，それぞれに対応する，(後で基本行列と呼ばれることになるところの) 可逆な行列を，拡大係数行列に，左から掛けることで，実

[*11] こちらの操作では，“定数倍” は 0 倍でもかまいません．ただし，“0 倍を加える” は，“何も変えない” という操作です．

現できる (可逆な行列を，拡大係数行列に掛けると，もとの拡大係数行列と同値な，拡大係数行列が，得られるのだった — 命題 5.9 を参照)．ここで，上の 3 つの操作に対応する可逆な行列とは，それぞれ，以下の $(1^\dagger)$, $(2^\dagger)$, $(3^\dagger)$, のような形をした行列のことである[*12]．

$(1^\dagger)$　拡大係数行列の k-行を c 倍する $(c \neq 0)$ 操作は，以下のような m-次正方対角行列 $S_k^m(c)$ を，拡大係数行列に，左からかけることで，実現できる

x-x7-0

$$S_k^m(c) := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& c && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow\ k\ \text{行目} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \tag{5.14}$$

$(2^\dagger)$　拡大係数行列の k-行と ℓ-行を入れ換える操作は，次のような m-次正方行列 $T_{k,\ell}^m$ を，拡大係数行列に左からかけることで，実現できる．

x-x7-1

$$T_{k,\ell}^m := \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & k\ \text{列目} & & \ell\ \text{列目} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow\ k\ \text{行目} \\ \\ \leftarrow\ \ell\ \text{行目} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \tag{5.15}$$

$(3^\dagger)$　拡大係数行列の k-行目に ℓ-行目の d 倍を加える操作は，次のような m-次の正方行列 $R_{k,\ell}^m(d)$ を，拡大係数行列に左からかけることで，実現できる．

[*12] 以下の (5.14), (5.15), (5.16) では，“ $\ddots$ ” には，1 が成分として並んでいて，それらと，明示された成分以外では，すべての成分は，0 になっているものとします．この書き方は，多少，曖昧ですが，他の行列に左からかけたときに期待される効果から逆算して，考えると，これらの行列の形は，一意に決まります．

$$(5.16)\quad R^m_{k,\ell}(d) := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& 1 & d & \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ k \text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{r} \qquad\qquad\quad \uparrow \ell \text{ 列目} \end{array} & \end{array}$$ x-x7-2

$m \in \mathbb{N}$, $k, \ell \in \overline{m}$, $k \neq \ell$, c, $d \in K$, $c \neq 0$ に対し，$S^m_k(c)$, $T^m_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ の，どれかの形をしている行列を，**基本行列** (elementary matrix) と，呼ぶことにする．基本行列 A のサイズが，$m \times m$ であることを，強調したいときには，A は，m**-次の基本行列**である，と言うことにする．

補題 5.11 基本行列は，すべて可逆である．したがって，複数の基本行列の積として表わされる正方行列も，可逆である． P-x7-4

証明． $(S^m_k(c))^{-1} = S^m_k(\frac{1}{c})$ である ($c \neq 0$ だったことに注意する) — c 倍したものを，$\frac{1}{c}$ 倍すると，元に戻る．

$(T^m_{k,\ell})^{-1} = T^m_{k,\ell}$ である — 入れ換えたものを，もう一度入れ換えると，元に戻る．

$(R^m_{k,\ell}(d))^{-1} = R^m_{k,\ell}(-d)$ である — ℓ 行の d 倍を足したあとで，ℓ 行の d 倍を引くと，元に戻る．

以上から，$S^m_k(c)$, $T^m_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ のタイプの行列は，すべて可逆であることが，分かる．

主張の後半は，このことと，補題 4.32 から従う． □ (補題 5.11)

次の補題は，定理 6.56 の証明を含む，幾つかの場所で，重要な役割を果すことになるものである．

補題 5.12 (1) 基本行列 B の，転置行列 ${}^tB$ は，基本行列である． P-x7-4-0

(2) B を，基本行列の複数個の積の形をした行列とするとき，B の転置行列 ${}^tB$ も，基本行列の複数個の積の形をした行列である．

証明． (1): 基本行列は，$S^m_k(c)$, $T^m_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ の，どれかの形をしているが，

それぞれの形のものの転置行列を取ると，再び同じタイプの形の行列になる(演習!).

(2): $B_1,\ldots,B_k$ を，n-次の基本行列として，$B = B_1 \cdots B_k$ となっているとすると，補題3.15, (2) により，${}^tB = {}^tB_k \cdots {}^tB_1$ だから，(1) により，${}^tB$ も，基本行列の積の形をしている. □ (補題 5.12)

“あたりまえ” と思われるかもしれない事実を，もう一つ指摘しておく．それは，連立一次方程式の間の同値性が，推移的である，という事実である．つまり，任意の連立一次方程式 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ について，$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ が同値で，$\mathcal{S}_2$ と $\mathcal{S}_3$ が同値なら，このことから，$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_3$ が同値であることが導かれる．これは，連立一次方程式の同値性が，解の全体の集合の同等性により定義されていたことと，同等性が，推移的であること (第 2 章の脚注*34 を参照)，から成り立つ事実である.

このことと，命題5.9，および，補題5.11 により，以下の定理が，直ちに導かれる:

P-x7-5 **定理 5.13** $\mathcal{S}$ を，連立一次方程式として，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列に，基本変形を複数回施して [*13] 得られる行列を，拡大係数行列として持つような，連立一次方程式を $\mathcal{S}'$ とすると，$\mathcal{S}$ と，$\mathcal{S}'$ は，同値である. □

以上から，連立方程式 $\mathcal{S}$ の解法として，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列に基本変形を複数回施して得られる，(5.12)$'$ に対する (5.13)$'$ のような，適当な [*14] 形をした拡大係数行列を求め，それに対応する連立一次方程式の解を決定する，という方法が考えられる.

ここで「適当な」と表現した拡大係数行列を，具体的に，どう設定するかが，この解法を，アルゴリズムとしてうまく定式化できることの鍵になるが，これを，次のような意味での，**簡約な行階段形** (reduced row echelon form) であること，と定義することにすると，(この方法を発案にかかわった数学者の一人である) ガウス (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 (安永 6 年) — 1855

*13 ここで ‘ ‘複数回” と言っているのは，0 回や，1 回の場合も，含みます．ただし，基本変形を 0 回施すとは，何もしないことです.

*14 日本語の「適当」は，arbitrary と，appropriate の，2 つの意味がありますが，ここで言っている “適当” は後者の意味です.

(安政 2 年)) に因んで，**ガウスの消去法** (Gaussian elimination)[*15] と呼ばれている解法 (日本語では「(ガウスの) **掃き出し法**」と呼ばれることもある) が，ここで説明した基本変形の繰り返し適用，という枠組の中で，うまく定式化できる．

行列 $A = [a_{i,j}]_{i \in \overline{m}, j \in \overline{n}}$ に対し，A の i-行の，**主成分** (leading entry — pivot (軸) と呼ばれることも多い) とは，$j \in \overline{n}$ で，$a_{i,j} \neq 0$ だが，すべての $k < j$ に対し，$a_{i,k} = 0$ となるようなもの，のことである．また，そのような，j に対する，$a_{i,j}$ のことも，主成分と呼ぶことにする．

各 $1 \leq i \leq m$ に対し，A の i-行が，主成分を持つときには，この主成分は，一意に特定される．A の i-行が，主成分を持たない，というのは，A の i-行の成分が，すべて 0 である，ということである．

行列 $A = [a_{i,j}]_{i \in \overline{m}, j \in \overline{n}}$ が，**行階段形** [*16] (row echelon form) である，とは，次の (5.17) と，(5.18) が，成り立つことである．

(5.17)　A の主成分を持たない行は，すべて，どの主成分を持つ行より下ある．　7-7

(5.18)　A の i 行目が，主成分を持つとき[*17]，この主成分 (の現れる列の番号) を j_i と表わすことにすると，$j_1 < j_2 < \cdots$ となる．　7-8

「階段形」という名前の由来は，この形をした行列では，(5.18) により，主成分を持つ行の主成分が，右下がりの階段状に並び，その左下の成分がすべて 0 になることからきている．行列 A が，**簡約な行階段形** [*18] (reduced raw echelon form) であるとは，A は行階段形で，

(5.19)　A の i 行目が，主成分 j_i を持つとき，$a_{i,j_i} = 1$ で，すべての $k \in \overline{m} \setminus \{i\}$ に対し，$a_{k,j_i} = 0$ である．つまり，A の j_i-列が，ベクトル $\mathbb{e}_i^m$ に等　7-9

[*15] “ガウスの消去法” という名称や歴史的背景については，[28] や [41] も，参照してください．[41] には，連立方程式の数値解法の歴史に関するコンパクトな記述や，古代中国の算術書『九章算術』や，建部賢弘の (ヨーロッパ近代の数学の発展には貢献することのなかった) 業績などについての記述もあります．

[*16] “列階段形” も，同様に，定義できますが，以下では，列階段形が出てくるところでは，“行階段形の転置行列” として扱っているため (例えば，定理 6.56 の証明を参照)，簡単のため，以降，行階段形を，単に，「**階段形**」と呼ぶことにします．

◆ 簡約な階段形の転置行列という表現で，列階段形が出てくるところがある！

[*17] (5.17) により，主成分を持つ行の全体は，ある $k \in \overline{m}$ に対する，1-, 2-,..., k-行となっていることに，注意します．

[*18] 1 つ前の脚注でと同様に，以降，単に「簡約な階段形」とも，言うことにします．

しい．

を満たすこと．とする．

P-x7-6 **例 5.14** （1）拡大係数行列

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

は，簡約な階段形である．この拡大係数行列は，連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 \end{cases}$$

に対応する．

この連立方程式は，解を持たない．この連立方程式の最後の一次方程式では，$x_1, \ldots, x_5$ にどんな値を代入しても，左辺は 0 になり，右辺の 1 とは，等しくならないからである．

（2） 拡大係数行列

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

は，簡約な階段形である．この拡大係数行列は，連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 = -3 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

に対応する．この簡約な階段形の拡大係数行列 $\tilde{A}$ では，すべての主成分は $\vdots$ の左側にある．そのような連立方程式は，移項により，主成分に対応する変数について解くことができて，それを実行すると，ここでの $\tilde{A}$ では，

$$\begin{cases} x_1 = \quad 4 - x_3 - 2x_5 \\ x_2 = -3 - 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = \qquad\quad 1 - 2x_5 \end{cases}$$

が得られる．この解では，簡約な階段形になっている拡大係数行列で，軸 (主成分) の現れない列 (非軸列) に対応する変数 x_3, x_5 には，何の制約も果されない形になっているから，それらの値を，例えば，パラメタ s, t で表わすことにすると，解の全体は，

$$\mathsf{S}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 4 - s - 2t \\ -3 - 2s - 3t \\ s \\ 1 - 2t \\ t \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と書ける．

ここで，解でのパラメタ s, t と，A の軸 (主成分) の現われない列 (に対応する連立方程式の変数) が対応していることに，改めて注意しておく．

（3）　拡大係数行列

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

も簡約な階段形である．この $\tilde{A}$ では，$\vdots$ の左側の各列に主成分があるが，簡約な階段形の行列では，このことと，$\vdots$ の左側が単位行列となることが，同値であることに注意する．

この拡大係数行列は，連立方程式

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = \ \ 2 \\ x_4 = \ \ 1 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

に対応する．したがって，$\mathsf{S}(A) = \{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \}$ である．

任意の行列は，基本変形の繰り返し適用により，階段形になっている行列に変形することができる．(効率を問題にしなければ) この変形は，比較的簡単なアルゴリズムで機械的に行なうことができる．更に，階段形になっている行列は，やはり基本変形の繰り返し適用により，簡約な階段形の行列に変形できる (付録 D の，定理 D.1)．ある行列から出発して，基本変形の繰り返し適用による順次の変形で得られる，簡約な階段形の行列は，一意に決まる (簡約な階段形の行列に至る基本変形の繰り返しは，様々なものがあり得るが，得られる簡約な階段形の行列は，どの基本変形の繰り返しによって得られるものも，同一である — 定理 D.5)[*19]．これらの，事実の証明は，少し長くなるので，付録 D の，第 D.1 節と第 D.2 節に纏めてある．

♦ lin-alg_Scan_2020-06-30–19.04.pdf

このようにして得られた，簡約な階段形の行列に対応する，連立一次方程式は，定理 5.13 により，もとの連立一次方程式と，同値である．また，この簡約な階段形の行列は，例 5.14 で見た 3 つのパターンのうちのどれかになっている．これらのことを纏めると，次が得られる[*20]．

P-x7-7

定理 5.15 K を，任意の体として，K を係数として持つ，n-変数の，m 個の一次方程式からなる，任意の連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ に対し，その拡大係数行列を，$\tilde{A} := [\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ とする．$\tilde{A}$ に，行の基本変形を複数回施すことで，簡約な階段形になっている行列 $\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ が，得られる．$\tilde{A} = [\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ から，$\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ への変形は，第 D.1 節で記述するようなアルゴリズム (または，このアルゴリズムの何らかの改良) により機械的に行なうことができる．この簡約な階段形となっている $\tilde{B}$ は，(基本変形の複数回の施行の仕方に依存せず) 一意に決まる．

$\mathsf{S}(\tilde{A}) = \mathsf{S}(\tilde{B})$ で，次の 3 つのパターン (a), (b), (c) の，どれか (ちょうど 1 つ) が成り立つ．

（a） $\tilde{B}$ の右端の列 (つまり $\vdots$ の右側) に，主成分が現れる場合．このとき

---

*19 この一意性は，ここでの議論の，整合性を納得するためには，必要であるように思えるが，以下では，この一意性を，用いることなく，議論を進める工夫がされている．

*20 定理 5.15 の，(a), (b), (c) は，それぞれ，例 5.14 の (1), (2), (3) に，対応するものになっています．

には，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，解を持たない．したがって $\mathsf{S}(\tilde{A}) = \emptyset$ である．このようなときには，$\tilde{A}$ (または方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$) は，**矛盾する** (inconsisent) ということにする．

（b）　$\tilde{B}$ の右端の列には, 主成分が現れないが (つまり $\tilde{B}$ は矛盾しないが), それ以外の列にも，主成分が現れないものがあるとき．この場合には，$\tilde{B}$ の右端の列以外で主成分の表われない列 (このような列を，**非軸列** (non-pivotal column) と呼ぶことにする) の列の番号が，$j_1,\ldots,j_k$ であるとき，パラメタ $p_{j_1},\ldots,p_{j_k}$ を用いて，$\mathsf{S}(\tilde{A}) = \{\mathbb{s}(p_{j_1},\ldots,p_{j_k}) : p_{j_1},\ldots,p_{j_k} \in K\}$ と表わせる．ただし，ここで，$\mathbb{s}(p_{j_1},\ldots,p_{j_k})$ は $p_{j_1},\ldots,p_{j_k}$ の一次式を，各成分の表示として持つ，n-次元ベクトルで，特に，その j_ℓ-成分 $(1 \leq \ell \leq k)$ は，p_{j_ℓ} となっているようなものである．

（c）　$\tilde{B}$ の右端の列には，主成分が現れないが (つまり $\tilde{B}$ は矛盾しないが)，それ以外のすべての列に，主成分が現れる．このときには，$m \geq n$ で，$\mathbb{b}' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$ とすると，$b'_{n+1} = \cdots = b'_m = 0$ となっており，$\mathbb{b}' \restriction n := \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$ が，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の唯一の解である．つまり，$\mathsf{S}(\tilde{A}) = \{\mathbb{b}' \restriction n\}$ となる． ❑

この定理の系として，経験的には，我々が既に知っている，多項式に関する，多くの事実が，導ける．例えば:

系 5.16 $\mathcal{S}$ を，(5.7) でのような連立一次方程式として，$n > m$ とする．このとき，$\mathcal{S}$ は，解を持たない (つまり $\mathcal{S}$ は矛盾する) か，あるいは，無限個の解を持つか，のいずれかである． P-x7-8

特に，$\mathcal{S}$ が，斉次の連立一次方程式のときには，$\mathcal{S}$ は，常に，無限個の解を持つ．

証明． $\tilde{B}$ を，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ に，基本変形を，複数回施すことで得られる，簡約な階段形の行列とする．$\tilde{B}$ は，$m \times (n+1)$-行列である．$\tilde{B}$ が，矛盾しないとすると，$\mathcal{S}$ は，解を持つが，$\tilde{B}$ は，高々 m 個の主成分しか持てないから，$n > m$ により，$1 \leq j \leq n$ で，j が，どの行の主成分にもなっていないようなものが，存在する．このときには，定理 5.15, (b) の状況が起っているので，$\mathsf{S}(\mathcal{S})$ は，無限集合になる．

$\mathcal{S}$ が，斉次連立方程式のときには，$\mathcal{S}$ は，少なくとも，(自明な) 解を，1 つは持つから，上から，$\mathcal{S}$ は，無限個の解を持つことがわかる． □ (系 5.16)

系 5.16 は，次のような，行列に関する命題に，翻訳することができる．この命題は，以下で何度か重要な応用を持つことになるものである:

P-x7-8-a **系 5.17** $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ として，A を，体 K 上の $m \times n$-行列とするとき，$\mathbb{c} \in K^n$, $\mathbb{c} \neq \mathbb{0}_n$ で，$A\mathbb{c} = \mathbb{0}_m$ となるものが存在する．

証明． 系 5.16 により，$A\mathbb{c} = \mathbb{0}_m$ となる $\mathbb{c} \in K^n$ は，無限に存在するから，特に，$\mathbb{0}_n$ と異るものも，存在する． □ (系 5.17)

P-x7-8-0 **補題 5.18** $\mathcal{S}$ を，矛盾する連立一次方程式とするとき，$\mathcal{S}$ と同値な連立一次方程式で，ただ 1 つの一次方程式からなるものが，存在する．

証明． $\mathcal{S}$ が矛盾するとは，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \emptyset$ となることだった．連立一次方程式 $\mathcal{S}'$ を，1 つの式だけからなる，

$$(5.20) \quad \left\{ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1 \right.$$

とすると，$\mathsf{S}(\mathcal{S}') = \emptyset$ だから (例 5.14, (1) を参照)，$\mathcal{S}'$ と $\mathcal{S}$ は同値である．

□ (補題 5.18)

P-x7-9 **系 5.19** $\mathcal{S}$ を，変数 $x_1, ..., x_n$ $(n > 1)$ を持つ，連立一次方程式とする．$\mathcal{S}$ が，唯一の解を持つのは，$\mathcal{S}$ と同値な連立一次方程式が，すべて n-個以上の個数の方程式からなる，ちょうどそのときである．

証明． もし $\mathcal{S}$ が，矛盾するなら，補題 5.18 により，$\mathcal{S}$ は，1 つの論理式だけからなる連立一次方程式と，同値である ($1 < n$ に注意)．

$\mathcal{S}$ が，矛盾せず，n-個未満の方程式しか持たない連立一次方程式 $\mathcal{S}'$ と，同値だとすると，系 5.16 により，$\mathsf{S}(\mathcal{S}) = \mathsf{S}(\mathcal{S}')$ は，無限個の要素を持つ．

次に，$\mathcal{S}$ が，n-個未満の方程式しか持たない連立一次方程式のどれとも，同値でない，としてみる．このときには，補題 5.18 により，$\mathcal{S}$ は，矛盾しない．

$\tilde{A}$ を，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列として，$\tilde{B}$ を，基本変形の繰り返しにより $\tilde{A}$ から得られる，簡約な階段形の行列とする．このとき，$\tilde{B}$ の上から数えて n 個の行は，すべて主成分を持つ．もしそうでなければ，$\tilde{B}$ と，$\tilde{B}$ から主成分を持た

ない行 (つまりゼロベクトルとなっているような行) を，すべて取り去って得られる行列は，$\mathcal{S}$ と同値だから，$\mathcal{S}$ と同値な，方程式を n 個未満しか持たないような連立方程式が得られることになり，矛盾である．よって， $\tilde{B}$ は，n 個の主成分を持つ行と，0 のみを持つようないくつかの行，からなる行列となっている．したがって，定理 5.15, (c) の状況が，成立しており， $\tilde{B}$ に対応する連立方程式は，ちょうど 1 つの解を持つ．$\tilde{A}$ は，$\tilde{B}$ と同値だから，この解は，$\tilde{A}$ の唯一の解でもある．　❑ (系 5.19)

A を行列とするとき，A に基本変形を複数回施して得られる，簡約な階段行列 (複数) の主成分を持つ行の数，のうち最小のものを，A の**階数** (rank) とよび，$rank(A)$ と表わす． この定義は，他の教科書で採用されることの多い定義と見かけ上異るが，ここでの定義は，A に基本変形を複数回施して得られる簡約な階段行列が一意に決まる，という，付録 D で証明されることになる事実を用いなくても，意味をなすものとなっている (この一意性の証明をしてしまえば，通常の定義と，ここでの定義の，同値性の証明も，得られることになる)．

“Echelon form” という用語を，“階段形” と訳したために，“階数” という訳語が，ちょうど，この用語と噛み合うものになっている．“Echelon” は，近代の戦争で歩兵隊や艦隊の最前列を斜めに配列して進軍するときの隊型のことでもあるが，もともとは，階段の意味を持つギリシャ語由来の単語である[*21]．英語では，この単語は，階級制度の階層の意味もあるので，“rank” (階級) という用語は，そのことと噛み合う選択になっている．

定理 5.15 により，次が，分かる [*22]:

命題 5.20 連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が，解を持つのは，この連立方程式の拡大係数行列 $\tilde{A} = [\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ に対し，$rank(A) = rank(\tilde{A})$ が，成り立つ，ちょうどそのときである．　P-x7-10

*21 この単語は，近代の (軍事) 戦略の教科書には，必ず出てくると思われるので，江戸時代の末期に，オランダ語の戦略の教科書を訳している，高野長英による，この単語の日本語での訳語があるはずです．

*22 以下の，命題 5.20 証明は，定理 5.15 での，簡約な階段形の一意性の事実は，必要とならないものになっています．

証明． $rank(A) \leq rank(\tilde{A})$ は，常に成り立つ: $\tilde{A}$ に基本変形を，複数回施して，$rank(\tilde{A})$ 個の主成分を持つ行を持つ，簡約な階段形の行列 $\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ を作ると，B は，A に，同じ基本変形の複数回の列を施すことで得られた，行列となっている．したがって，

$$\begin{aligned} rank(A) &\leq \text{“}B\text{ の，主成分を持つ行の数”} \\ &\leq \text{“}\tilde{B}\text{ の，主成分を持つ行の数”} \underbrace{=}_{\tilde{B}\text{ の選び方による}} rank(\tilde{A}) \end{aligned}$$

である．

もし $rank(A) < rank(\tilde{A})$ だとすると，連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = [\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ に対して，A に基本変形を複数回施して，ちょうど $rank(A)$ 個だけ主成分を持つ行を含むような，簡約な階段形の行列 B が，得られる．

同じ (複数の) 基本変形の列を，施行することで，$\tilde{A}$ を変形して，$\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ が，得られたとすると，$\tilde{B}$ に，更に，基本変形を，複数回施して，B には変更を加えずに，簡約な階段形の行列 $\tilde{B}' = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}''\,]$ を，得ることができるが，仮定から，$\tilde{B}'$ の主成分を持つ行の数は，$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数より真に大きい．このことは，$\tilde{B}'$ が，$[\,0\;0\;\;\cdots\;\;0 \,\vdots\, 1\,]$ という形の行を持つことを，意味するが，このときには，(一次方程式 $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$ は，解を持たないので) 連立方程式 $B'\mathbb{x} = \mathbb{b}''$ は，解を持たない．定理 5.13 により，$B'\mathbb{x} = \mathbb{b}''$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と，同値だから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ も解を持たない．

$rank(A) = rank(\tilde{A})$ とすると，拡大係数行列 $\tilde{A}$ に，基本変形を複数回施して，$rank(\tilde{A})$ 個の，主成分を持つ行を，持つ，簡約な階段形の行列 $\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{b}'\,]$ が得られる．このとき，B は，同じ基本変形の列を，A に施して得られる，簡約な階段形の行列で，“B の主成分を持つ行の数” $\leq$ “$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数” だから，$rank(\cdot)$ の定義と，上の仮定から，

$$\text{“}B\text{ の，主成分を持つ行の数”} = \text{“}\tilde{B}\text{ の，主成分を持つ行の数”}$$

である．したがって，拡大係数行列 $\tilde{B}$ は，例 5.14 の (2) か (3) と同様の形をしている (つまり，$[\,0\;0\;\;\cdots\;\;0 \,\vdots\, 1\,]$ という形の行を持たない) から，いずれの場合にも，連立方程式 $B\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ の解は，存在する．定理 5.13 により，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，$B\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ と同値だから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解は，存在する．　□ (命題 5.20)

5.4　基本変形による可逆性の検証と逆行列の計算

inverse-matrix

基本変形 (掃き出し法) の応用として，n-次の正方行列 A が，与えられたときに，A が，可逆であるかどうかどうか (つまり，A が，逆行列を持つかどうか) を，決定し，A が，可逆なときには，その逆行列を計算する方法を，与える．後で，逆行列の理論的な計算法である，行列式と余因子行列を用いた公式 (系 6.47 を参照) を，第 6 章で，考察することになる．この公式は，線型代数の理論で，重要な役割を果すが [*23]，実際の計算のための手法としては，あまり役にたたない [*24].

これに対し，ここで説明する，掃き出し法による逆行列の計算方法は，手計算で逆行列を求めるときにも実用できる方法で，計算機による逆行列の計算法の基礎になる考え方でもある．

付録 D の第 D.1 節で述べたように，任意の行列 A に対し，基本変形を，複数回施すことで[*25]，簡約な階段形の行列 B に，変形することができる．特に，A が，n-次の正方行列で，A の階数が，n のときには，このようにして得られた行列 B は，単位行列 E_n になっている．１つ１つの基本変形は，$S^n_k(c)$, $T^n_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ のどれかの形をした行列 (基本行列) を，(それまでに得られた) 行列に左からかけることに，対応するのだった．したがって，A を，E_n に変形するために，複数回施した，基本変形 (の列) に対応する，基本行列の列が，

---

*23 例えば，n-次の正方行列 A, B について，$AB = E_n$ が成り立っていれば，A と B は互いに逆行列となること証明の一つは，クラーメルの公式での議論が応用されています (定理 6.50).

*24 このことについては，第 D.1 節の，系 D.4 と，その後の注意を参照してください．

ここでの，「計算法としてあまり役に立たない」，というのは，数学的な価値評価のすべてではない，というより，ほんの一部なので，ここでも，この言い方で，第 6 章で述べることになる理論の否定的な評価をしているわけでは全くありません．数学の手っ取り早い応用ということに特化した近視眼的な見方をしてしまい，この「計算法として使えない」というような種類のリマークで，価値判断を過ってしまうことがないよう，念のため注意しておきたいと思います．こんなことは，注意するまでもない，と思う人もあるかもしれませんが，この種類の価値評価の誤りは，例えば，“応用” の観点から研究を行なっている (由緒正しい) 研究者による，基礎理論の過少評価，というような形で，起ってしまうことも，現実的にも，十分にあり得るもののように思えます．

*25 既に注意したように，この，「基本変形を複数回施す」は，「0 回施す」 (つまり何もしない) も，「1 回だけ施す」も，含むものと考えます．

B_1, B_2 ,..., B_k だったとすると,

x-2-1-0 (5.21) $B_k \cdots B_2 B_1 A = E_n$

という等式が，得られることになる． B_1,..., B_k は，すべて可逆だから，$B_k \cdots B_2 B_1$ も，可逆である (補題 4.32).

$B = B_k \cdots B_2 B_1$ とすると，補題 4.50 により，A は，可逆で，B は，A の逆行列である．

このことから，次の (正則性の判定法と) 逆行列の計算法が，成立することが分かる．

P-5-2-0 **定理 5.21** A を n-次の正方行列として，$\tilde{A} = [\,A \vdots E_n\,]$ とする． $\tilde{A}$ に，基本変形を複数回施して，$[\,E_n \vdots B\,]$ という形の行列が，得られるときには，A は，正則で，$B = A^{-1}$ である．逆に，$\tilde{A} = [\,A \vdots E_n\,]$ が，複数回の基本変形により，E_n と異る，簡約な階段形の行列 A' により，$[\,A' \vdots B\,]$ という形の行列に変形されるときには，A は，正則でない．

証明． $\tilde{A} = [\,A \vdots E_n\,]$ から，$[\,E_n \vdots B\,]$ を得るための複数回の基本変形に対応する基本行列が，B_1, B_2,..., B_k だとすると，$E_n = B_k \cdots B_2 B_1 A$ で，$B = B_k \cdots B_1 E_n = B_k \cdots B_1$ だから，上で述べたことから，$B = A^{-1}$ である．

定理の最後の主張は，以下の補題 5.22 から従う． □ (定理 5.21)

P-5-2-0-0 **補題 5.22** (1) B を，n-次の正方行列で，簡約な階段形になっているものとする．このとき，$B \neq E_n$ なら，B は，可逆でない．

(2) n-次の正方行列 B が，可逆でなければ，任意の可逆な n-次正方行列 C に対し，BC も，CB も，可逆でない[*26].

証明． (1): $B \neq E_n$ なら，B の n-行目は，ゼロベクトル $[\,0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,]$ である．したがって，どんな n-次の正方行列 C に対しても，BC の (n, n)-成分は，0 になるから，特に，C は，B の逆行列ではない．したがって，B は，逆行列を持たない．つまり，B は，可逆でない．

[*26] 後で，C の可逆性の条件は，この命題からはずせることが示されますが (系 6.52 を，参照)，ここでの応用では，この補題での弱い形の命題があれば，十分です．

(2):　もし，BC が，可逆とすると，$D := (BC)^{-1}$ として，$BCD = E_n$ となるから，$B = D^{-1}C^{-1}$ である．したがって，補題 4.32 により，$B^{-1} = CD$ で，B は，可逆となってしまうから，仮定に矛盾である．CB が，可逆でないことも，同様に示せる．□ (補題 5.22)

上の定理 5.21 と，既に見た幾つかの事実を，組み合わせると，次の定理が示せる．

行列 A に，基本変形を，複数回施して，簡約な階段形の行列 B が，得られるとき，B は，A の**簡約化** (reduction) である，と言うことにする．また，B が A の 1 つの簡約化であるとき，A から B を得るための，複数の基本変形の適用のプロセスのことも，簡約化と呼ぶことにする．

行列 A に対し，その簡約化 B は，実は，一意に決まるが (これは，付録 D の第 D.2 節で示す) [*27]，ここでは，この事実を用いずに議論している．前節では，このため，階数の定義を通常とは異なる (が，簡約化の一意性が示されると通常の定義と同値になることが分かる) 次のようなやり方で導入したのだった: A を行列とするとき，A の**階数** (rank) とは，A の簡約化の主成分を持つ行の個数のうち，最小のものとする[*28]．A が n-次の正方行列で，A の階数が n のときには，A のすべての簡約化は，E_n となることに注意する．このことを使うと，次の定理 5.23 の，(1) と (2) の同値性が直ちに証明できる．

次の定理 5.23 での，同値命題のリストは，定理 5.23' (245 ページ) と，定理 7.12 で，更に拡張されることになる．

定理 5.23 A を，n-次の正方行列とするとき，以下の (a)〜(g) は，同値である: P-5-3

(a)　$rank(A) = n$ である．

(b)　E_n は，A の簡約化である．

(c)　任意の $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，ちょうど 1 つの解を持つ．

(d)　$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ は，自明でない解を持たない．

---

*27 これに対して，基本変形の列としての簡約化のプロセスは，常に，無限個あります．例えば，任意の基本変形の列 $\mathcal{S}$ のどこかに，ある基本変形とその逆の組を挿入することで，$\mathcal{S}$ と異る基本変形の列で，$\mathcal{S}$ と同じ結果を与えるものを，得ることができます．

*28 与えられた行列 A の簡約化は一意に決まる，という事実を仮定せずに議論しているため，A の簡約化は，C_1, C_2,... と複数存在する可能性が残ってしまっています．そこで，ここでは，そのようなものの一つ一つの主成分を持つ行の数を考えて，それらの数のうち最小のものを，A の階数として定義しています．

(e)　A は，可逆である．

(f)　A は，複数の基本行列の積として表わせる．

(g)　${}^tA$ は，可逆である．

証明． (a) ⇒ (b):　$rank(A) = n$ とすると，上で述べたように，A の簡約化は，　E_n である．

(b) ⇒ (c):　A の E_n への簡約化が，基本行列の積 $B_k \cdots B_2 B_1$ に対応するものとすると，連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の拡大係数行列 $[\,A \,\vdots\, \mathbb{b}\,]$ は，この基本行列の積を左から掛けることで，これと同値な，$[\,E_n \,\vdots\, B_k \cdots B_2 B_1 \mathbb{b}\,]$ に変形される，このことから，$B_k \cdots B_2 B_1 \mathbb{b}$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の，唯一の解であることが，分かる．

(c) ⇒ (d):　$\mathbb{0} \in \mathbb{R}^n$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ の解だから，(d) は，(c) の特別な場合になっている．

(d) ⇒ (e):　対偶を示す．A を，可逆でないとすると，定理 5.21 により，A の簡約化 B で E_n と異るものがある．このとき，$\tilde{B} = [\,B \,\vdots\, \mathbb{0}\,]$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の簡約化で，$\tilde{B}$ は，右はじでない (つまり ‘⋮’ の左側にある)，主成分の現れない列を，持つから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，無限個の解を持つことがわかり (定理 5.15, (b) を参照)，特に，自明でない解を持つ．

(e) ⇒ (a):　対偶を示す．$rank(A) < n$ とすると，A の簡約化 B で E_n と異るものがあるが，基本行列 $B_1, B_2, \ldots, B_k$ を $B = B_k \cdots B_2 B_1 A$ となるものとすると，$A = (B_1)^{-1}(B_2)^{-1} \cdots (B_k)^{-1} B$ となるから，補題 5.22,(1),(2) により，A は，可逆でない．

以上で，(a)〜(e) が，互いに同値であることが示せたが，(f) が，これらと同値であることを示すために，次の 2 つの含意を示す:

(b) ⇒ (f):　E_n が，A の簡約化なら，この基本変形に対応する基本行列の列 $B_1, \ldots, B_k$ で，$B_k \cdots B_1 A = E_n$ となるものが存在する．このとき，$(B_1)^{-1}, \ldots, (B_k)^{-1}$ も，基本行列で，$A = (B_1)^{-1} \cdots (B_k)^{-1}$ である．

(f) ⇒ (b):　基本行列 $B_1, \ldots, B_\ell$ で，$A = B_1 \cdots B_\ell$ となるものがあれば，$(B_1)^{-1}, \ldots, (B_\ell)^{-1}$ も，基本行列で，$(B_\ell)^{-1} \cdots (B_1)^{-1} A = E_n$ だから，E_n は，A の簡約化である．

(f) と，(g) の同値性は，既に証明してある，(e) と，(f) の同値性を介して

行なうことにする:

$\Big(\big((\mathrm{e}) \Leftrightarrow (\mathrm{f})\big) + (\mathrm{f})\Big) \Rightarrow (\mathrm{g})$:　A が，複数の基本行列の積として表わせるなら，補題 5.12 (2) により，${}^tA$ も基本行列の積として表わせる．したがって，“(e) $\Leftrightarrow$ (f)” により，${}^tA$ は，可逆である．

$\Big(\big((\mathrm{e}) \Leftrightarrow (\mathrm{f})\big) + (\mathrm{g})\Big) \Rightarrow (\mathrm{f})$:　${}^tA$ が可逆なら，“(e) $\Leftrightarrow$ (f)” により，${}^tA$ は，複数の基本行列の積として表わせるから，補題 5.12 (2) により，$A = {}^t({}^tA)$ も，複数の基本行列の積として表わせる．　□ (定理 5.23)

例 5.24 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ として，A が可逆かどうかを確かめ，可逆なら，逆行列を求める．　Ex-5-2

2	-2	0	1	0	0	
-1	2	-2	0	1	0	
-1	-1	2	0	0	1	
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	① 行目 $\times\frac{1}{2}$
-1	2	-2	0	1	0	
-1	-1	2	0	0	1	
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	
0	1	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	② 行目 + ① 行目
0	-2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	③ 行目 + ① 行目
1	0	-2	1	1	0	① 行目 + ② 行目
0	1	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	
0	0	-2	$\frac{3}{2}$	2	1	③ 行目 $+2\times$ ② 行目
1	0	-2	1	1	0	
0	1	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	
0	0	1	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	③ 行目 $\times(-\frac{1}{2})$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	① 行目 $+2\times$ ③ 行目
0	1	0	-1	-1	-1	② 行目 $+2\times$ ③ 行目
0	0	1	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	

したがって，A は可逆で，$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ である．計算ミスがないかどうかは，例えば，この行列に A を右から掛けたときに，E_3 が得られる

かどうかを計算して確かめてみることで，チェックできる [*29].

次は，定理 4.35 で，天下り的 (unmotivated) に与えた証明の，演繹的な別証となっている．

P-5-4 **補題 5.25 (定理 4.35 の一部の別証)** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とするとき，A が，可逆となるのは，$ad - bc \neq 0$ となる，ちょうどそのときである．このときには，

$$(4.64) \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

が成り立つ．

証明． 例 4.30, (3) により，$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ なら，A は，可逆でない．この場合には，$ad - bc = 0$ となることに注意する．

$a \neq 0$ なら，

a	b	1	0	
c	d	0	1	
1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	① 行目 $\times\frac{1}{a}$
c	d	0	1	
1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	
0	$d - \frac{bc}{a}$	$-\frac{c}{a}$	1	② 行目 $-c\times$ ① 行目

と変形できるが，ここで，$d - \frac{bc}{a} = 0$ ($\Leftrightarrow ad - bc = 0$) なら，$A$ は，可逆でない．$ad - bc \neq 0$ なら，更に，変形を続けて，

1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	
0	1	$-\frac{c}{ad-bc}$	$\frac{a}{ad-bc}$	② 行目 $\times\frac{a}{ad-bc}$
1	0	$\frac{d}{ad-bc}$	$\frac{-b}{ad-bc}$	① 行目 $-\frac{b}{a}\times$ ② 行目
0	1	$-\frac{c}{ad-bc}$	$\frac{a}{ad-bc}$	

となる．したがって，

[*29] これが，完全なチェック (つまり，正しくない場合が常に検出されるようなチェック) になっていることは，後出の定理 6.50 から従います．

(*) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ が，A の逆行列になることが，分かる．

$c \neq 0$ の場合にも同様に計算すると，$ad-bc=0$ のときは，A は，可逆でなく，$ad-bc \neq 0$ のときは，(*) が，成り立つことが，分かる．　□ (補題 5.25)

原理的には，上と同様の方法で，$n \geq 3$ に対する，n-次の正方行列が，可逆であることの特徴付けや，公式が，得られるはずだが，実は，もっと，ずっとエレガントなやり方で，上の公式 (4.64) の一般化を得ることができる．これは，次の第 6 章の，第 6.3 節で，見ることになる．

第 6 章

行列式

6.1 置換と行列式の定義

determinant

以下で置換(ちかん)について説明する．置換の概念と，置換の偶奇性の概念は，本節の終りで与えることになる「行列式」の定義で，必要になる．

perumutation

♦ lin-alg-2-02-2020-07-09-contents.tex

$n \in \mathbb{N}$ に対し，集合 $\{1, 2, ..., n\}$ を $\overline{n}$ で表わすことにしたのだった．σ が，**n-次の置換** (permutation of n elements) であるとは，$\sigma : \overline{n} \to \overline{n}$ で，σ は全単射であることである．$\overline{n}$ は，有限集合なので，$\sigma : \overline{n} \to \overline{n}$ が，単射であることが言えれば，全射 (上への写像) であることは，このことから従う (演習問題 2.14, (3) を参照)．n-次の置換の全体を，S_n と表わすことにする．

$$(6.1) \quad S_n = \{\sigma : \sigma \text{ は } n\text{-次の置換 }\}$$

である[*1]．組合せ論の議論から，S_n は，$n!$ 個の要素を持つことが，分かる．ここでは，各 $\sigma \in S_n$ は，$i \in \overline{n}$ を，$\sigma(i)$ で，置き換える，という操作と捉えている[*2]．

σ と τ を S_n の要素とするとき，置き換え τ を行なった結果を，更に，σ で置き換える，という置き換えの合成を考えてみる．$i \in \overline{n}$ は，τ により，$\tau(i)$

[*1] 後で述べるように，S_n は，関数の合成の演算と対にして考えたときに，群 (ぐん，216 ページ以降を参照) になりますが，この群は，“symmetric group of degree n” (n-次の対称群) と呼ばれます．S_n という記法の，“S” は，この名称の頭文字から来ています．

[*2] “σ” は，ギリシャ文字の小文字のシグマです．σ は，ラテン文字の “s” に対応するので，S_n の要素，という繋がりで選ばれている文字です．“τ” は，ギリシャ文字の小文字のタウで，シグマの次の文字です．xxvii ページに挙げた，ギリシャ文字の表を，参照してください．

に置き換えられ，それが，更に，σ で，$\sigma(\tau(i))$ に置き換えられる．このような置き換えの合成の結果として得られる n-次の置換，つまり S_n の要素を，$\sigma\tau$ という積として，表わすことにする．つまり，$\sigma\tau$ は，合成関数の記号を使うと，$\sigma \circ \tau$ のことである．

置換 $\sigma \in S_n$ が，$\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2, \ldots, \sigma(n) = k_n$ となっているとき，

$$(6.2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と書くことにする．この書き方では，上の行から下の行への対応の仕方だけに着目しているものとする．したがって，上の例は，列を入れ替えて，

$$(6.3) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & n \\ k_2 & k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

などとも書ける．

Ex-6-a **例 6.1**

$$(6.4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

である．同様の等式は，行列では成り立たないことに注意する．

$\sigma, \tau \in S_5$ で，

x-a2-0

$$(6.5) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき，$\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1$,　$\sigma\tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \ldots,$ $\sigma\tau(5) = \sigma(\tau(5)) = \sigma(2) = 3$ だから，

x-a2-0-a

$$(6.6) \quad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

置換の積も，行列の積と同じように，一般には可換でない (積の順序を変えると，計算結果が必ずしも同じにならない)．例えば，上の (6.5) での σ と τ については，

$$(6.7) \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となるから，これを (6.6) と比較して，$\sigma\tau \neq \tau\sigma$ であることが分かる．

行列の積と同じように，置換の積も，結合則が成り立つ:

補題 6.2 すべての $\sigma, \tau, \nu \in S_n$ に対し，$(\sigma\tau)\nu = \sigma(\tau\nu)$ が成り立つ． P-a2-0

証明． 置換の積は，関数の合成により定義されていたので，補題は，補題 2.10, (1) から従う． ❑ (補題 6.2)

S_n で，行列の積での単位行列に対応するものは，**単位置換** (identity permutation) である (恒等置換とよばれることもある)． これは，何も置き換えない置換で，$\varepsilon_n \in S_n$ と表わされる[*3]．つまり，$\varepsilon_n = id_{\overline{n}}$ である．n が，何かが，文脈から明らかなときには，添字の n を落として単に ε とも書くことにする．

(6.8)　$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である．

(6.9)　すべての $\sigma \in S_n$ に対し，$\varepsilon_n\sigma = \sigma\varepsilon_n = \sigma$ である．

行列の積のときとは異なり，すべての置換には，その逆が存在する．$\sigma \in S_n$ に対し，

(6.10)　$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

として，

(6.11)　$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とすると，$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon_n$ である．σ^{-1} を σ の**逆置換** (inverse permutation) とよぶ． 補題 6.2 により，逆行列のときと全く同じ証明で，逆置換の一意性が成り立つことが，示せる．つまり，

補題 6.3 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対し，$\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon_n$ となる $\tau \in S_n$ は，σ^{-1} に等しい． P-a2-1

[*3] ε はギリシャ文字，小文字のイプシロンです．

証明． $\tau, \tau' \in S_n$ を，$\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon_n$, $\tau'\sigma = \sigma\tau' = \varepsilon_n$ となるものとすると，

$$\tau = \tau\varepsilon_n = \tau(\sigma\tau') \underbrace{=}_{\text{補題 6.2 による}} (\tau\sigma)\tau' = \varepsilon_n\tau' = \tau'$$

である． □ (補題 6.3)

$1 \leq i < j \leq n$ に対し，S_n の要素で，i と j を入れ替え，$\overline{n}$ の他の要素は，動かさないようなものを，**i と j の互換** (transposition) とよび，これを，$(i\ j)$ で表わす．

$$(6.12)\quad (i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である．

$1 \leq i < j \leq n < n'$ のときには，S_n での $(i\ j)$ と，$S_{n'}$ での $(i\ j)$ は，厳密には，区別しなくてはならない．区別して書くときには，それぞれを $(i\ j)_n$, $(i\ j)_{n'}$ と書くことにする．$(i\ j)_n$ は，$(i\ j)_{n'}$ を $\overline{n}$ に制限して得られる写像である．しかし，以下では，$(i\ j)_n$ と $(i\ j)_{n'}$ を同一視して [*4]，単に，$(i\ j)$ と書くことが多い．

X を，n 個の要素からなる有限集合とすると，全単射 $i : \overline{n} \to X$ が，存在するが，このときには，$S_X = \{\sigma : \sigma : X \to X$ は全単射$\}$ は [*5]，写像

x-a2-0-a-0 $$(6.13)\quad \tilde{i} : S_n \to S_X;\ \sigma \mapsto i \circ \sigma \circ i^{-1}$$

により，S_n と同一視できる [*4]．実際，この $\tilde{i}$ が，全単射となることは，全単射の逆写像も全単射で，全単射の合成が再び全単射となること (補題 2.13,(1) と，補題 2.11, (3)) により，よい．$\tilde{i}$ は，S_n と S_X での要素の積も，保存する．

[*4] ここでの "同一視" には，後で，群の同型や群の埋め込みの概念を用いた，更に精度の高い説明が与えられることになります．218 ページ前後を参照してください．

[*5] 本書では，集合の要素の性質の指定による定義 (条件を満たす要素をすべて集めて得られる集合) を，"{ 要素をあらわす変数 : 条件 }" という書き方で行なっています (第 2 章を参照)．ここでの S_X の定義は，"$\sigma : X \to X$ は全単射" という条件を満たす σ の全体からなる集合，ということです．ここでは，":" が，二重になって，見た目がぎこちなくなってしまっています．"{ 要素を表わす変数 | 条件 }" という書き方を用いる，というやり方もあるのですが，この記法でも，例えば，絶対値が 1 である複素数の全体は，$\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ と表わされることになり，やはりぎこちない表現になってしまいます．

つまり，任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対し，$\tilde{i}(\sigma\tau) = \tilde{i}(\sigma)\tilde{i}(\tau)$ が，成り立つ．

$$\begin{aligned}\tilde{i}(\sigma\tau) &= i\circ\sigma\circ\tau\circ i^{-1} = i\circ\sigma\circ(i^{-1}\circ i)\circ\tau\circ i^{-1} = (i\circ\sigma\circ i^{-1})\circ(i\circ\tau\circ i^{-1})\\ &= \tilde{i}(\sigma)\circ\tilde{i}(\tau) = \tilde{i}(\sigma)\,\tilde{i}(\tau).\end{aligned}$$

以下では，この同一視を，断りなく行なっているところもある．

定理 6.4 任意の $n \geq 2$ と，$\sigma \in S_n$ に対し，σ は，(複数の[*6]) 互換の積として表わせる． P-a2-2

証明． $\sigma \in S_n$ とすると，次の補題 6.6 により，σ は，複数の巡回置換 (定義は以下を参照) の積の形に書ける．この積に現れる巡回置換は，以下の補題 6.7 により，それぞれ，互換の積の形に書き換えられるから，それを行なうと，σ の互換の積のによる表現が得られる． □ (命題 6.4)

$n \geq 2$ に対し，$k_1, k_2, \ldots, k_m$ を，互いに異る $\overline{n}$ の要素とするとき，

$$\begin{aligned}&\sigma(k_1) = k_2,\ \sigma(k_2) = k_3, \ldots, \sigma(k_{m-1}) = k_m,\ \sigma(k_m) = k_1,\ \text{かつ},\\ &\text{すべての}\ \ell \in \overline{n} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}\ \text{に対し},\ \sigma(\ell) = \ell\end{aligned}$$

により定義される S_n の要素 σ を，($k_1, k_2, \ldots, k_m$ の) **巡回置換** (circular permutation) とよび，$\sigma = (k_1\ k_2\ \ldots\ k_m)$ と表わす[*7]．m を，巡回置換 σ の**周期**とよぶ[*8]．互換は，周期が 2 の巡回置換に他ならない．$\sigma \in S_n$ に対し，σ の**サポート** (support) $supp(\sigma)$ を，

$$supp(\sigma) = \{k : k \in \overline{n},\ \sigma(k) \neq k\} \tag{6.14}$$ x-a2-0-0

と定義する．$supp(\sigma) = \emptyset$ なら，$\sigma = \varepsilon_n$ である．また，$\sigma = (k_1\ k_2\ \ldots\ k_m)$ なら，$supp(\sigma) = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ である．

演習問題 6.5 $\sigma, \tau \in S_n$ で，$supp(\sigma) \cap supp(\tau) = \emptyset$ なら，$\sigma\tau = \tau\sigma$ である． Exerc-6-a-a

□

[*6] ここでも，「複数の」は，0 個の場合も 1 個の場合も含んでます．

[*7] ここでも，$\sigma \in S_n$ であることを指定するために，$\sigma = (k_1\ k_2\ \ldots\ k_m)_n$ のような書き方をする方が正確ですが，互換でのときと同様に $n < n'$ のときの，$(k_1\ k_2\ \ldots\ k_m)_n$ と $(k_1\ k_2\ \ldots\ k_m)_{n'}$ を同一視することにして，添字 n を，省略することにします．

[*8] 英語では，“周期” に対応する表現は用いず，“周期 n の巡回置換” を “circular permutation of n elements” あるいは，“circular permutation of length n” と表現するようです．

P-a2-3 **補題 6.6** すべての $n \geq 2$ に対し，任意の $\sigma \in S_n$ に対し，$p \in \mathbb{N}$ と [*9]，巡回置換 $\sigma_1, ..., \sigma_p \in S_n$ で，

x-6-a-a-0 (6.15)　$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$,

x-6-a-a-1 (6.16)　$supp(\sigma_i)$, $i \in \overline{p}$ は互いに素,

x-6-a-a-2 (6.17)　$supp(\sigma) = supp(\sigma_1) \cup \cdots \cup supp(\sigma_p)$

となるものが，取れる．ただし，ここでは，ε_n も，(周期が 0 の) 巡回置換と考えることにする．

証明． $k \in \overline{n}$ に関する帰納法で,

x-a2-1 (6.18)　$\sigma \in S_n$ で，$supp(\sigma)$ の要素の数が，k 以下なら，σ は，(6.16) と (6.17) を満たす巡回置換の積 (6.15) として表わせる [*10].

が成り立つことを示す [*11]．$k \leq 2$ なら，σ は単位置換であるか，あるいは，互換であるかのいずれかだから，いずれの場合にも，σ は，サポートが互いに素な，巡回置換の積として，表わせている (補題の主張の最後に書いた注意を参照).

$2 \leq k < n$ に対して，(6.18) が，成り立っているとして，$k+1$ に対しても，(6.18) が，成り立つことを示す．$\sigma \in S_n$ で，$supp(\sigma)$ の要素の数は，$k+1$ 以下とする．$\sigma = \varepsilon_n$ なら，補題の主張の最後に書いた注意から，σ は，巡回置換の積として表わせているから，$\sigma \neq \varepsilon_n$ としてよい．$\ell \in \overline{n}$ を $\sigma(\ell) \neq \ell$ となるようなものとして，$\ell_1, \ell_2, ...$ を $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = \sigma(\ell_1)$, $\ell_3 = \sigma(\ell_2)$ と順にとってゆくと，$\overline{n}$ は有限だから，ある $m \leq n+1$ に対し，$\ell_m = \ell$ $(= \ell_1)$ となる (演習!)．m をそのようなもののうち最小のもの，とすると，$\ell_1, ..., \ell_{m-1}$ は互いに異る [*12]．したがって，特に $m \leq k+1$ である．

[*9] 第 2.4 節では，p で素数を表わしていましたが，ここでは，記号が足りなくなって，p を使っているだけで，p は任意の自然数です．

[*10] 実は，(6.17) は，(6.16) から従いますが，証明の見通しをよくするために，付け加えてあります．

[*11] 特に，$k = n$ のときには，(6.18) の主張は，補題の主張と一致するので，これにより，補題が示せたことになります．

[*12] これは, 直観的には, 明らかに思えますが, すぐ上の “演習!” でもそうであるように, きちんと証明しようとすると, この “演習!” と同様の工夫がいります:　もし, ある $1 \leq i_1 < i_2 < m$

$m = k+1$ なら，σ は，巡回置換 $(\ell_1\ \ell_2\ \dots\ \ell_{m-1})_n$ と等しくなるから，主張は成り立つ．

$m < k+1$ なら，$X := \overline{n} \setminus \{\ell_1, \dots, \ell_{m-1}\}$ として，

$$\sigma' := (\sigma \restriction X)\ \cup\ id_{\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}}$$

とすると，$\overline{n} = X \,\dot{\cup}\, \{\ell\}_1, \dots, \ell_{m-1}$ だから[*13]，$\sigma' \in S_n$ で，$\#(supp(\sigma')) \leq \#(supp(\sigma) \cap X) \leq k$ である．したがって，帰納法の仮定から，σ' は，(6.16), (6.17) を満たす，複数の巡回置換の積として，書ける．$\sigma = (\ell_1 \cdots \ell_{m-1})\sigma'$ となるから，右辺の積は，(6.16), (6.17) を満たす，巡回置換の積となる，ことが分かる．　❏ (補題 6.6)

補題 6.7 周期が m の巡回置換は，$m-1$ 個の互換の積として書ける．　P-a2-4

証明． $\sigma \in S_n$ を巡回置換として，$\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_m)$ とすると，

$$\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_m) = (k_1\ k_m) \cdots (k_1\ k_3)(k_1\ k_2) \tag{6.19}$$

となるからよい (次の例 6.8 の図を参照)．　❏ (補題 6.7)

例 6.8 補題 6.7 の証明のアイデアを用いると，例えば，$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$ である．　Ex-6-a-a-0

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\ 2) \\
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\ 3) \\
2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\ 4) \\
2 & 3 & 4 & 1 & 5 & \\
 & & & & & (1\ 5) \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 &
\end{array}$$

❏

補題 6.9 巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)$ の逆置換は，$(k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)$ である．　P-a2-5

に対し，$\ell_{i_1} = \ell_{i_2}$ だったとすると，$\ell = (\sigma^{-1})^{i_1-1}(\ell_{i_1}) = (\sigma^{-1})^{i_1-1}(\ell_{i_2}) = \ell_{i_2-i_1+1}$ となるから，ある $i < m$ 対し，$\ell = \ell_i$ となることになってしまい，m の最小性に矛盾です．

[*13] 記号 “$\dot{\cup}$” については，(2.11) を参照してください．

証明． $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)$, $\tau = (k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)$ として，$\tau\sigma = \varepsilon$, $\sigma\tau = \varepsilon$ となることを示せばよい．ただし，σ と τ は，S_m の要素として考えているものとする．

$1 \leq i < n$ に対し，$\sigma(k_i) = k_{i+1}$ だから，$\tau(\sigma(k_i)) = \tau(k_{i+1}) = k_i$ である．$i = n$ なら，$\sigma(k_n) = k_1$ だから，$\tau(\sigma(k_n)) = \tau(k_1) = k_n$ である．以上から，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，$\tau(\sigma(k_i)) = k_i$ となることが，示せた．$\ell \in \overline{m} \setminus \{k_1, ..., k_n\}$ とすると，σ も，τ も，ℓ を動かさないから，$\tau(\sigma(\ell)) = \ell$ である．以上から，$\tau\sigma = \varepsilon$ が，示せた．

$\sigma\tau = \varepsilon$ も，同様の議論で示せる [*14]． □ (補題 6.9)

$\sigma \in S_n$ の互換の積としての表現は，一意ではない．例えば，単位置換 ε_n は，$\varepsilon_n = (1\ 2)(1\ 2)$ とも，$\varepsilon_n = (1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)$ とも，表わせるし，巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ は，$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$ とも，$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)$ とも，$(1\ 2\ 3) = (2\ 3)(2\ 3)(1\ 3)(1\ 2)$, etc. とも表わせる．

しかし，以下が成り立つ．

P-3-0 **定理 6.10** 任意の $n \geq 2$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対し，σ が互換の積として $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ と表わせるとするとき，m と n の偶奇性は，等しい [*15]．

この定理は，以下の行列式に関する議論で，非常に重要なものとなる．Wikipedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Parity_of_a_permutation

には，この定理の 4 つの異る証明が載っているが，以下の証明は，それらのうち，最もエレガントな (しかし，自分で見つけようと思っても，そう簡単には思いつかないであろう) ものと，ほとんど同じものである．ちなみに，以下の証明の記述は，[43] にある証明のスケッチをもとに，作成したものである．

---

*14 実は，補題 6.23 で示すことになるように，S_n が群であることから (例 + 演習問題 6.21, (1))，σ と τ が，互いに逆置換になっていることを言うには，$\tau\sigma = \varepsilon$, $\sigma\tau = \varepsilon$ のうちの，片方を示せば十分です．

*15 (0 を含む) 自然数 $k \in \mathbb{N}^*$ の偶奇性 (parity) とは，それが奇数であるか偶数であるか，という性質のことです．n と m の偶奇性が等しい，とは，したがって，ある $n', m' \in \mathbb{N}^*$ と $\ell, \ell' \in \{0, 1\}$ に対し，$n = 2n' + \ell$, $m = 2m' + \ell'$ となるとき，$\ell = \ell'$ であることです．

定理 6.10 の証明．　変数 $x_1,\dots,x_n$ を持つ (必ずしも一次ではない) **多項式** (polynomials) の全体を，PL とあらわすことにする．$f(x_1,\dots,x_n)\in PL$ と $\sigma\in S_n$ に対し，

(6.20)　$\sigma(f(x_1,\dots,x_n)) := f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(s)},\dots,x_{\sigma(n)})$ x-3-0

として，$\sigma\in S_n$ を，PL から，PL への関数，とも看做すことにする．このとき，

Claim 6.10.1 $\sigma,\tau\in S_n$ と，$f\in PL$ に対し，$(\sigma\tau)(f)=\sigma(\tau(f))$ である． cl-3-0

$$\vdash \quad (\sigma\tau)(f(x_1,\dots,x_n)) \underbrace{=}_{\substack{PL \text{ から } PL \text{ への関数としての}\\ \sigma\tau \text{ の定義による}}} f(x_{(\sigma\tau)(1)},x_{(\sigma\tau)(2)},\dots,x_{(\sigma\tau)(n)})$$

$$\underbrace{=}_{S_n \text{ での，積 } \sigma\tau \text{ の定義による}} f(x_{\sigma(\tau(1))},x_{\sigma(\tau(2))},\dots,x_{\sigma(\tau(n))}) \underbrace{=}_{\substack{PL \text{ から } PL \text{ への関数としての}\\ \sigma \text{ の定義による}}} \sigma f(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\dots,x_{\tau(n)})$$

$$\underbrace{=}_{\substack{PL \text{ から } PL \text{ への関数としての}\\ \tau \text{ の定義による}}} \sigma(\tau f(x_1,x_2,\dots,x_n)) \text{ である．}$$

$\dashv$ (Claim 6.10.1)

次は，**ヴァンデルモンド多項式** (Vandermonde polynomial) とよばれる，多項式である [*16]．

(6.21)　$\Delta(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$. x-3-1

Claim 6.10.2 $\sigma\in S_n$ を，互換とするとき， cl-3-1
$\sigma\Delta(x_1,\dots,x_n)=-\Delta(x_1,\dots,x_n)$ である．

[*16] (6.21) での $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ は，i と j を，$1\le i<j\le n$ を満たす範囲で動かしたときの式 (x_j-x_i) のすべてを，掛け合わせることで得られる，多項式です．例えば，$n=2$ のときには，$\Delta(x_1,x_2)=x_2-x_1$ で，$n=3$ のときには，$\Delta(x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$ です．

この多項式の名称は，フランスの数学者，音楽家，化学者ヴァンデルモンド (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735(享保（きょうほう）20 年)〜1796(寛政 8 年)) にちなみます．ヴァンデルモンドは，数学史では，本章の主題である行列式の理論の，創始者と看做されることのある数学者です．

$\vdash$ $\sigma = (i^*\ j^*)$ $(1 \leq i^* < j^* \leq n)$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
(6.22)\quad & (i^*\ j^*)\Delta(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \Bigl(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \notin \{i^*, j^*\}}} (x_j - x_i) \Bigr) \cdot \Bigl(\prod_{1 \leq i < i^*} \underbrace{(x_{j^*} - x_i)(x_{i^*} - x_i)}_{=(x_{i^*}-x_i)(x_{j^*}-x_i)} \Bigr) \\
&\quad \cdot \Bigl(\prod_{i^* < i < j^*} \underbrace{(x_i - x_{j^*})(x_{i^*} - x_i)}_{\substack{=-(x_{j^*}-x_i)(-(x_i-x_{i^*})) \\ =(x_i-x_{i^*})(x_{j^*}-x_i)}} \Bigr) \cdot \Bigl(\prod_{j^* < i \leq n} \underbrace{(x_i - x_{j^*})(x_i - x_{i^*})}_{=(x_i-x_{i^*})(x_i-x_{j^*})} \Bigr) \\
&\quad \cdot \underbrace{(x_{i^*} - x_{j^*})}_{= -(x_{j^*} - x_{i^*})} \\
&= -\Delta(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

である．$\dashv$ (Claim 6.10.2)

以上の準備により，定理 6.10 の証明を，完成することが，できる．背理法により示す．定理が成り立たないとすると，ある置換 σ が，

x-6-a-a-3 (6.23) 偶数個の互換の積 $\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}$ としても，奇数個の互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1}$ としても，表現できる．

このとき，

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_1, \ldots, x_n) &= (-1)^{2k}\Delta(x_1, \ldots, x_n) \underbrace{=}_{\text{Claim 6.10.1 と，Claim 6.10.2 による}} \sigma_1 \cdots \sigma_{2k}\Delta(x_1, \ldots, x_n) \\
&\underbrace{=}_{\text{(6.23) による}} \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1}\Delta(x_1, \ldots, x_n) \underbrace{=}_{\text{Claim 6.10.1 と，Claim 6.10.2 による}} (-1)^{2\ell+1}\Delta(x_1, \ldots, x_n) \\
&= -\Delta(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

となる．例えば，$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ を，$\mathbb{R}$-係数の多項式と考えると，$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ は $-\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ と異るから，これは矛盾である [*17]．

---

*17 K を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のどれかとして，p を K の元を係数とする多項式とするとき，$p \neq 0$ なら (つまり p が多項式 0 と異るなら)，常に $p \neq -p$ が成り立ちます (演習!)．体 K で，K-

□ (定理 6.10)

定理 6.10 により，以下の定義が，可能になる:

$\sigma \in S_n$ のとき，σ の**符号** (signature) $sgn(\sigma)$ を，

$$(6.24) \quad sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{偶数個の互換 } \sigma_1, \ldots, \sigma_{2k} \in S_n \text{ で } \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_{2k} \\ & \text{となるものがあるとき;} \\ -1, & \text{奇数個の互換 } \tau_1, \ldots, \tau_{2\ell+1} \in S_n \text{ で } \sigma = \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1} \\ & \text{となるものがあるとき.} \end{cases}$$

として定義する．つまり，σ が k 個の互換の積として表現できるとき，$sgn(\sigma) = (-1)^k$ である．定理 6.10 により，この $sgn(\sigma)$ の定義は，well-defined である．

補題 6.11 $\sigma \in S_n$ を，周期が m の巡回置換とするとき，$sgn(\sigma) = (-1)^{m-1}$ $(= (-1)^{m+1})$ である． P-6-a-0

証明． 補題 6.7 と，$sgn(\cdot)$ の定義により，よい． □ (補題 6.11)

n-次の正方行列 $A = [a_{i,j}]$ に対し，A の**行列式** (determinant) $\in \mathbb{R}$ を，

$$(6.25) \quad \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$ x-3-2

で定義する．A の行列式は，$|A|$, $\det(A)$, $\det[a_{i,j}]$ などとも表わすことにする．

$|A|$ と書くと，絶対値の記号と同じなので，正の値を取るのではないか，と錯覚しやすいが，定義 (6.25) から明らかなように，$|A|$ は，負の値もとり得る．

$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$ のときには, A の行列式を $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ とも表わす．

係数の多項式 $p \neq 0$ で，$p = -p$ となるものが存在するのは，どういうときか考えてみてください (演習!).

Ex-6-a-0 **例 6.12** （1） A を，一次の正方行列として，$A = [a_{1,1}]$ とする．$S_1 = \{\varepsilon_1\}$ だから，行列式の定義 (6.25) により，$\det(A) = a_{1,1}$ である．(絶対値 $|\,a_{1,1}\,|$ ではないことに注意！)

（2） $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ の行列式を考察する．

$S_2 = \{\varepsilon_2, (1\ 2)\}$ で，$sgn(\varepsilon_2) = 1$, $sgn(1\ 2) = -1$ だから [*18]，行列式の定義 (6.25) から，

x-3-a2-0
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \tag{6.26}$$

である． ❏

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と書くと，(6.26) は，$\det(A) = ad - bc$ と表わされるが，この “$ad - bc$” という表現は，定理 4.35 や，補題 5.25 にも，既に，出てきたものである．そこで，定理 4.35 や補題 5.25 の該当する部分を，ここで導入した行列式を使って，書き直してみると:

P-3-1 **命題 6.13（補題 5.25 の行列式を用いた別表現）** $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ とするとき，A が，可逆な行列となるのは，$\det(A) \neq 0$ となる，ちょうどそのときである．$\det(A) \neq 0$ のときには，

x-3-3
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

である． ❏

実は，もっと一般的に，任意のサイズの正方行列 A について，A が，可逆あることと，$\det(A) \neq 0$ であることの，同値性が，示せる (系 6.47 を参照). (6.27) も，任意のサイズの正方行列についての，逆行列の式に，一般化できる ((6.58) を参照).

S_n の要素の数は，$n!$ (n の**階乗**) である． 指数関数的 (例えば，$n \mapsto 2^n$) な増加の仕方は，日本語では幾何級数的という，歴史的表現で表わされることもあるが [*19], 階乗は, 指数関数より, 更に, 本質的に速く増加する関数である [*20].

*18 これは，正しくは，$sgn((1\ 2)) = -1$ と書くべきですが，括弧を一組省いて書いてます．以下でも同様です．

有限集合 X の要素の数を，$\#(X)$ と表わすことにすると，$\#(S_2) = 2! = 2$, $\#(S_3) = 3! = 6$, $\#(S_4) = 4! = 24$, $\#(S_5) = 5! = 120$, $\#(S_6) = 6! = 720$,... となって，n が少し大きくなると，$\#(S_n)$ は急激に増加し，(6.25) を具体的に書き下すことは，現実的には不可能になってくる．$n = 3$ の場合では，これが，まだ，かろうじて可能である．

例 6.14　(a) $S_3 = \{\varepsilon_3, (1\,2\,3), (3\,2\,1), (1\,2), (2\,3), (1\,3)\}$ である．sgn (符号) の定義から，$sgn(\varepsilon_3) = 1$ で，$(1\,2\,3) = (1\,3)(1\,2)$, $(3\,2\,1) = (2\,3)(1\,3)$ だから，$sgn(1\,2\,3) = sgn(3\,2\,1) = 1$．また，$sgn(1\,2) = sgn(2\,3) = sgn(1\,3) = -1$ である． Ex-6-a-0-0

(b) 上の (a) と行列式の定義 (6.25) から，$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \tag{6.28}$$ x-3-4

$$\begin{aligned} = \; & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ & - (a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}) \end{aligned}$$

---

*19 「指数関数的」(英語では exponential) という用語は，欧米の言語では，COVID-19 に関連する政治的発言で聞かれることも多いが，日本では，この単語や，この単語の意味するところの内容は，政治的な発言の中で聞くことはなく，日本の政治家が理解しているのかどうかも，不明である．ドイツの政治では，COVID-19 に関して „Reproduktionszahl“ (“reproduction number” — 下で述べる，日本語で言うところの 「幾何級数的」増加，$n \mapsto ab^n$ b に対応する指数) についての議論がなされていて，少なくとも，ニュース番組のインタヴューに出てくるような政治家は，その意味を正しく把握しているように思える．CNN の 2021 年 3 月の記事には，“reproduction number が 1.4 を越えていると 10 日で 2 倍になる” と指摘しているものがあった (単位時間をインフルエンザでの通常の計算でと同じ，5 日としているのだろう: $1.4^{10/5} = 1.959...$ である)．「指数関数的」は，連続的変化にも離散的変化にも適用できる形容詞であるが，日本語では，対応する離散的な $n \mapsto ab^n$ に対する，マスサスの人口論などで用いられた，18 世紀の数学用語の訳語である「幾何級数的」という表現が定着してしまい，このキーワードを和英辞書を引いても，“geometric”, “geometrical” などの，現代では，exponential の意味で使われることのない訳語しか出てこない，という事態が定常化している．“幾何級数的” が，“指数関数的” の離散限定版である，という知識が，日本で共有されていないことは，原子炉の中での核反応や，伝染病の伝播について，真剣に議論しなければならないはずの，現代日本の置かれた状況を考えると，ひどく不安な気分にさせられる．

*20 これに関しては，ここ (`https://fuchino.ddo.jp/obanoyama.html#20.07.26`) に書いた，著者のコメントも参照してください．

である． ❏

Exerc-6-a-0 **演習問題 6.15** 任意の $\theta \in [0, 2\pi)$ に対し，$E_z(\theta)$ を，(6.28) で定義した，z-軸を回転軸とする角度 θ の回転を表現する，3 次の正方行列とするとき，$\det(E_z(\theta)) = 1$ となる． ❏

次の 2 つの等式も，行列式の定義 (6.25) に戻って，直接計算で，求めることが，できるが，これは，後で出てくる補題 6.32 の，特別な場合，と看做すこともできる．

Exer-6-0 **演習問題 6.16** $n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，（1） $\det(E_n) = 1$.
（2） $\det(-E_n) = (-1)^n$ である． ❏

group S_n を，S_n 上の演算 $\circ : (S_n)^2 \to S_n;\ \langle \tau, \sigma \rangle \mapsto \tau\sigma$ と，$\varepsilon\ (= id_{\overline{n}})$ とで，セットにした $\langle S_n, \circ, \varepsilon \rangle$ は，群 (ぐん) とよばれる，代数構造 [*21] の，一つの，特別な場合となっている:

空でない集合 G, G 上の，二項演算 $\circ : G^2 \to G;\ \langle a, b \rangle \mapsto a \circ b$ と，$e \in G$ の三つ組 $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e \rangle$ が，**群** (group) であるとは，$\mathcal{G}$ が，以下の性質 (6.29), (6.30), (6.31) を，満たすことである:

x-6-0 (6.29) (結合律)　すべての a, b, $c \in G$ に対し，$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ が，成り立つ．

x-6-1 (6.30) (単位元の性質)　すべての $a \in G$ に対し，$a \circ e = e \circ a = a$ である．

x-6-2 (6.31) (逆元の存在)　すべての $a \in G$ に対し，$b \in G$ で，$a \circ b = b \circ a = e$ となるものが，存在する．

(6.30) を満たす G の要素 e を，群 $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e \rangle$ の **単位元** (identity element) とよぶ．単位元は，性質 (6.30) で，一意に指定される: e' を，(6.30) を満たす (e とは異るかもしれない) G の元とすると，$e \underbrace{=}_{e' \text{ は (6.30) を満たす}} e \circ e' \underbrace{=}_{e \text{ は (6.30) を満たす}} e'$ により，$e = e'$ となるからである．

群 $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e \rangle$ で，$a \in G$ に対する，(6.31) でのような b も，a に対して，一意に決まる:　$a \circ b = b \circ a = e$, かつ，$a \circ b' = b' \circ a = e$ なら，

[*21] 代数構造という用語については，第 B.1 節，360 ページを参照してください．

$$\underbrace{b \;=\; b\circ e}_{(6.30)} \;\underbrace{=}_{b' \text{ の取り方}}\; b\circ(a\circ b') \;\underbrace{=}_{(6.29)}\; (b\circ a)\circ b' \;\underbrace{=}_{b \text{ の取り方}}\; e\circ b' \;\underbrace{=}_{(6.30)}\; b'$$

だから，$b = b'$ である．

a に対して，一意に決まる，このような b を，a の**逆元** (inverse element) とよび，a^{-1} で表わす．

群 $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e\rangle$ の演算 $\circ$ が，**可換**のとき，つまり，すべての $a, b \in G$ に対し，

(6.32)　$a \circ b = b \circ a$　x-6-3

が成り立つとき，$\mathcal{G}$ は，**アーベル群** (abelian group) である，という [*22]．

群 $\mathcal{G} = \langle G, \circ, e\rangle$ で，G は，群 $\mathcal{G}$ の **台集合** (underlying set) であるという．

◆ 群の準同形，埋め込み，同型を定義する．部分群を埋め込みの流れで説明．同型：代数的に区別できない

以下の議論は，付録 B.1 で述べた，代数構造や，一階の構造に関する一般論の，群に関する，特別な場合となっているものである．ただし，いくつかの細部では，群に特有の状況も含まれている．

群の三つ組 $\langle G, \circ, e\rangle$ が与えれたとき，この群を，台集合で呼んでしまうことも多い．この場合には，厳密には意味をなさない，$G = \langle G, \circ, e\rangle$ という書き方をして，“簡単のために，群 $\langle G, \circ, e\rangle$ を，G と呼ぶことにする” というステートメントを表わすことにする．

群 $G = \langle G, \circ_G, e_G\rangle$ と $H = \langle H, \circ_H, e_H\rangle$ に対し，写像 $\varphi : G \to H$ が，**群の準同形** (group homomorphism) であるとは，

(6.33)　任意の $a, b \in G$ に対し，$\varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \circ_H \varphi(b)$ が成り立つ　x-6-3-0

ことである．

補題 6.17 群 $G = \langle G, \circ_G, e_G\rangle$ と $H = \langle H, \circ_H, e_H\rangle$ に対し，$\varphi : G \to H$ を群の準同形とする．このとき，以下が成り立つ:　P-6-a

[*22] “アーベル群” の名称は，可換な群と代数方程式の解の関係に関する結果を確立した，アーベル (Niels Henrik Abel, 1802〜1829) に因みます． 人名なのにも拘わらず，英語では，小文字で “abelian group” と書くことからも知れるように，アーベル群の概念は，数学の至る所に現れます．このアーベルの結果を含む，ガロア理論の子細については，第 II 巻で取り上げます．

◆ 第 II 巻でガロア理論を記述する．

（1）　$\varphi(e_G) = e_H$;

（2）　すべての $a \in G$ に対し，$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ である．ただし，この等式で，a^{-1} は，a の G での逆元で，$(\varphi(a))^{-1}$ は，$\varphi(a)$ の H での逆元を表している

証明． (1): $\varphi(e_G) \underbrace{=}_{(6.30)\text{ による}} \varphi(e_G \circ_G e_G) \underbrace{=}_{(6.33)\text{ による}} \varphi(e_G) \circ_H \varphi(e_G)$ となるから，この等式の両端に，$(\varphi(e_G))^{-1}$ を掛けると，$e_H = \varphi(e_G)$ が得られる．

(2): $e_H \underbrace{=}_{(1)\text{ による}} \varphi(e_G) \underbrace{=}_{\text{逆元の定義による}} \varphi(a^{-1} \circ a) \underbrace{=}_{(6.33)\text{ による}} \varphi(a^{-1}) \circ_H \varphi(a)$ だから，この等式の両端辺に $(\varphi(a))^{-1}$ を右から掛けると，$(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$ が得られる．

□ (補題 6.17)

$\varphi : G \to H$ が群の準同形で，単射のとき，φ は，群 G の，群 H への**埋め込み** (embedding) とよばれる．$\varphi : G \to H$ が群の準同形で，全単射のとき，φ は群 G から，群 H への**同型写像** (isomorphis) とよばれる．補題 6.17 により，群の埋め込みと，群の同型写像は，363 ページ での，代数構造の埋め込みや，代数構造の同型写像の特別な場合となっている．

次は，定義と，第 2.3 節 で見た写像の基本性質から，容易に示せる:

Exer-6-1 **演習問題 6.18** （1）　$\varphi_1 : F \to G$ と $\varphi_2 : G \to H$ が群の準同形なら，$\varphi_2 \circ \varphi_1 : F \to H$ も群の準同形である．φ_1 と φ_2 が群の埋め込みなら，$\varphi_2 \circ \varphi_1$ も群の埋め込みで，φ_1, φ_2 が群の同型写像なら，$\varphi_2 \circ \varphi_1$ も群の同型写像である．

（2）　$\varphi : G \to H$ が，群の埋め込みなら，φ は G から $\varphi''G$ (H の演算を $\varphi''G$ に制限して得られる群) への群の同型写像である．

（3）　$\varphi : G \to H$ が，群の同形写像なら，$\varphi^{-1} : H \to G$ も群の同型写像である．□

group-isom 　群 G から，群 H への同型写像が存在するとき，G と H は，**同型**である，といい，このことを $G \cong H$ で表わす．演習問題 6.18, (1), (3) により，“同型である” という関係は，(群のクラス上の) 同値関係である (クラス上の同値関係については，360 ページを参照).

同型な群は，同じ構造を持つ代数的な対象として，互いに同一視できる，特に，同型な 2 つの群は同じ代数的性質を持つ．このことは例えば，次の例のような状況が成り立っている:

例 6.19 G と H を，同型な群とするとき，G が，アーベル群なら，H も，アーベル群で，逆も成り立つ． Ex-6-a-1

証明． 群の同型が，対称律を満たす[*23]ことから，“G が，アーベル群でなければ，H も，アーベル群でない” ことを示せば十分である．

$\varphi : G \to H$ を同型写像として，G が，アーベル群でないとすると，$a, b \in G$ で，

$$a \circ_G b \neq b \circ_G a \tag{6.34}$$ x-6-3-1

となるものが存在するが，このとき，

$$\varphi(a) \circ_H \varphi(b) \underbrace{=}_{(6.33)\text{ による}} \varphi(a \circ_G b) \underbrace{\neq}_{(6.34)\text{ と }\varphi\text{ は単射による}} \varphi(b \circ_G a) \underbrace{=}_{(6.33)\text{ による}} \varphi(b) \circ_H \varphi(a)$$

である．したがって，H は，アーベル群でない． ❑ (例 6.19)

演習問題 6.20 $\varphi : G \to H$ を群の準同形とする． (1) φ が，埋め込みのときには，H がアーベル群なら，G も，アーベル群である． Exerc-6-a

(2) φ が，全射のときには，G が，アーベル群のときには，H もアーベル群である．

(3) φ が，埋め込みで，G が，アーベル群としても，H が，アーベル群とは，限らない．

(4) φ が，全射で，H がアーベル群だとしても，G が，アーベル群とは，限らない．

例＋演習問題 6.21 (1) $\mathcal{S}_n = \langle S_n, \circ, \varepsilon_n \rangle$ は，群である．$n > 2$ なら，$\mathcal{S}_n$ は，アーベル群ではない． Ex-6-0

$n, n' \in \mathbb{N}$ で，$n \leq n'$ のとき，$\sigma \in S_n$ に対し $\tilde{\sigma} \in S_{n'}$ を，$i \in \overline{n'}$ に対し，

[*23] つまり，$G \cong H$ なら $H \cong G$ が成り立つということです．

$$\tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i), & i \leq n \text{ のとき;} \\ i, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とすると，$\iota : S_n \to S_{n'}; \sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ は，群の埋め込みとなる．

（2） “+” を，通常の数の足し算とするとき，$\langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$ も，$\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ も，アーベル群である．

（3） $\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ として，“$\cdot$” を，通常の数のかけ算とするとき，$\langle \mathbb{R}_{>0}, \cdot, 0 \rangle$ は，アーベル群である．

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}; r \mapsto 2^r$$

は，$\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ から，$\langle \mathbb{R}_{>0}, \cdot, 0 \rangle$ への同型写像である．したがって，$\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ と，$\langle \mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1 \rangle$ は，同型である．これに対して，$\langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$ と，$\langle \mathbb{Q}_{>0}, \cdot, 1 \rangle$ は，同型でない．[**ヒント**: もし，$\langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$ と，$\langle \mathbb{Q}_{>0}, \cdot, 1 \rangle$ が同型なら，これらの代数的な性質は，等しくなければならないが，そうでない性質 — つまり片方で成り立ち，もう片方では成り立たないような性質 — が，あることが，示せる．例えば，a に対して $\frac{1}{2}a$ が常に $\mathbb{Q}$ の元となるのに対し $\sqrt{2}$. は $\mathbb{Q}$ の元でない．(したがって，$b \cdot b = 2$ となる $b \in \mathbb{Q}_{>0}$ は存在しない)]

（4） 体 K 上の，n-次の可逆な正方行列の全体を，$\mathsf{GL}(n, K)$ と表わす．行列の積を，$\bullet$ で表わすことにすると，$\langle \mathsf{GL}(n, K), \bullet, E_n \rangle$ は，群である．この群自身も，$\mathsf{GL}(n, K)$ で表わすことにする[*24]．$n > 1$ のときには，$\mathsf{GL}(n, K)$ は，アーベル群ではない． ❑

♦ $\mathsf{SL}(n, K)$ も後で導入する

数の掛け算や足し算や，行列の掛け算，などのときと同様に，結合律 (6.29) が成り立つことから，群 $\langle G, \circ, e \rangle$ での演算 $\circ$ の繰り返しでも，例えば，$(a_1 \circ ((a_2 \circ a_3) \circ a_4))$ などと書く代りに，括弧を省略して，$a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4$ などと書くことが多い．

上の例の (4) を念頭に置くと，第 4 章で見た，補題 4.32 は，実は，次の補題の，特別な場合であることが，分かる:

[*24] この群は，英語では，“general linear group” と呼ばれていて (日本語では，“一般線型群”)，“GL” は，この頭文字から来ています．

補題 6.22 （1） $\langle G, \circ, e\rangle$ を，群とするとき，すべての a, $b \in G$ に対し，$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ である． P-6-0

（2） a_1, a_2 ,…,, a_{k-1}, $a_k \in G$ のとき，$(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{k-1} \circ a_k)^{-1} = (a_k)^{-1} \circ (a_{k-1})^{-1} \circ \cdots \circ (a_2)^{-1} \circ (a_1)^{-1}$ である．

証明． 補題 4.32 の証明を，ここでの文脈で再利用することが，できる．

❑ (補題 6.22)

行列の掛け算と，逆行列に関して，182 ページで述べたような，微妙な状況は，群の演算では，起こらない:

補題 6.23 $\langle G, \circ, e\rangle$ を，群とするとき，すべての $a, b \in G$ に対し，$a \circ b = e$, あるいは，$b \circ a = e$ の片方が，成り立つ (ことが言える) なら，$b = a^{-1}$ で，$a = b^{-1}$ である． P-6-1

証明． 例えば，$a \circ b = e$ が，成り立つとして，この両辺に，a^{-1} を，左から掛けると，

$$b = e \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ b = a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ e = a^{-1}$$

となり，同様に，両辺に，b^{-1} を，右から掛けると，$a = b^{-1}$ が，得られる．
$b \circ a = e$ が，成り立つときも，同様に示せる． ❑ (補題 6.23)

正方行列に，補題 6.23 の議論が，そのまま適用できないのは，n-次の正方行列 A, B に対して，$AB = E_n$ としても，A と B が可逆であることが，直ちには，帰結できないからである．

6.2 行列式の基本性質

行列式の基本性質の一つとして，次の定理 6.24 を，最初に示す． det-basic-prop
任意の行列 A に対し，${}^tA$ で，A の転置行列を，表わすのだった ((1.2) を参照)． ♦ lin-alg-2-04-2020-07-23-contents.tex

定理 6.24 任意の n-次の正方行列 A に対し，$\det({}^tA) = \det(A)$ が，成り立つ． P-aa4-a

この定理の証明のために，まず，次の準備をする．

P-aa4-0 **補題 6.25** （1） 写像 $(\cdot)^{-1}: S_n \to S_n;\ \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は，全単射である．

（2） 任意の $\pi \in S_n$ に対し，写像 $(\cdot)\pi: S_n \to S_n;\ \sigma \mapsto \sigma\pi$ は，全単射である．

証明． (1): S_n は，有限集合だから，$(\cdot)^{-1}$ が，単射であることを，示せばよい (演習問題 2.14, (3) を参照)．このためには，$\sigma, \tau \in S_n$ を，S_n の，異る要素とするとき，$\sigma^{-1} \neq \tau^{-1}$ となることを，示せばよい: もし $\sigma^{-1} = \tau^{-1}$ だったとすると，$\sigma = \sigma(\tau^{-1}\tau) = (\sigma\tau^{-1})\tau = (\sigma\sigma^{-1})\tau = \tau$ となってしまうから，σ と τ が，異る，という仮定に，矛盾である．

(2): (1) と同様に示せる (演習!). □ (補題 6.25)

Exerc-6-a-1 **演習問題 6.26** （1） $G = \langle G, \circ, e\rangle$ を群とするとき，$\circ^*: G \times G \to G;\ \langle a, b\rangle \mapsto b \circ a$, $G^* = G$, $e^* = e$ とすると，$G^* = \langle G^*, \circ^*, e^*\rangle$ は，群である．

（2） G と G^* を (1) でのような群とすると，写像 $(\cdot)^{-1}: G \to G^*;\ a \mapsto a^{-1}$ は，群の同型写像である．

（3） 任意の $c \in G$ に対し，写像 $(\cdot)c: G \to G;\ a \mapsto ac$ は，群の同型写像である．

ヒント． G は無限でありえるので，補題 6.25 でのような，証明の簡略化はできないことに注意する． □ (演習問題 6.26)

P-aa4-1 **補題 6.27** （1） $\sigma \in S_n$ を，互換とするとき，$\sigma^{-1} = \sigma$ である．

（2） $\sigma \in S_n$ が，互換の積 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$ と，表わせるとき，$\sigma^{-1} = \sigma_\ell \cdots \sigma_2\sigma_1$ である．

証明． (1): この事実は，直観的に明らかなものとして，例えば，補題 6.6 の証明で，既に使っている．ここでは，厳密な証明を，書き出してみることにする．

ある $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$\sigma = (i\ j)$ とする． $\sigma\sigma = \varepsilon_n$ を，言えばよい．$k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ なら $\sigma\sigma(k) = \sigma(\sigma(k)) = \sigma(k) = k$ である．$k = i$ なら，$\sigma\sigma(i) = \sigma(\sigma(i)) = \sigma(j) = i$ で，$k = j$ なら， $\sigma\sigma(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(i) = j$

である．したがって，すべての $k \in \{1, ..., n\}$ に対し，$\sigma\sigma(k) = k$ だから，$\sigma\sigma = \varepsilon_n$ である．

(2):　(1) と，補題 6.22, (2) により，よい．　□ (補題 6.27)

0 を含む自然数 $\ell \in \mathbb{N}^*$ に対し，ℓ の偶奇性 $sgn(\ell)$ を，

$$(6.35)\quad sgn(\ell) = \begin{cases} 1, & \ell \text{ が偶数のとき；} \\ -1, & \ell \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$ x-aa4-1

として定義することにする．

補題 6.28 任意の $n \in \mathbb{N}$ と，$\sigma \in S_n$ に対し，$sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ である．　P-aa4-2

証明． 定理 6.4 により，$\sigma \in S_n$ を，互換の積 $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_\ell$ と表わすと，補題 6.27, (2) により，σ^{-1} は，$\sigma^{-1} = \sigma_\ell \cdots \sigma_2\sigma_1$ という互換の積として表わせる．したがって，

$$sgn(\sigma) = sgn(\ell) = sgn(\sigma^{-1})$$

である．　□ (補題 6.28)

以上の準備により，定理 6.24 の証明が，行える．

定理 6.24 の証明: $A = [a_{i,j}]$, ${}^tA = [b_{i,j}]$ とすると，$b_{i,j} = a_{j,i}$ だから，

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{sgn(\sigma)}_{= sgn(\sigma^{-1}) \quad (\text{補題 } 6.28 \text{ による})} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))}\, a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))}$$

$$\underbrace{\quad}_{\sigma^{-1}(\sigma(k)) = (\sigma^{-1}\sigma)(k) = k}$$

$$= (*1)$$

$\sigma(1), ..., \sigma(n)$ は，$1, ..., n$ の並べ替えだから，順序を入れ替えると，

$$(*1) \;=\; \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \;=\; (*2)$$

補題 6.25, (1) により，$\langle \sigma^{-1} : \sigma \in S_n \rangle$ は，S_n の要素の 1 対 1 の枚挙になっているから，上式での σ^{-1} を，σ で，書き換えることができて，

$$(*2) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \det(A)$$

である． □ (定理 6.24)

P-aa4-3 **補題 6.29** A を, n-次の正方行列として, $A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ とする．ただし, $\mathbb{z}_1, \ldots, \mathbb{z}_n$ は，n-次元の行ベクトルである．$A = [a_{i,j}]$ とすると，$i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{z}_i = [a_{i,1}\, a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,n}]$ である．

（1） $\pi \in S_n$ を，互換 $\pi = (k\ l)$ $(k, \ell \in \overline{n},\ k < \ell)$ とすると，$A' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \mathbb{z}_{\pi(n)} \end{bmatrix}$ として，$\det(A') = -\det(A)$ が，成り立つ．

つまり，正方行列の 2 つの行を入れ替えると，行列式の絶対値は，変らず，符号が，入れ替わる．

（2） ある $i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{z}_i = \mathbb{z}_i^0 + \mathbb{z}_i^1$ のとき，

$$A_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_i^0 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$$

とする．A_0 は A の i-行 $\mathbb{z}_i$ を $\mathbb{z}_i^0$ で置き換えて得られる行列で，A_1 は A の i-行 $\mathbb{z}_i$ を $\mathbb{z}_i^1$ で置き換えて得られる行列である．このとき，$\det(A) = \det(A_0) + \det(A_1)$ が，成り立つ．

（3） $c \in \mathbb{R}$ として，ある $i \in \overline{n}$ に対し，

$$A'' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ c\mathbb{z}_i \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$$

とする (つまり，A'' を，A の i-行を，c 倍して，得られる行列とする)．このとき，$\det(A'') = c\det(A)$ が，成り立つ．

証明． (1): $A = [a_{i,j}]$, $A' = [b_{i,j}]$ とすると，$b_{i,j} = a_{\pi(i),j}$ だから，

$$
\begin{aligned}
\det(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{sgn(\sigma)}_{= -sgn(\sigma\pi^{-1})} \, a_{\pi(1),\sigma(1)} \, a_{\pi(2),\sigma(2)} \cdots a_{\pi(n),\sigma(n)} \qquad (\pi^{-1} = \pi \text{ が互換であることに注意する}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} -sgn(\sigma\pi^{-1}) \, a_{\pi(1),\sigma\pi^{-1}(\pi(1))} \, a_{\pi(2),\sigma\pi^{-1}(\pi(2))} \, \cdots \\
&\qquad \cdots \; a_{\pi(n),\sigma\pi^{-1}(\pi(n))} \\
&= \; (*3)
\end{aligned}
$$

$\pi(1), ..., \pi(n)$ は，$1, ..., n$ の，並べ替えだから，

$a_{\pi(1),\sigma\pi^{-1}(\pi(1))} \, a_{\pi(2),\sigma\pi^{-1}(\pi(2))} \cdots a_{\pi(n),\sigma\pi^{-1}(\pi(n))}$ を，並べ替えると，

$$
\begin{aligned}
(*3) \;&=\; -\left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma\pi^{-1}) a_{1,\sigma\pi^{-1}(1)} \, a_{2,\sigma\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma\pi^{-1}(n)} \right) \\
&=\; (*4)
\end{aligned}
$$

したがって，補題6.25, (2) により，

$$
(*4) \;=\; -\left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \right) = -\det(A)
$$

である．

(2):　$\mathbb{z}_i^0 = [a_{i,1}^0 \;\, a_{i,2}^0 \;\, \cdots \;\, a_{i,n}^0]$,　$\mathbb{z}_i^1 = [a_{i,1}^1 \;\, a_{i,2}^1 \;\, \cdots \;\, a_{i,n}^1]$ として，

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i,\sigma(i)}^0 + a_{i,\sigma(i)}^1) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)}^0 \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)}^1 \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det(A_0) + \det(A_1).
\end{aligned}
$$

(3):　$\det(A'') = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots c \, a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

$$= c\left(\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right) = c\det(A).$$

□ (補題 6.29)

定理 6.24 により，補題 6.29 での，行列の行に関する行列式の性質は，行列の列に関する行列式の性質に翻訳することが，できる．このことから，以下の補題が得られる:

P-aa4-4 **補題 6.30** A を，n-次の正方行列として，$A = [\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \mathbb{a}_n]$ とする．ただし，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は，n-次元列ベクトルである．$A = [a_{i,j}]$ とすると，$j \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ である．

（1） $\pi \in S_n$ を，互換 $\pi = (k\ l)$ $(1 \le k < \ell \le n)$ とすると，$A' = [\,\mathbb{a}_{\pi(1)} \ \cdots \ \mathbb{a}_{\pi(n)}\,]$ として，$\det(A') = -\det(A)$ が，成り立つ．つまり，正方行列の 2 つの列を，入れ替えると，行列式の絶対値は，変らず，符号が，入れ替わる．

（2） ある $j \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_j = \mathbb{a}_j^0 + \mathbb{a}_j^1$ のとき，

$$A_0 = [\,\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \mathbb{a}_j^0 \ \cdots \ \mathbb{a}_n\,],\quad A_1 = [\,\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \mathbb{a}_j^1 \ \cdots \ \mathbb{a}_n\,]$$

とすると，$\det(A) = \det(A_0) + \det(A_1)$ が，成り立つ．

（3） $c \in \mathbb{R}$ として，ある $j \in \overline{n}$ に対し，

$$A'' = [\,\mathbb{a}_1 \ \cdots \ c\,\mathbb{a}_j \ \cdots \ \mathbb{a}_n\,]$$

とするとき (つまり，A'' を，A の i-列を c 倍して，得られる行列，とするとき)，$\det(A'') = c\det(A)$ が，成り立つ．

証明． (1) の証明のみを，見ることにする．他は，同様である．$i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{b}_i := {}^t\mathbb{a}_i$ と書くことにすると，

$$(6.36)\quad \det(A') \underbrace{=}_{\text{定理 } 6.24} \det({}^tA') = \det\begin{bmatrix} \mathbb{b}_{\pi(1)} \\ \mathbb{b}_{\pi(2)} \\ \vdots \\ \mathbb{b}_{\pi(n)} \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\text{補題 } 6.29, (1)} -\det\begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \mathbb{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_n \end{bmatrix} = -\det({}^tA)$$

$$\underbrace{=}_{\text{定理 } 6.24} -\det(A)$$

である． □ (補題 6.30)

♦ lin-alg-2-05-2020-07-30-contents.tex

P-aa5-a

補題 6.31 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ とする．A を，n-次の正方行列として，$A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \mathbb{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ とする．各 $\mathbb{z}_i$, $i \in \overline{n}$ は，n-次の行ベクトルである．

（1） ある $i \in \overline{n}$ に対して，$\mathbb{z}_i = \mathbb{0}$ なら，$\det(A) = 0$ である．

（2） A が，2 つの等しい行を含むとき，つまり，ある $1 \leq i_0 < i_1 \leq n$ に対して，$\mathbb{z}_{i_0} = \mathbb{z}_{i_1}$ となるとき，$\det(A) = 0$ である．

（3） A' を，A のある行に，他の行の定数倍を，加えることによって得られる行列，とするとき，つまり，$A' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}'_1 \\ \mathbb{z}'_2 \\ \vdots \\ \mathbb{z}'_n \end{bmatrix}$ として，ある $i_0, i_1 \in \overline{n}$, $i_0 \neq i_1$ と，$c \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{z}'_{i_1} = \mathbb{z}_{i_1} + c\mathbb{z}_{i_0}$，また，他の，すべての $i \in \overline{n} \setminus \{i_1\}$ に対し，$\mathbb{z}'_i = \mathbb{z}_i$ となっているとき，$\det(A) = \det(A')$ である．

（4） ある $1 \leq i \leq n$ と，$c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ に対し，$\mathbb{z}_i = \sum_{k \in \overline{n} \setminus \{i\}} c_k \mathbb{z}_k$ なら，$\det(A) = 0$ である．

証明． (1):　$\mathbb{z}_i = \mathbb{0}$ とすると，$\mathbb{z}_i = \mathbb{0} = 0\mathbb{0} = 0\mathbb{z}_i$ だから，補題 6.29, (3) により，

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ 0\mathbb{z}_i \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot \det(A) = 0$$

である．

(2):　A' を，A の i_0-行と，i_1-行を，入れ替えることによって得られる行列とすると，補題 6.29, (1) により，$\det(A') = -\det(A)$ である．$\mathbb{z}_{i_0} = \mathbb{z}_{i_1}$ なら，$A' = A$ だから，$\det(A) = -\det(A)$ となり，したがって，$\det(A) = 0$ である．

(3):　i_0, i_1, c を，ここでの主張でのように取る．A'' を，A の i_1-行を，$\mathbb{z}_{i_0}$ で，置き換えて得られる行列とすると，補題 6.29, (2), (3) により，

$$\det(A') = \det(A) + c\,\det(A'')$$

となるが，上の (2) により $\det(A'') = 0$ なので，$\det(A') = \det(A)$ である．

(4):　A' を，A の i-行を，$\mathbb{0} = \mathbb{z}_i - \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} c_k\mathbb{z}_k$ で，置き換えて得られる行列とすると，上の (3) (の繰り返し適用) により，$\det(A) = \det(A')$ である．一方，A' の i-行は，$\mathbb{0}$ だから，(1) により，$\det(A') = 0$ である．したがって，$\det(A) = 0$ である．　□ (補題 6.31)

n-次の正方行列 A が，**上三角行列** (かみさんかくぎょうれつ，または，うえさんかくぎょうれつ，upper triangular matrix) であるとは，$A = [a_{i,j}]$ として，すべての，$1 \leq j < i \leq n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ となることである．

P-aa5-a-0 **補題 6.32** 正方行列 A が，上三角行列のとき，$\det(A)$ は，A の対角成分の積に等しい [*25]．

証明． A を，n-次の正方行列として，$A = [a_{i,j}]$ とする．$\det(A)$ の定義 (6.25) に留意する．$\sigma \in S_n$ が，単位置換 ε_n と異なるときには，$i \in \overline{n}$ で，$\sigma(i) < i$ となるものがあるから (演習!)，この i に対し，$a_{i,\sigma(i)} = 0$ である．したがって $\det(A)$ の定義の "$\sum_{\sigma\in S_n} \ldots$" で，$\sigma = \varepsilon_n$ の項だけが残るが，$sgn(\varepsilon_n) = 1$ で，$\varepsilon_n(i) = i$ $(1 \leq i \leq n)$ だから，$\det(A) = a_{1,1}\,a_{2,2}\cdots a_{n,n}$ である．

□ (補題 6.32)

上で，"演習!" としたものの，証明を与えておく．

補題 A 6.1 $\sigma \in S_n$ が ε_n と異るとき，$i \in \overline{n}$ で，$\sigma(i) < i$ となるものが，存在する．

証明． σ が巡回置換なら，このことは，明らかである：　$\sigma = (\ell_1, \ldots, \ell_k)$, $(k > 1)$ とする．もし，$i \in \overline{k-1}$ で，$\ell_i > \ell_{i+1}$ となるものがあれば，$\sigma(\ell_i) = \ell_{i+1} < \ell_i$ だから，ℓ_i が求めるものである．このようなものがなければ，$\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k$ となるから，$\sigma(\ell_k) = \ell_1 < \ell_k$ となり，ℓ_k が求めるようなものである．

[*25] つまり A を，n-次の正方行列で $A = [a_{i,j}]$ かつ，すべての，$1 \leq j < i \leq n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ とするとき，$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ である．

任意の置換 σ は，補題 6.6 により，サポートが互いに素な，複数の巡回置換の積として書ける．それらの巡回置換のうちの一つを，σ_0 とすると，サポートに関する条件から，σ_0 と σ は，σ_0 のサポート上で一致するから，最初に述べたことから，このサポートに含まれる i で，$\sigma(i) < i$ となるものが存在する．　□ (補題 A 6.1)

行列式の具体的な計算は，多くの場合，補題 6.29 と，上の 2 つの補題を，うまく組み合わせて使うことで，効率的に実行できる．

例 6.33 Ex-aa5-0

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{2 行目から 1 行目をひき，3 行目から 1 行目をひく (補題 6.31, (3))}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{2 行目と 4 行目の入れ替え (補題 6.29, (1))}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{4 行目に 3 行目をたす (補題 6.31, (3))}$$

$$= -(1 \times 2 \times 4 \times (-4)) = 32 \qquad \text{(補題 6.32)}$$

定理 6.24 により，補題 6.29 の補題 6.30 への翻訳でと同様に，補題 6.31 と補題 6.32 は，以下のような，行列の，列に関する命題に，翻訳することが，できる：

補題 6.34 $n > 1$ として，A を，n-次の正方行列として，$A = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2\ \cdots\ \mathbb{a}_n]$ とする． P-aa5-a-1

（1）　ある $j \in \overline{n}$ に対して，$\mathbb{a}_j = \mathbb{0}$ なら，$\det(A) = 0$ である．

（2）　A が，等しい 2 つの列を含むとき，つまり，ある $1 \leq j_0 < j_1 \leq n$ に対して，$\mathbb{a}_{j_0} = \mathbb{a}_{j_1}$ となるとき，$\det(A) = 0$ である．

（3） A' を，A のある列に，他の列の定数倍を，加えることによって得られる行列とするとき，つまり，$A' = [\mathbb{a}'_1\,\mathbb{a}'_2 \cdots \mathbb{a}'_n]$ として，ある $j_0, j_1 \in \overline{n}$, $j_0 \neq j_1$ と，$c \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}'_{j_1} = \mathbb{a}_{j_1} + c\mathbb{z}_{j_0}$，また，すべての $j \in \overline{n} \setminus \{j_1\}$ に対し，$\mathbb{a}'_j = \mathbb{a}_j$ となっているとき，$\det(A) = \det(A')$ である．

（4） ある $j \in \overline{n}$ と $c_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{n} \setminus \{j\}$ に対し，$\mathbb{a}_j = \sum_{\ell \in \overline{n}\setminus\{j\}} c_\ell \mathbb{a}_\ell$ なら，$\det(A) = 0$ である．[*26]

証明． 補題 6.30 の証明と，同様に示せる． ❏ (補題 6.34)

n-次の正方行列 A が，**下三角行列** (しもさんかくぎょうれつ，または，したさんかくぎょうれつ，lower triangular matrix) であるとは，$A = [a_{i,j}]$ として，すべての，$1 \leq i < j \leq n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ となることである．

以下の補題も，A が下三角行列なら，${}^tA$ は上三角行列であることに注意すると，補題 6.32 を，定理 6.24 により，(行と列を入れ替えて) “翻訳” することで証明できる．

P-aa5-a-2 **補題 6.35** 正方行列 A が，下三角行列のとき，$\det(A)$ は，A の対角成分の積に等しい．

証明． A が，下三角行列なら，${}^tA$ は上三角行列である．定理 6.24 により，$\det(A) = \det({}^tA)$ だが，補題 6.32 により，$\det({}^tA)$ は，${}^tA$ の対角成分の積に等しい．ここで $\det(A)$ の対角成分は，${}^tA$ の対角成分と一致することに留意すると，$\det(A)$ は，A の対角成分の積に等しいことが，結論できる． ❏ (補題 6.35)

以下で，$n > 1$ として，n-次の正方行列の行列式の計算を，$(n-1)$-次の正方行列の行列式の計算に，帰着させることを考える．このために，まず，次を示す:

P-aa5-0 **補題 6.36** $n > 1$ で $A = [a_{i,j}]$ を，n-次の正方行列として，$(n-1) \times (n-1)$-

[*26] 補題 6.34, (4) は，第 7.1 節で導入される線型独立性の概念を用いると，“$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が線型独立でないなら，$\det(A) = 0$ である”，と言い換えることができます．この言い換えは，定理 7.12 (と定理 5.23’ を合せたもの) の一部となりますが，後者の定理は，補題 6.34, (4) とは別の経路をたどって証明されているため，そこの証明では，補題 6.34, (4) は参照されていません．

行列 A_0 を,

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

と定義する (A_0 は, A から, 第 1 行と, 第 1 列を, 取り除いて得られる行列である).

(1)　すべての $j \in \overline{n} \setminus \{1\}$ に対し, $a_{1,j} = 0$ となるとき, $\det(A) = a_{1,1}\det(A_0)$ である.

(2)　すべての $i \in \overline{n} \setminus \{1\}$ に対し, $a_{i,1} = 0$ となるとき, $\det(A) = a_{1,1}\det(A_0)$ である.

証明. (1): $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma(1) \neq 1$ なら, $a_{1,\sigma(1)} = 0$ である. このことに留意すると,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) \underbrace{a_{1,\sigma(1)}}_{=a_{1,1}} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= a_{1,1}\Bigl(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \Bigr) \\
&= a_{1,1}\Bigl(\textstyle\sum_{\sigma \in S_{n-1}} sgn(\sigma) a_{1+1,\sigma(1)+1}\, a_{2+1,\sigma(2)+1} \cdots a_{n,\sigma(n-1)+1} \Bigr) \\
&= a_{1,1}\det(A_0)
\end{aligned}$$

である. 上の等式の列で, 真中の行と, 最後から 2 番目の行の同等性は,

$$h : \{\sigma \in S_n \,:\, \sigma(1) = 1\} \to S_{n-1};\quad \sigma \mapsto \sigma^-,$$

$$\text{ただし, } \sigma^- : \overline{n-1} \to \overline{n-1};\ i \mapsto \sigma(i+1) - 1$$

と定義すると, この h が (したがって, h^{-1} も), 全単射になる (演習!) ことから, 従い, 最後の 2 つの行の式の同等性は, A_0 の (i,j)-成分が, A の, $(i+1, j+1)$-成分であることから, 従う.

(2): ${}^tA$ は, (1) の条件を満たすものになっていて, その $(1,1)$-成分は, $a_{1,1}$ で, ${}^tA$ に対し, (a) での A_0 に対応するのは, ${}^t(A_0)$ である. したがって, 定理 6.24 から, $\det(A) = \det({}^tA) = a_{1,1}\det({}^t(A_0)) = a_{1,1}\det(A_0)$ である.

□ (補題 6.36)

$n > 1$ として,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$$

だから,

$$\mathbb{a}_1^1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbb{a}_1^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$$

として, $k \in \overline{n}$ に対し,

$$A_k = [\ \mathbb{a}_1^k \quad \mathbb{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbb{a}_n\ ]$$

とすると, 補題 6.30, (2) (の繰り返し適用) により,

x-aa5-a

$$\det(A) = \det(A_1) + \det(A_2) + \cdots \det(A_n) \tag{6.37}$$

である.

$k \in \overline{n}$ に対し, $\begin{bmatrix} \mathbb{z}_1^k \\ \mathbb{z}_2^k \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n^k \end{bmatrix} := A_k$ とする. つまり,

$$\mathbb{z}_i^k = \begin{cases} [0, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}], & i \neq k \text{ のとき}; \\ [a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}], & i = k \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

$\sigma_k \in S_n$ を, $\sigma_k := (1 \ \ k \ \ k-1 \ \ k-2 \cdots \ 2) = (k \ \ k-1 \ \cdots \ 2 \ \ 1)$ とすると, 補題 6.11 により,

x-aa5-0

$$sgn(\sigma_k) = (-1)^{k+1} \tag{6.38}$$

であることに注意する.

$$A'_k = \begin{bmatrix} \mathbb{z}^k_{\sigma_k(1)} \\ \mathbb{z}^k_{\sigma_k(2)} \\ \vdots \\ \mathbb{z}^k_{\sigma_k(n)} \end{bmatrix} \text{ とする．つまり，} A'_k = \begin{bmatrix} \mathbb{z}^k_k \\ \mathbb{z}^k_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}^k_{k-1} \\ \mathbb{z}^k_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbb{z}^k_n \end{bmatrix} \text{ である．}$$

A'_k は，補題6.36, (2) での A のような形の，行列になっていることに，注意する．この補題での，A に対する A_0 に，対応するのは，A'_k から 1-行目と，1-列目を除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$-行列，または，これと同じものになる，A から k-行目と 1-列目を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列である．この行列を，$A_{k,1}$ と呼ぶことにする．A'_k の $(1,1)$-成分は $a_{k,1}$ だから，補題6.36, (2) により，$\det(A'_k) = a_{k,1}\det(A_{k,1})$ である．一方，補題6.29, (1) と，(6.38) により，$\det(A_k) = (-1)^{k+1}\det(A'_k)$ である．したがって，$\det(A_k) = (-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})$ となることが，分かる．このことと，(6.37) から，

$$\begin{aligned}(6.39)\quad \det(A) &= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{2,1}\det(A_{2,1}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}\det(A_{n,1}) \\ &= \sum_{k\in\overline{n}}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})\end{aligned}$$

x-aa5-1

が，得られる．

次に，$\ell\in\overline{n}$ として，$\tau_\ell\in S_n$ を，$\tau_\ell := (\ell\ \ \ell-1\ \ \cdots\ \ 2\ \ 1)$ とする．

$$(6.40)\quad A'' = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_{\tau_\ell(1)} & \mathbb{a}_{\tau_\ell(2)} & \cdots & \mathbb{a}_{\tau_\ell(n)} \end{bmatrix}$$

x-aa5-2

とすると，補題6.30, (1) と補題6.11 により，$\det(A) = (-1)^{\ell+1}\det(A'')$ である．A'' の第 1 列は，$\mathbb{a}_\ell$ で，A'' から，k-行と 1-列を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列は，A から，k-行と ℓ-列を取り除くことで得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列に等しい．この行列を，$A_{k,\ell}$ と 書くことにすると，任意の $\ell\in\overline{n}$ に対し，等式

$$\begin{aligned}(6.41)\quad \det(A) &= (-1)^{\ell+1}\det(A'') \\ &\underbrace{=}_{(6.39)\text{ による}} (-1)^{\ell+1}\Big(a_{1,\ell}\det(A_{1,\ell}) - a_{2,\ell}\det(A_{2,\ell}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,\ell}\det(A_{n,\ell})\Big) \\ &= \sum_{k\in\overline{n}}(-1)^{k+1}(-1)^{\ell+1}a_{k,\ell}\det(A_{k,\ell}) = \sum_{k\in\overline{n}}(-1)^{k+\ell}a_{k,\ell}\det(A_{k,\ell})\end{aligned}$$

x-aa5-3

が得られる ($\ell = 1$ のときには，この等式は，(6.39) と，等しいことに注意する).

この式を，(行列式 $\det(A)$ の ℓ-列に関する) **ラプラス展開** (または，**余因子展開**) (Laplace expansion, co-factor expansion) とよぶ [*27].

定理 6.24 により，行列式の計算は，行と列の役割を入れ替えても成り立つので，(6.41) と，このことから，任意の $k \in \overline{n}$ に対し，等式

◆ 定理 4.1 定理 6.24

x-aa5-4

$$\begin{aligned}(6.42)\quad \det(A) &= \sum_{\ell \in \overline{n}} (-1)^{k+1}(-1)^{\ell+1} a_{k,\ell} \det(A_{k,\ell}) \\ &= \sum_{\ell \in \overline{n}} (-1)^{k+\ell} a_{k,\ell} \det(A_{k,\ell})\end{aligned}$$

が成り立つことが，分かる．この式を，(行列式 $\det(A)$ の k-行に関する) **ラプラス展開** (または，**余因子展開**) (Laplace expansion, co-factor expansion) とよぶ．

以上を，定理の形に纏めておく:　上でと同様に，$n > 2$ として，n-次の正方行列 A $k, \ell \in \overline{n}$ に対し，$A_{k,\ell}$ で，A から，k-行目と ℓ-列目を除いて得られる，$n-1$-次の正方行列を，表わす．

P-6-2 **定理 6.37** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ として，A を，n-次の正方行列とする．このとき，

(行列の列に関するラプラス展開)　任意の $\ell \in \overline{n}$ に対し，等式

$$(6.41)\quad \det(A) = \sum_{k \in \overline{n}} (-1)^{k+\ell} a_{k,\ell} \det(A_{k,\ell})$$

が成り立つ．

(行列の行に関するラプラス展開)　任意の 任意の $k \in \overline{n}$ に対し，等式

---

*27 ラプラス (Pierre-Simon Laplace, 1749 (寛延 2 年) — 1827 (文政 10 年) は，フランスの数学者，物理学者です．ラプラスは，(古典物理学の範疇で議論して)，宇宙のすべての物質の状態のパラメタを知っている知性があったとすれば，この知性は宇宙の過去と未来の状態を，すべて計算することができて，この知性にとって，不定性は，全く存在しないものとなる (はずである)，というような考え方を表明していますが，この考え方は，後に「ラプラスの悪魔」(Laplace's demon) と呼ばれるようになるものです．量子物理学的考察から，ラプラスの悪魔の存在は，現代物理学とは相容れないものですが，そうだとしても，この考え方，ないし思考実験は，物理学や，物理学の哲学で，非常に重要なものです．なお，量子物理学については，本書の第 III 巻も参照してください．

(6.42) $$\det(A) = \sum_{\ell \in \overline{n}} (-1)^{k+\ell} a_{k,\ell} \det(A_{k,\ell})$$

が成り立つ． ❑

例 6.38

行列 $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ の行列式に (6.41) の $\ell = 2$ での場合を適用すると，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2} \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ -4 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{4+2} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

である． ❑

A, B, C, D をそれぞれ $m \times m$-行列，$m \times n$-行列，$n \times m$-行列 $m \times m$-行列とするとき，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

で，これらの行列を，このように組み合わせて得られる $(m+n) \times (m+n)$-行列を，表わすことにする．特に $m = n$ のときには，A, B, C, D は，すべて n-次の正方行列で，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ は，$2n$-次の正方行列となる．

補題 6.39 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & Z_1 \\ Z_2 & B \end{bmatrix}$ とする．ここに，ある $m, n \geq 1$ に対し，A は，P-aa6-0
$m \times m$-行列，B は，n-次の正方行列，Z_1 は，$m \times n$-行列，Z_2 は，$n \times m$-

行列で，Z_1 と，Z_2 のうち，少なくとも片方は，ゼロ行列とする．このとき，$\det(\tilde{A}) = \det(A)\cdot\det(B)$ が成り立つ．

証明． Z_2 が，ゼロ行列の場合を，考える (Z_1 が，ゼロ行列の場合も，同様に証明できる)．$\tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]$, $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ とする．$\sigma \in S_{m+n}$ が $\sigma''\overline{m} \neq \overline{m}$ となっているときには，$i \in \overline{m+n}\setminus\overline{m}$ で $\sigma(i) \in \overline{m}$ となるものがあるが，この i に対し，$\tilde{a}_{i,\sigma(i)}$ は，Z_2 の成分となるから，$\tilde{a}_{i,\sigma(i)} = 0$ である．したがって，このような σ に対しては，$\tilde{a}_{1,\sigma(1)}\cdot\tilde{a}_{2,\sigma(2)}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{m+n,\sigma(m+n)} = 0$ である．$\sigma''\overline{m} = \overline{m}$ のときには，$\sigma''(\overline{m+n}\setminus\overline{m}) = \overline{m+n}\setminus\overline{m}$ となることに注意する．

このことから，

x-aa6-0
$$
\begin{aligned}
(6.43)\quad \det(\tilde{A}) &= \sum_{\substack{\sigma\in S_{m+n}\\ \sigma''\overline{m}=\overline{m}}} sgn(\sigma)\tilde{a}_{1,\sigma(1)}\cdot\tilde{a}_{2,\sigma(2)}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{m+n,\sigma(m+n)}\\
&\underbrace{=}_{(*)} \sum_{\tau\in S_m,\,\mu\in S_n} sgn(\tau\dotplus\mu)\tilde{a}_{1,(\tau\dotplus\mu)(1)}\cdot\tilde{a}_{2,(\tau\dotplus\mu)(2)}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{m+n,(\tau\dotplus\mu)(m+n)}\\
&\underbrace{=}_{(**)} \sum_{\tau\in S_m,\,\mu\in S_n} sgn(\tau)sgn(\mu)a_{1,\tau(1)}\cdot a_{2,\tau(2)}\cdot\cdots\cdot a_{m,\tau(m)}\\
&\qquad\qquad\cdot b_{1,\mu(1)}\cdot\cdots\cdot b_{n,\mu(n)}\\
&= \Big(\sum_{\tau\in S_m} sgn(\tau)a_{1,\tau(1)}\cdot a_{2,\tau(2)}\cdot\cdots\cdot a_{m,\tau(m)}\Big)\\
&\underbrace{}_{\text{補題 2.23, (4) による}}\cdot\Big(\sum_{\mu\in S_n} sgn(\mu)b_{1,\mu(1)}\cdot b_{2,\mu(2)}\cdot\cdots\cdot b_{n,\mu(n)}\Big) \;=\; \det(A)\cdot\det(B)
\end{aligned}
$$

である．ここに，$\tau\in S_m$, $\mu\in S_n$ に対し，$\tau\dotplus\mu : \overline{m+n}\to\overline{m+n}$ を，$k\in\overline{m+n}$ に対し，

x-aa6-1
$$
(6.44)\quad (\tau\dotplus\mu)(k) = \begin{cases} \tau(k), & 1\leq k\leq m \text{ のとき;}\\ \mu(k-m)+m, & m<k\leq m+n \text{ のとき} \end{cases}
$$

となるもの，として定義する [*28]．この定義から，$\tau\dotplus\mu\in S_{m+n}$ で，$(\tau\dotplus\mu)''m =$

*28 "$\dotplus$" という記号は，ここで便宜上定めたもので，この意味で広く用いられているものでは，

$\overline{m}$ である．逆に，$\sigma \in S_{m+n}$ が，$\sigma''\overline{m} = \overline{m}$ を満たすとき，$\tau = \sigma \restriction \overline{m}$ として，$\mu : \overline{n} \to \overline{n}$ を $k \in \overline{n}$ に対し，

$$(6.45)\quad \mu(k) = \sigma(m+k) - m$$

となるもの，として定義すると，$\tau \in S_m$, $\mu \in S_n$ で，$\sigma = \tau \dot{+} \mu$ が成り立つ．

したがって，$\dot{+} : S_m \times S_n \to \{\sigma \in S_{m+n} : \sigma''\overline{m} = \overline{m}\}$; $\langle \tau, \mu \rangle \mapsto \tau \dot{+} \mu$ は，全単射である．

(6.43) の $(*)$ は，このことから従う．

$\dot{+}$ の定義から，任意の $\tau \in S_m$, $\mu \in S_n$ に対し，$sgn(\tau \dot{+} \mu) = sgn(\tau) sgn(\mu)$ となる．$(**)$ は，このことから従う． □ (補題 6.39)

定理 6.40 （1） A と，B を，n-次の正方行列とするとき，$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ が，成り立つ． P-aa6-1

（2） A を，可逆な n-次の正方行列とするとき，$\det(A) \neq 0$ で，$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ である．

証明． (1): $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & O_n \\ -E_n & B \end{bmatrix}$ とする．ここに，E_n は，n-次の単位行列で，O_n は，$n \times n$-サイズのゼロ行列である．補題 6.39 により，

$$(6.46)\quad \det(\tilde{A}) = \det(A)\det(B)$$ x-aa6-2

である．

$A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ とする．各 $k \in \overline{n}$ に対し，$\tilde{A}$ の $n+k$-列に，すべての $\ell \in \overline{n}$ に対する，$\tilde{A}$ の ℓ-列の $b_{\ell,k}$ 倍を，足して得られる列ベクトルを，$\tilde{a}'_{n+k}$ とすると，

ありません．

$$(6.47)\quad \tilde{a}'_{n+k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{1,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{1,\ell}b_{\ell,k} \\ \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{2,\ell}b_{\ell,k} \\ \vdots \\ \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{n,\ell}b_{\ell,k} \\ -(\sum_{\ell\in\overline{n}} \delta_{1,\ell}b_{\ell,k}) \\ \vdots \\ -(\sum_{\ell\in\overline{n}} \delta_{n,\ell}b_{\ell,k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{1,\ell}b_{\ell,k} \\ \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{2,\ell}b_{\ell,k} \\ \vdots \\ \sum_{\ell\in\overline{n}} a_{n,\ell}b_{\ell,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる [*29]．したがって，すべての $k \in \overline{n}$ に対し， $\tilde{A}$ の $n+k$-列目を，$\tilde{a}'_{n+k}$ で，置き換えて得られる行列を，$\tilde{A}'$ とすると，

$$(6.48)\quad \tilde{A}' = \begin{bmatrix} A & AB \\ -E_n & O_n \end{bmatrix}$$

である．補題 6.34, (3) により，$\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}')$ である．ここで，各 $i \in \overline{n}$ に対し，$\tilde{A}'$ の i 行目と，$n+i$ 行目とを，入れ替えて得られる行列を，$\tilde{A}''$ とすると [*30]，

x-aa6-2-a

$$(6.49)\quad \tilde{A}'' = \begin{bmatrix} -E_n & O_n \\ A & AB \end{bmatrix}$$

となる．補題 6.29, (1) により，

x-aa6-2-0

$$(6.50)\quad \det(\tilde{A})\ (= \det(\tilde{A}')) = (-1)^n \det(\tilde{A}'')$$

である．

したがって，

$$\begin{aligned} \det(A)\det(B) &\underbrace{=}_{(6.46)\text{ による}} \det(\tilde{A}) \overbrace{=}^{(6.50)\text{ による}} (-1)^n \det(\tilde{A}'') \\ &\underbrace{=}_{(6.49)\text{ と補題 }6.39\text{ による}} (-1)^n \det(-E)\det(AB) \\ &\underbrace{=}_{\text{演習問題 }6.16,\ (2)\text{ による}} (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB). \end{aligned}$$

[*29] この式での $\delta_{k,\ell}$ はクローネカのデルタです ((1.1) を参照)．$E_n = [\delta_{k,\ell}]$ に注意します．

[*30] この入れ替えは，S_{m+n} での互換 $(i\ n+i)$ に，対応することに注意します．

である．

(2):　$1 \underbrace{=}_{\text{演習問題 6.16, (1) による}} \det(E_n) = \det(A^{-1}A) \underbrace{=}_{\text{(1) による}} \det(A^{-1})\det(A)$ により，よい．

□ (定理 6.40)

上の定理 6.40 を用いると，2×2-行列や，3×3-行列の，行列式の，幾何学的な意味を，明らかにすることが，できる．

任意の角度 θ に対し，平面上の，角度 θ の，原点を中心とする回転は，回転行列

$$(6.51)\quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ x-aa6-3

を，ベクトルに右から掛けることで，実現できるのだった．

補題 6.41 すべての θ に対し，$\det(R_\theta) = 1$ である． P-aa6-1-0

証明． 例 6.12 (2) により，$\det(R_\theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta - (-\sin\theta \cdot \sin\theta)$
$= \cos^2\theta + \sin^2\theta \underbrace{=}_{\text{(A-10) を参照}} 1$ である．

□ (補題 6.41)

系 6.42 2-次の正方行列 $A = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2]$ と，任意の角度 θ に対し，$\det(A) = \det([R_\theta\mathbb{a}_1\ R_\theta\mathbb{a}_2])$ である．つまり，2-次の正方行列の行列式の値は，原点を中心とする回転に関して，不変である． P-aa6-1-1

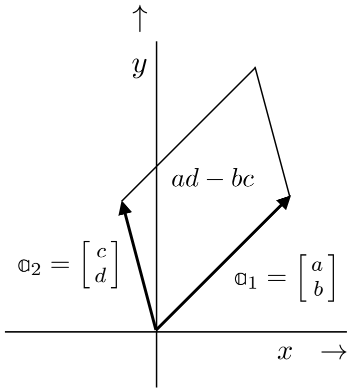
証明． $\det([R_\theta\mathbb{a}_1\ \ R_\theta\mathbb{a}_2]) = \det(R_\theta A) \underbrace{=}_{\text{定理 6.40, (1) による}} \overbrace{\det(R_\theta)}^{=1,\ \text{補題 6.41 による}} \cdot \det(A) = \det(A).$

□ (系 6.42)

定理 6.43 A を 2-次の正方行列として，$A = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2]$ とする．このとき，$\det(A)$ の絶対値は，平面ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$ を 2 辺とする，平行四辺形の面積と一致する． また，$\det(A) > 0$ となるのは，$\mathbb{a}_2$ が平面 $\mathbb{R}^2$ 上，内角 ($< \pi$ となる角) を挟んで，$\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にある，ちょうどそのときである [*31]． P-aa6-2

---

*31 第 4 章の脚注*44 の前後でも注意したように，左右は，数学での概念ではないので，ここでの，“$\mathbb{a}_2$ が内角を挟んで $\mathbb{a}_1$ の左回りの方向にある” という $\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_1$ の位置関係は，厳密には，象限の言葉を介して，例えば，以下のように定義すべきものです: 2-次の回転行列 left-right-2

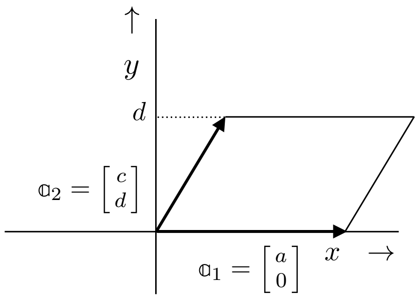


♦ figur6-02.pdf

証明． $\mathbb{a}_1=\mathbb{0}$ なら，(例 6.12, (2), または，補題 6.34, (1) により) $\det(A)=0$ となるが，このときは，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形は一直線 (あるいは，原点 1 点) につぶれたものになり，面積は 0 となるので主張は成り立つ．

$\mathbb{a}_1\neq\mathbb{0}$ とする．$\mathbb{a}_2=\mathbb{0}$ の場合，または，$\mathbb{a}_2$ が，$\mathbb{a}_1$ のスカラー倍の場合にも，(例 6.12, (2)，または，補題 6.34, (1)，(4) により) $\det(A)=0$ となり，平行四辺形はつぶれたものになるので，この場合にも主張は成り立っている．

$\mathbb{a}_2\neq\mathbb{0}$ で，$\mathbb{a}_2$ は，$\mathbb{a}_1$ のスカラー倍でもないとする．系 6.42 と，多角形の面積は，回転により不変である (系 4.48) ことから，必要なら原点を中心とする回転を施すことで，$\mathbb{a}_1$ は，x-軸上，$+$ 方向のベクトルとしてよい，



つまり，ある $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ に対し，$\mathbb{a}_1=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ となっているとしてよい．

♦ figur6-03.pdf

R を，ある $r\in\mathbb{R}$, $r>0$ に対し，$R\mathbb{a}_1=r\mathbb{e}_1^2$ となるようなものとするとき，$R\mathbb{a}_2$ の第 2 成分 (y-成分) が正になる (つまり，$R\mathbb{a}_2$ は，第 1 象限，または，第 2 象限にある)．この定義が，“$\mathbb{a}_2$ が，内角を挟んで $\mathbb{a}_1$ の左回りの方向にある” という直観と一致するかどうかは，x 軸を，右方向が正になるように描き，y 軸を，上方向が正になるように描く，という，数学の外側の，物理的な世界での，我々の慣例に依存する事柄になります．

$\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ とする．$\mathbb{a}_2$ が，xy-平面上内角を挟んで，$\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にあるときには，$d > 0$ で，d は，$\mathbb{a}_1$ (x 軸の $+$ 方向のベクトル) を，底辺としたときの，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の高さになっている．ここで，(例 6.12, (2) または，補題 6.32 により) $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad$ だから，$\det(A)$ は，この平行四辺形の面積に一致することが，分かる．

$\mathbb{a}_2$ が，xy-平面上，内角を挟んで，$\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にないときには，$d < 0$ となるから，同様の議論で，$\det(A) = ad < 0$ で $|ad|$ は，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積と等しくなる．　❑ (定理 6.43)

3-次の正方行列の行列式についても，同様の議論で，次が示せる:

定理 6.44 A を，$\mathbb{R}$ 上の 3-次の正方行列として，$A = [\mathbb{a}_1\,\mathbb{a}_2\,\mathbb{a}_3]$ とする．このとき，$\det(A)$ の絶対値は，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ を 3 辺とする，平行 6 面体の，体積に等しい．$\det(A)$ が，正の値を取るのは，ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ が，右手系をなす，ちょうどそのときである．　P-aa6-3

証明． 定理 6.43 の証明でと同様に，$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ のどちらかが，ゼロベクトルであるか，これらの片方がもう一方の定数倍であるときには，$\det(A) = 0$ で，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ のはる平行四辺形はつぶれたものとなり，その体積も 0 である．そうでない場合には，$\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転変換で，$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ を，x-軸の $+$ 方向のベクトルと，xy-平面上の x-軸から左回りの方向に内角を持つベクトルに移すことが，できる．系 4.48 と同様に，このような回転変換で，多角体の体積が不変であることが示せるので，一般性を失なうことなく，a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$, $a, c > 0$, で，$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{a}_3 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ となるものが，取れる，としてよい．

補題 6.32 により，$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = acf$ である [*32]．$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ が右手系をなすときには，$f > 0$ だから [*33]，$det(A) = acf > 0$ ，で，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$,

---

*32 もちろん，3×3-行列では，これは，(6.28) で直接確かめることもできますし，数学力のある読者は，(6.28) の考察から，補題 6.32 を，思いつくこともあるでしょう．

*33 平面上の 2 つのベクトルの位置関係の定義でと同様に，ここでも，むしろ，原点を中心とする回転で，$\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$ を，ここでのような位置関係に移動したときに，$f > 0$ となる，とい

$\mathbb{a}_3$ を 3 辺とする，平行 6 面体の，体積は，acf である．$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ が左手系をなすときには，$f < 0$ だから，$det(A) = acf < 0$ で，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積は，$-acf = |\,acf\,|$ である．　□ (定理 6.44)

P-6-2-a **補題 6.45** $\mathbb{R}$ 上の n-次の正方行列 A が，直交行列なら，$\det(A) = 1$ または，$\det(A) = -1$ である．

証明． 直交行列の定義から，

x-6-3-2 (6.52) ${}^tA\,A = E_n$

である．したがって，

$$(\det(A))^2 \underbrace{=}_{\text{定理 6.24 による}} \det({}^tA)\det(A) \overbrace{=}^{\text{定理 6.40, (1) による}} \det({}^tA\,A) \underbrace{=}_{\text{(6.52) による}} \det(E_n) \overbrace{=}^{\text{演習問題 6.16, (1)}} 1$$

である．したがって，$\det(A) = 1$ または，$\det(A) = -1$ である．　□ (補題 6.45)

6.3　余因子行列とクラメールの公式

kramer 　定理 6.37 での記法を思い出すと，自然数 m, $n > 1$ と，$m \times n$-行列 A に対し，$k \in \overline{m}$, $\ell \in \overline{n}$ として，$A_{k,\ell}$ で，行列 A から，k-行と，ℓ-列を，取り除くことで得られる $(m-1) \times (n-1)$-行列を，表わすのだった．つまり，$A = [a_{i,j}]_{\substack{i \in \overline{m} \\ j \in \overline{n}}}$, $A_{k,\ell} = [a'_{i,j}]_{\substack{i \in \overline{m-1} \\ j \in \overline{n-1}}}$ とすると，

$$a'_{i,j} = a_{i^\dagger, j^\dagger}$$

である．ただし，ここで，$i \in \overline{m-1}$ と $j \in \overline{n-1}$ に対し，

$$i^\dagger = \begin{cases} i, & i < k \text{ のとき}; \\ i+1, & k \leq i \text{ のとき}, \end{cases} \qquad j^\dagger = \begin{cases} j, & j < \ell \text{ のとき}; \\ j+1, & \ell \leq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．

　$A = [a_{i,j}]$ を，n-次の正方行列とするとき，各 $i, j \in \overline{n}$ に対し，

う性質で，"$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ が右手系をなす"，という概念が定義されている，とするべきでしょう．

(6.53)　$a^*_{i,j} := (-1)^{i+j}\det(A_{j,i})$ x-aa7-0

とする．$a^*_{i,j}$, i, $j \in \overline{n}$ を並べて得られる，n-次の正方行列を，$\tilde{A}$ で，表わし，A **の余因子行列** (co-factor matrix) とよぶ [*34]．$\tilde{A} = [a^*_{i,j}]$ である．余因子行列の意義は，次の定理から理解できる．

定理 6.46 任意の n-次の正方行列 A に対し，$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E_n$ である． P-aa7-0

証明．

(6.54)　$A\tilde{A} = \det(A)E_n$ x-aa7-1

を示す．$\tilde{A}A = \det(A)E_n$ も，以下の証明で用いられる (6.42) の代りに，(6.41) を用いることで，同様に示すことが，できる．

$A\tilde{A} = [c_{i,j}]$ とすると，

(6.55) x-aa7-2
$$\begin{aligned} c_{i,i} &\underbrace{=}_{\text{行列の積の定義}} \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} a_{i,\ell}a^*_{\ell,i} \\ &\underbrace{=}_{a^*_{\ell,i}\text{ の定義 (6.53)}} \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} a_{i,\ell}(-1)^{\ell+i}\det(A_{i,\ell}) = \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}}(-1)^{i+\ell}a_{i,\ell}\det(A_{i,\ell}) \\ &\underbrace{=}_{\text{(6.42) による}} \det(A) \end{aligned}$$

次に，$i \neq j$ とする．A の j-行の成分を，A の i-行の成分で，置き換えて得られる行列を，B とすると，B は，等しい 2 つの行を持つから，補題 6.31, (2) により，

(6.56)　$\det(B) = 0$ x-aa7-2-0

[*34] $\tilde{A}$ は，A tilde (ティルデ) と読みますが，日本語では「A チルデ」と言うことが多いようです．「ティ」「ディ」という音は，昔の日本人は発音できなくて「チ」「ジ」で代用することが多かったようです．ビルジングは，今ではビルディングと呼ばれることが多いのですが，スチール，チーム，チケット，ロマンチックなど，「ティ」の「チ」での代用も，まだ沢山残っています．一方，アーティスト，ミルクティーなど，本来の音に近い transcription がなされている単語もある，というのは面白い現象です．これは，後者の片仮名日本語が導入されたのが，比較的最近であることを，示唆しているのかもしれません．

なお，線型代数の教科書によっては，$a^*_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{j,i})$ として，$\tilde{A}$ を ${}^t[a^*_{i,j}]$ として定義する，という書き方になっているものもあると思いますが，ここでは，[43] に習った記法を採用しています．

である．したがって，$B = [b_{i,j}]$ とすると，

x-aa7-3

$$
\begin{aligned}
(6.57)\quad c_{i,j} &\underbrace{=}_{\text{行列の積の定義による}} \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} a_{i,\ell}a^*_{\ell,j} \\
&\underbrace{=}_{a^*_{\ell,j}\ \text{の定義 (6.53) による}} \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} a_{i,\ell}(-1)^{\ell+j}\det(A_{j,\ell}) \\
&\underbrace{=}_{B\ \text{の定義による}} \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} b_{j,\ell}(-1)^{\ell+j}\det(B_{j,\ell}) \ = \ \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}}(-1)^{j+\ell}b_{j,\ell}\det(B_{j,\ell}) \\
&\underbrace{=}_{\text{(6.42) による}} \det(B) \ \overbrace{=}^{\text{(6.56) による}} \ 0
\end{aligned}
$$

である．以上で，(6.54) が示せた．　□ (定理 6.46)

上の定理 6.46 を用いると，正方行列が，可逆であることの，行列式による特徴付けが，得られる．

P-aa7-1 **系 6.47** A を，正方行列とするとき，A が，可逆であるのは，$\det(A) \neq 0$ となる，ちょうどそのときである． また，A が，可逆であるときには，

x-aa7-4

$$(6.58)\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

である[*35]．

証明． A, が可逆なら，$\det(A) \neq 0$ となることは，定理 6.40, (2) により，よい．

逆に，$\det(A) \neq 0$ なら，$B = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ とすると，定理 6.46 により，$AB = BA = E$ となるから，B は，A の逆行列である．特に，等式 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$

*35 (6.58) の等式は，1-次の正方行列に対しては，$\tilde{A}$ の定義がないため，未定義なものとなっていますが，任意の，1-次の正方行列 A に対し，$\tilde{A} = E_1 = [1]$ と，定義すると（この定義は，A が 2-次以上の正方行列であるときの，$\tilde{A}$ の定義の命題の，無内容的真理による解釈で拡張により，得られるものになっていることに，注意します），(6.58) は，1-次の正方行列に対しても，成り立つ等式となります．

(6.58) は，A^{-1} の具体的な計算法を与えるものになっているように見えます．実際，以下の，例 6.48 や，演習問題 6.49 での，2-次や，3-次の正方行列の逆行列の公式は，(6.58) により得られていますが，一般には，次数が上がったときには，これは，実用的な計算法を与えるものでは，全くありません．このことについては，補題 D.4 の前後に書いたことも，参照してください．

が成り立つ. □ (系 6.47)

定理 4.35 で与えた，2-次の正方行列の逆行列の公式は，系 6.47 の特別な場合として，捉えることが，できるようになる:

例 6.48 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．このとき $\det(A) = ad - bc$ だった (例 6.12, (2) を参照)． 1×1-行列の行列式は，その行列の (唯一の) 成分自身であること (演習問題 6.12, (1)) に留意すると，A が，可逆なのは，$ad - bc \neq 0$ のときで，このときには，(6.58) により，$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ となることが，分かる. □ Ex-6-1

演習問題 6.49 $A = [a_{i,j}]$ を，可逆な 3-次の正方行列とするとき，系 6.47 の，(6.58) の特別な場合としての，A の逆行列を与える公式を求めよ. □ Exerc-6-0

定理 6.46 を用いると，補題 4.49 の証明で保留になっていた，次の定理 6.50 の証明ができる．定理 6.50 は，補題 4.50 を改良するものにもなっていることに注意する．まず，次を確認しておく．

定理 6.50 A を，n-次の正方行列として，B を，n-次の正方行列で，$AB = E_n$，または，$BA = E_n$ の，少なくとも片方を満たすもの，とする．このとき，$B = A^{-1}$ である. P-aa7-3

証明. 補題 4.50 により，A が，可逆であることが，示せればよい．例えば，$AB = E_n$ が成り立つとすると，$\det(A)\det(B) \underbrace{=}_{\text{定理 6.40, (1) による}} \det(AB) = \det(E_n) = 1$ だから，$\det(A) \neq 0$ である．したがって，系 6.47 により，A は，可逆である.

□ (定理 6.50)

系 6.47 と，定理 6.50 により，定理 5.23 が，以下のように拡張される.

定理 5.23' (定理 5.23 の拡張). A を，n-次の正方行列とするとき，以下の (a) ∼(j) は，互いに同値である: P-5-3'

(a) $rank(A) = n$ である.

(b) E_n は，A の簡約化である.

(c) 任意の $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，ちょうど 1 つの解を持つ.

(d)　$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ は，自明でない解を持たない．

(e)　A は，可逆である．

(f)　A は，複数の基本行列の積として表わせる．

(g)　${}^tA$ は，可逆である．

(h)　$\det(A) \neq 0$ である．

(i)　n-次の正方行列 B で，$AB = E_n$ となるものが，存在する．

(j)　n-次の正方行列 C で，$CA = E_n$ となるものが，存在する．　❏

定理 6.50 により，定理 4.47 も，次のように拡張できる:

P-6-2-0 **定理 6.51** (定理 4.47 の拡張) A を $\mathbb{R}$ 上の n-次の正方行列とする．このとき，以下の (a) は，定理 4.47 の (b)〜(e) に加えて，次の (f) とも同値である:

(a) A は，直交行列である．

(f) A は，可逆で，$A^{-1} = {}^tA$ が成り立つ．

証明． A が，直交行列なら，定義から，${}^tAA = E_n$ だから，定理 6.50 により，A は，可逆で，$A^{-1} = {}^tA$ となる．逆に，A が，$A^{-1} = {}^tA$ を満たせば，A が直交行列であることは，定義から明らかである．　❏ (定理 6.51)

次は，補題 5.22 の拡張になっている．

P-6-3 **系 6.52** n-次の正方行列 B が，可逆でなければ，任意の n-次の正方行列 C に対し，BC も，CB も，可逆でない．

証明． B が可逆でないとすると，定理 5.23' により，$\det(B) = 0$ である．したがって，定理 6.40, (1) により，$\det(BC) = \det(B)\det(C) = 0$, $\det(CB) = \det(C)\det(B) = 0$ だから，再び，定理 5.23' により，BC も，CB も，可逆でない．　❏ (系 6.52)

A を，可逆な n-次の正方行列として，$\mathbb{b}$ を n-次元列ベクトルとする．$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ として，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ を考える．このときには，

(6.59)　$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbb{x} = A^{-1}A\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$

だから，$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$ が，この連立方程式の唯一の解である．次のクラメールの公式として知られる (6.60) は，このような解の，行列式を用いた表現を与えるものになっている [*36].

定理 6.53 (クラメールの公式)　$A = [\,\mathbb{a}_1 \ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]$ を，可逆な n-次元の正方行列として，$\mathbb{b}$ を，n-次元の列ベクトルとする．$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を，変数を成分とするベクトルとして，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ を考える．$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は，唯一の解 $\mathbb{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ を持ち，この解の成分は，$i \in \overline{n}$ に対して， P-aa7-4

$$(6.60)\quad s_i = \frac{\det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\ \text{列目}}{\mathbb{b}} \cdots \mathbb{a}_n\,]}{\det(A)}$$ x-aa7-5

と書ける．

証明． A が，可逆なら，系 6.47 により，$\det(A) \neq 0$ だから，(6.60) は，意味をなす式となる．また，定理 5.23 により，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は唯一の解を持つ．$\mathbb{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ を，この解とすると，行列とベクトルの和と積の定義から，$\mathbb{b} = A\mathbb{s} = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]\,\mathbb{s} = s_1\mathbb{a}_1 + \cdots + s_n\mathbb{a}_n$ である．したがって，

$$(6.61)\quad \det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\ \text{列目}}{\mathbb{b}} \cdots \mathbb{a}_n\,] = \det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overbrace{s_1\mathbb{a}_1 + \cdots + s_n\mathbb{a}_n}^{i\ \text{列目}} \cdots \mathbb{a}_n\,]$$
$$\underbrace{=}_{\text{補題 6.30, (2),(3) による}} s_1 \underbrace{\det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\ \text{列目}}{\mathbb{a}_1} \cdots \mathbb{a}_n\,]}_{=0:\ \text{補題 6.34, (2) による}} + \cdots + s_i \underbrace{\det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\ \text{列目}}{\mathbb{a}_i} \cdots \mathbb{a}_n\,]}_{=\det(A)} + \cdots$$

[*36] クラメール (Gabriel Cramer, 1704(宝永 1 年)〜1752(宝暦 2 年)) は，1750 年 (寛延 3 年) に，このクラメールの公式を，(6.60) での一般的な形の公式に対応するものとして，発表しています．この定式化に必要となる，行列式の明確な定義も，クラメールによるもの，と考えられています．関孝和 (??〜1708(宝永 5 年) を含め，前後の時期に，同様な公式や，同様の行列式の定義 (の特別な場合) を独立に発見した数学者が何人かいたのですが，それにもかかわらず，なぜクラメールの公式が，クラメールの公式と呼ばれるべきなのか，ということについては，映画『クレイマー，クレイマー』のタイトルをもじったような題のついている [34] に，明快な説明があります．

$$
\begin{aligned}
&+s_n \underbrace{\det[\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{a}_n} \ \cdots \ \mathbb{a}_n]}_{=0:\ \text{補題 6.34, (2) による}} \\
&= s_i \det(A)
\end{aligned}
$$

である．この等式の両端辺を，$\det(A)$ で割ると，(6.60) が得られる．

□ (定理 6.53)

6.4　行列式の代数的な特徴付け

ここまでで，行列式が，非常に有用な道具であることは，確認できたと思うが，そうだとしても，行列式の定義 (6.25) は，いかにも強引に行なわれた，という印象を与える．実は，行列式の定義 (6.25) には，これと同値な，もっと「線型代数」の文脈に馴染む，その意義の説明ともなっているような，代数的な特徴付けが存在する．本節では，このことについて考察する (以下の定理 6.56 を参照)．まず，この特徴付けの記述に必要となる，幾つかの概念の，導入から，始める．

◆ Scan_2021-03-19-1.56-chap6 - annotated

K を，$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ などの体として，$m, n \in \mathbb{N}$ とする．$\varphi : (K^m)^n \to K$ が，(K 上の) **交代的多重線型写像** (alternating multi-linear map) であるとは，以下の (6.62), (6.63), (6.64) が成り立つこと，とする．

x-6-4

(6.62) すべての，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n \in K^m$, $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \le i < j \le n$ に対し，

$$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_j, \ldots, \mathbb{a}_n) = -\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_j, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n)$$

である．ただし，ここで，“$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_j, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n)$” と書いたのは，もとの “$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_j, \ldots, \mathbb{a}_n)$” での，パラメタのリストで，$\mathbb{a}_i$ と，$\mathbb{a}_j$ (だけ) を，入れ替えて得られた表現のことである．

x-6-5

(6.63) すべての $\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n \in K^m$ と，$i \in \overline{n}$ と，$c \in K$ に対し，

$$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, c\,\mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n) = c\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n)$$

である．

x-6-6

(6.64) すべての $\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n \in K^m$ と，$i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_i = \mathbb{a}_i^1 + \mathbb{a}_i^2$ なら，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n) \\
&= \varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i^1, \ldots, \mathbb{a}_n) + \varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_i^2, \ldots, \mathbb{a}_n)
\end{aligned}
$$

　　である．

(6.62) は，φ の**交代性**とよばれ，(6.63),(6.64) は，φ の (K 上の) **多重線型性**とよばれる．

　特に，$m = n$ のとき，交代的多重線型写像 $\varphi : (K^n)^n \to K$ が，**標準化された** (normalized) とは，

$$(6.65)\quad \varphi(\mathbb{e}_1^n, \ldots, \mathbb{e}_n^n) = 1 \qquad \text{x-6-7}$$

が，成り立つこと，とする．

補題 6.54 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\varphi_{\det} : (K^n)^n \to K$ を，　P-6-4

$$\varphi_{\det}(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n) := \det[\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n]$$

で定義すると，$\varphi_{\det}$ は，標準化された交代的多重線型写像である．

証明． $\varphi_{\det}$ が，交代性を持つことは，補題 6.30, (1) により，よい．

　$\varphi_{\det}$ が，多重線型性を持つことは，補題 6.30, (2), (3) により，よい．

　$\varphi_{\det}$ が，標準化されていることは，演習問題 6.16, (1) により，よい．

□ (補題 6.54)

　実は，標準化された交代的多重線型写像 $\varphi : (K^n)^n \to K$ は，上の補題 6.54 での $\varphi_{\det}$ に限ることが，示せる．つまり，行列式

$$\det : K \text{ 上の } n\text{-次の正方行列の全体} \to K;\ A \mapsto \det(A)$$

は，補題 6.54 でのように定義された，$\varphi_{\det} : (K^n)^n \to K$ が，一意に決まるところの，標準化された交代的多重線型写像となるようなもの，として特徴付けることが，できることになる．

　このことは，以下の定理 6.56 で示されるが，そのために，まず，一般の交代的多重線型写像 $\varphi : (K^n)^n \to K$ が，補題 6.34 で示した，$\varphi_{\det}$ の幾つかの性質を，満たすことを，確認しておく:

補題 6.55 $\varphi : (K^n)^n \to K$ を，交代的多重線型写像として，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \in K^n$ とする．このとき，　P-6-4-0

(1)　ある $i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_i = \mathbb{0}$ なら，$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n) = 0$ である．

（2） ある，異る $i, j \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_i = \mathbb{a}_j$ なら，$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n) = 0$ である．

（3） $i^* \in \overline{n}$ として，各 $i \in \overline{n} \setminus \{i^*\}$ に対し，$c_i \in K$ とするとき，

$$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_{i^*} + \textstyle\sum_{i \in \overline{n} \setminus \{i^*\}} c_i \mathbb{a}_i, \ldots, \mathbb{a}_n) = \varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_{i^*}, \ldots, \mathbb{a}_n)$$

である．

証明． 補題 6.34 と同様に証明できる (演習!). □ (補題 6.55)

P-6-5 **定理 6.56** K を，任意の体とする．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，標準化された交代的多重線型写像 $\varphi : (K^n)^n \to K$ は，一意に存在して，任意の $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \in K^n$ に対し，$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n) = \det([\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n])$ が成り立つ．

証明． 標準化された交代的多重線型写像 $\varphi : (K^n)^n \to K$ が，存在することは，補題 6.54 により，よい．

$\varphi : (K^n)^n \to K$ を，標準化された交代的多重線型写像とする．以下では，$A = [\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n]$ を，(K 上の) n-次の正方行列とするとき，$\varphi(A)$ で，$\varphi(\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n)$ を，表わすことにする．

Cl-6-0 **Claim 6.56.1** B を，n-次の基本行列とするとき，$\varphi(B) = \det(B)$ である．

$\vdash$ (5.14), (5.15), (5.16) での記法を用いる．

場合 1． $k \in \overline{n}$, $c \in K$, $c \neq 0$ に対し，$B = S^n_k(c)$ のとき．補題 6.32 により，$\det(S^n_k(c)) = c$ である．一方，(6.63) と，(6.65) により，$\varphi(S^n_k(c)) = c$ だから，等式は成り立つ．

場合 2． $k, \ell \in \overline{n}$, $k \neq \ell$ に対し，$B = T^n_{k,\ell}$ のとき．演習問題 6.16, (1) と，補題 6.30, (1) により，$\det(T^n_{k,\ell}) = -1$ である．一方，(6.65) と，(6.62) により，$\varphi(T^n_{k,\ell}) = -1$ だから，等式は成り立つ．

場合 3． $k, \ell \in \overline{n}$, $k \neq \ell$, $d \in K$ に対し，$B = R^n_{k,\ell}(d)$ のとき．演習問題 6.16, (1) と，補題 6.34, (3) により，$\det(R^n_{k,\ell}(d)) = 1$ である．一方，(6.65) と，補題 6.55, (3) により，$\varphi(R^n_{k,\ell}(d)) = 1$ だから，等式は成り立つ．

$\dashv$ (Claim 6.56.1)

Cl-6-1 **Claim 6.56.2** A を，n-次の正方行列として，B を，n-次の基本行列とするとき，$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ である．

$\vdash$ **場合 1.** $k \in \overline{n}$, $c \in K$, $c \neq 0$ に対し，$B = S^n_k(c)$ のとき．このときには AB は，A の，k-列を，c 倍して得られる行列だから，(6.63) と，Claim 6.56.1 の場合 1 での証明により，$\varphi(AB) = c\varphi(A) = \varphi(A)\varphi(B)$ である．

場合 2. $k, \ell \in \overline{n}$, $k \neq \ell$ に対し，$B = T^n_{k,\ell}$ のとき．このときには，AB は，A の，k-列と，ℓ-列を，入れ替えて得られる行列だから，(6.62) と，Claim 6.56.1 の場合 2 での証明により，$\varphi(AB) = -\varphi(A) = \varphi(A)\varphi(B)$ である．

場合 3. $k, \ell \in \overline{n}$, $k \neq \ell$, $d \in K$ に対し，$B = R^n_{k,\ell}(d)$ のとき．このときには，AB は，A の，ℓ 列に，A の，k 列の d 倍を，加えて得られる行列だから，補題 6.55, (3) と，Claim 6.56.1 の場合 3 での証明により，$\varphi(AB) = \varphi(A) = \varphi(A)\varphi(B)$ である． $\dashv$ (Claim 6.56.2)

Claim 6.56.3 B を，複数の n-次の基本行列の積として表わせる行列とするとき，$\varphi(B) = \det(B)$ である． Cl-6-1-0

$\vdash$ “B が，k 個の基本行列の積として表わせるとき，$\varphi(B) = \det(B)$ である” が，すべての k に対し成り立つことが，k に関する帰納法により，示せればよい．

この帰納法の始めは，Claim 6.56.1 から従い，帰納法のステップは，Claim 6.56.2, Claim 6.56.1, 定理 6.40, (1) から従う． $\dashv$ (Claim 6.56.3)

Claim 6.56.4 A を，任意の n-次の正方行列として，B を，複数の n-次の基本行列の積として表わせる行列とするとき，$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ である． Cl-6-2

$\vdash$ “B が，k 個の基本行列の積として表わせるとき，すべての n-次の正方行列 A に対し，$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ である” が，すべての k に対し成り立つことが，k に関する帰納法により，示せればよい．

この帰納法の始めと，帰納法のステップは，Claim 6.56.2 から従う．

$\dashv$ (Claim 6.56.4)

Claim 6.56.5 C を，n-次の正方行列で，${}^tC$ が，簡約な階段形の行列となっているものとするとき，$\varphi(C) = \det(C)$ である． Cl-6-3

$\vdash$ $C \neq E_n$ なら，C は，ゼロベクトルとなる行を持つから，補題 6.55, (1) と，補題 6.34, (1) により，$\varphi(C) = 0 = \det(C)$ である．

$C = E_n$ なら，演習問題 6.16, (1) と，(6.65) により，$\varphi(C) = 1 = \det(C)$ である． ⊣ (Claim 6.56.5)

以上の準備で，定理の証明ができる．

A を，n-次の正方行列とする．このとき，${}^tA$ も，n-次の正方行列である．したがって，付録 D の，定理 D.1 により，${}^tA$ は，n-次の簡約な階段形の行列 C と，複数の基本行列の積，として表わされる行列 B により，${}^tA = BC$ と表わせる．したがって，補題 3.15, (1) により，

x-6-8

$$A = {}^t({}^tA) = {}^tC\,{}^tB \tag{6.66}$$

である．補題 5.12, (2) と，補題 3.15, (1) により，${}^tB$ も，複数の基本行列の積として，表わすことが，できる．したがって，

$$\varphi(A) \overbrace{=}^{(6.66)} \varphi({}^tC\,{}^tB) \underbrace{=}_{\text{Claim } 6.56.4 \text{ による}} \overbrace{\varphi({}^tC)}^{= \det({}^tC);\ \text{Claim } 6.56.5 \text{ による}} \underbrace{\varphi({}^tB)}_{= \det({}^tB);\ \text{Claim } 6.56.3 \text{ による}} = \det({}^tC)\det({}^tB)$$

$$\underbrace{=}_{\text{定理 } 6.40,\ (1) \text{ による}} \det({}^tC\,{}^tB) \overbrace{=}^{(6.66)} \det(A)$$

である． □ (定理 6.56)

第 7 章

線型独立性と基底

chap7 indep

In a pre-Hilbert space
a maximal orthonormal system
need not to be an independent basis

— 著者が，2016 年 11 月 24 日に，バルセロナで開催された
ワークショップで行なった講演のスライドから

7.1　K^n での線型独立性

lin-indep　K を，体とする．この節では，主に，$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ を固定して，ベクトル空間 K^n で議論する．ある $k \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ で，$c_1, \ldots, c_k \in K$ のとき，$\mathbb{b} \in K^n$ が，**重み $c_1, \ldots, c_k$ を持つ，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の線型結合** (linear combination of $\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ with weights $c_1,\ldots,c_k$) である，とは，

x-7-0
$$\mathbb{b} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k \quad \left(= \textstyle\sum_{i \in \overline{k}} c_i\mathbb{b}_i\right) \tag{7.1}$$

となること，とする．$\mathbb{b}, \mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ に対し，$c_1, \ldots, c_k \in K$ で，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の，重み $c_1, \ldots, c_k$ を持つ線型結合となるようなものが取れるとき (つまり，(7.1) が，これらの $c_1, \ldots, c_k$ に対し成り立つとき), $\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の**線型結合**である，あるいは， $\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の**線型結合**として表わされる，という．ここで，重み $c_1, \ldots, c_k$ が，K から選ばれていることを，強調する必要があるときには，“K 上の線型結合” と言うことにする．

任意の $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ に対し，$\mathbb{0} \in K^n$ は，常に，$\mathbb{0} = 0\,\mathbb{b}_1 + \cdots + 0\,\mathbb{b}_k$ という線型結合で表わせるが，このような線型結合を，**自明な線型結合** (trivial linear combination) とよぶ．$\mathbb{0}$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の，自明な線型結合以外の線型結合として，表わされないとき，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は，**K^n で線型独立** (linearly independent) である，という．

“自明な” という用語の，上での定義から，線型結合 $c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ が，自明でない線型結合である，とは，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ となることである．

K 上の線型結合に関しての線型独立性が，問題となっていることを，強調する必要があるときには，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は，**K^n で K 上線型独立である** (または，**K^n で，K 上で線型独立である**) と言うことにする．

Ex-7-0　**例 7.1**　(1)　$k = 1$ とするとき，

$$\mathbb{b}_1 \in K^n \text{ が，} K^n \text{ で線型独立} \iff \mathbb{b}_1 \neq \mathbb{0},$$

である．

(2)　$k = 2$ とするとき，

$$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in K^n \text{ は，} K^n \text{ で線型独立} \Leftrightarrow \mathbb{b}_1 \text{ と，} \mathbb{b}_2 \text{ は，互いに，他のスカラー倍でない，}$$

が成り立つ．

（3）　$k = 3$ のとき，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3 \in K^n$ が，K^n で線型独立であるのは，$\mathbb{b}_1$ と，$\mathbb{b}_2$ が，線型独立 (つまり，(2) により，互いに他のスカラー倍でない) で，$\mathbb{b}_3$ が，$\mathbb{b}_1$ と，$\mathbb{b}_2$ の線型結合として表わせない，ちょうどそのときである．

証明． (1):　補題 4.1, (1), (2) により，よい．

(2):　両方向とも，対偶命題を示す．

$\Leftarrow$:　もし，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ が，線型独立でなければ，自明でない線型結合で，$c_1\mathbb{b}_1 + c_2\mathbb{b}_2 = \mathbb{0}$ となるものがある．$\mathbb{b}_1 = \mathbb{0}$ なら，$\mathbb{b}_1 = 0\,\mathbb{b}_2$ だから，“$\mathbb{b}_1$ と，$\mathbb{b}_2$ は，互いに他のスカラー倍でない” は，成り立たない．$\mathbb{b}_1 \neq \mathbb{0}$ なら，$c_2 \neq 0$ だから (もし，$c_2 = 0$ なら，$c_1 = 0$ でなくてはならなくなり，この線型結合が自明でないことに矛盾する)，$\mathbb{b}_2 = -\frac{c_1}{c_2}\,\mathbb{b}_1$ となり，この場合にも，$\mathbb{b}_1$ と，$\mathbb{b}_2$ は，“互いに他のスカラー倍でない” でない．

$\Rightarrow$:　もし，$\mathbb{b}_1$ と，$\mathbb{b}_2$ は，(互いに他のスカラー倍でない) でない，とすると，例えば，$\mathbb{b}_1 = c\,\mathbb{b}_2$ となる $c \in K$ が取れる．このとき，$1\,\mathbb{b}_1 - c\,\mathbb{b}_2 = \mathbb{0}$ として，$\mathbb{0}$ が，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ の，自明でない線型結合で，表わせることになるから，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ は，線型独立でない．

(3):　これは，補題 7.8 の特別な場合である．この (補題 7.8 の特別な場合の) 直接証明は，読者の演習とする．　❑ (例 7.1)

例 7.2 K を任意の体として，$n \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{n}$ とするとき，$\mathbb{e}^n_1, \dots, \mathbb{e}^n_k$ は，(K^n で) K 上線型独立である．任意の $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ に対し，$\mathbb{a}$ が，$\mathbb{e}^n_1, \dots, \mathbb{e}^n_k$ の線型結合として表わせるのは，$a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ となる，ちょうどそのときである．特に，K^n の任意の要素は，$\mathbb{e}^n_1, \dots, \mathbb{e}^n_n$ の線型結合として表わせる． Ex-7-0-0

証明． $a_1\mathbb{e}^n_1 + \cdots + a_k\mathbb{e}^n_k = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に留意すれば，明らかである (演習!).

❑ (例 7.2)

$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k \in K^n$ が，K^n で線型独立であるかどうかは，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ の枚挙の順序には，依存しない．ただし，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k \in K^n$ が，K^n で線型独立であるときには，この枚挙は，重複を含まないものとなっていなければ，ならない:

P-7-0 **補題 7.3** $\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k \in K^n$ とする．　（1）　$\sigma \in S_k$ とするとき，

$$\begin{aligned}&\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k \text{ が，} K^n \text{ で線型独立}\\ &\Leftrightarrow\ \mathbb{b}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbb{b}_{\sigma(k)} \text{ が，} K^n \text{ で線型独立}\end{aligned}$$

である．
（2）　ある，異る $i^*, j^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*} = \mathbb{b}_{j^*}$ なら，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ は，K^n で線型独立でない．

証明． (1):　$\sigma \in S_k$ と，$c_1, \ldots, c_k \in K$ に対し，

$$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k = c_{\sigma(1)}\mathbb{b}_{\sigma(1)} + \cdots + c_{\sigma(k)}\mathbb{b}_{\sigma(k)}$$

となることに留意すると，主張は，線型独立性の定義から，明らかである．

(2):　ある，異る $i^*, j^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*} = \mathbb{b}_{j^*}$ だとすると，$c_i \in K,\ i \in \overline{k}$ を，

$$c_i := \begin{cases} 1, & i = i^* \text{ のとき，}\\ -1, & i = j^* \text{のとき，}\\ 0, & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

とすると，$\sum_{i\in\overline{k}} c_i\mathbb{b}_i = \mathbb{0}$ で，この線型結合は，自明ではないから，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は，K^n で線型独立ではない．　□（補題 7.3）

上の補題は，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ の K^n での線型独立性を考えるより，むしろ，これを，(有限) 集合 $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\} \subseteq K^n$ の K^n での線型独立性と捉える方が，自然であることを示唆している:

以下では，ベクトルの有限集合 $\mathcal{B} \subseteq K^n$ が，K^n で線型独立とは，$\mathcal{B}$ の，ある／任意の (重複のない) 枚挙 $\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ に対して，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_k$ が，線型独立であること，とする [*1]．

some-any [*1] ここで，“ある／任意の” と，書いているのは，補題 7.3, (1) により，$\mathcal{B}$ の，ある (重複のない) 枚挙 $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ について，それが，K^n で線型独立であることと，$\mathcal{B}$ の，すべての

補題 7.4 $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in K^n$ として，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，K^n で線型独立なら，任意の $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ も，K^n で線型独立である． P-7-1

この主張の対偶命題を取ると，ある $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ が，K^n で線型独立でないなら，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ も，K^n で線型独立でない．

証明． 対偶命題の方を示す．補題 7.3, (1) により，必要なら添字の並べ替えをして，ある $k' \leq k$ に対し $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_i : i \in \overline{k'}\}$ となっているとしてよい．$\mathcal{B}$ が線型独立でないなら，自明でない線型結合 $\sum_{i\in\overline{k'}} c_i\mathbb{b}_i$ で，$\sum_{i\in\overline{k'}} c_i\mathbb{b}_i = \mathbb{0}$ となるものが存在する．$i \in \overline{k} \setminus \overline{k'}$ に対し $c_i := 0$ とすると，$\sum_{i\in\overline{k}} c_i\mathbb{b}_i = \mathbb{0}$ で，この線型結合は自明でないから，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，K^n で線型独立でない．

□ (補題 7.4)

線型独立性は，理解の難しい概念である．その難しさの一つの理由は，n 個のベクトルの集まりの線型独立性が，本質的に n-項関係である，という点にある．例えば，数学的な対象 $o_1, ..., o_k$ が互いに異ることを示すには，これらの対象の，すべての組 o_i, o_j, $i \neq j$ について，$o_i \neq o_j$ であることを示せばよいが，同様のことは，k 個のベクトルの，線型独立性については，言えない．

例 7.5 任意の $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ に対し，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in \mathbb{R}^2$ で，任意の，互いに異る $i_1, i_2 \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i_1}, \mathbb{b}_{i_2}$ は，$\mathbb{R}^2$ で線型独立だが，任意の，互いに異る $i_1, i_2, i_3 \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i_1}, \mathbb{b}_{i_2}\ \mathbb{b}_{i_3}$ は，$\mathbb{R}^2$ で線型独立でないようなものが，存在する．特に，この $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，$\mathbb{R}^2$ で線型独立でない． Ex-7-1

証明． R_θ で，原点を中心とする角度 θ の左回りの回転を惹き起こす行列 (回転行列) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を表わすのだった．

例えば，$i \in \overline{k}$ に対して，

$$\mathbb{b}_i := R_{\frac{2i}{k}\pi}\mathbb{e}_1^2$$

とすると，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，求めるようなものになっている．特に，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ のうちの，任意の 2 つが $\mathbb{R}^2$ で線型独立であることは 例 7.1, (2) により，任意の 3 つが，$\mathbb{R}^2$ で線型独立でないことは，補題 4.36 (と，例 7.1, (3)) により，よい．

(重複のない) 枚挙 $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，K^n で線型独立になることが，同値になるからです．

$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ が，$\mathbb{R}^2$ で線型独立でないことは，このことと，補題 7.4 から従う． □ (例 7.5)

次の補題は，例 7.1, (1) の一般化となっている:

P-7-2 **補題 7.6** $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ が，K^n で線型独立なら，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n \setminus \{\mathbb{0}\}$ である．つまり，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は，どれも $\mathbb{0}$ と異る．

証明． 例えば，$\mathbb{b}_1 = \mathbb{0}$ とすると，

$$\mathbb{0} = 1\,\mathbb{b}_1 + 0\,\mathbb{b}_2 + \cdots + 0\,\mathbb{b}_k$$

として，$\mathbb{0} \in K^n$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の，自明でない K 上の線型結合として，表わされてしまうので，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の線型独立性に，矛盾である． □ (補題 7.6)

次の補題は，例 7.5 の証明でも引用した，補題 4.36 を，拡張するものとなっている:

P-7-3 **補題 7.7** $k \in \mathbb{N}$ を，$k > n$ となるものとするとき，任意の $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ は，K^n で線型独立でない．

証明． $k > n$ として，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in K^n$ とする．$B := [\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k]$ とすると，B は $n \times k$-行列である．$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ として，斉次連立方程式 $B\mathbb{x} = \mathbb{0}_n$ を考えると，系 5.17 により，この連立方程式は，自明でない解を持つ．$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$ を，そのような解の一つとすると，$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k = \mathbb{0}_n$ となるから，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は，K^n で線型独立ではない． □ (補題 7.7)

$k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k, \mathbb{b} \in K^n$ に対し [*2]，$\mathbb{b} \in K^n$ が，$\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ 上で，**独立** (independent) とは，すべての $c_1, \ldots, c_k \in K$ に対し，$\mathbb{b} \neq c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ となること，とする．ただし，$k = 0$ のときには，(K^n のベクトルの) 空の列の，任意の線型結合は，$\mathbb{0}$ である，と考えることにして，$\mathbb{b}$ が，$\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ $(= \emptyset)$ 上で独立とは，$\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ のこと，とする．

[*2] ここで，$k = 0$ のときには，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ は空の列とする，と解釈することにします．

K の要素を，線型結合の重みとして考えていることを，強調する必要があるときには，$\mathbb{b}$ は，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ 上で，K**-独立**である，と言うことにする．

$k > 0$ のときには，$\mathbb{b}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ 上で，K-独立でない，とは，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の，K 上の線型結合として，表わせることである．

次の補題 7.8 は，例 7.1, (3) を，一般化するものとなっている．

♦ チェックここから 21.04.25(日 02:13(JST))

補題 7.8 $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in K^n$ に対し，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，線型独立となるのは， P-7-4

(7.2) すべての $i^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*-1}\}$ 上で独立となる x-7-1-0

ことと，同値である．

証明． まず，(7.2) が，成立しないと仮定してみる．つまり，ある $i^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*-1}\}$ 上で独立でないとする．$i^* = 1$ とすると，上の注意から，$\mathbb{b}_1 = \mathbb{0}$ だから，補題 7.6 により，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は線型独立でない．$i^* > 1$ のときには，$\mathbb{b}_{i^*}$ は，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*-1}$ の線型結合として表わせる．$\mathbb{b}_{i^*} = c_1\mathbb{b}_1 +, ..., +c_{i^*-1}\mathbb{b}_{i^*-1}$ とすると，$c_1\mathbb{b}_1 +, ..., +c_{i^*-1}\mathbb{b}_{i^*-1} + (-1)\mathbb{b}_{i^*} = \mathbb{0}$ だから，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}$ は，線型独立でなく，したがって (補題 7.4 により)，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ も，線型独立でない．

次に，(7.2) が成り立つと仮定する．このとき，すべての $i^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}$ が，線型独立であることを，i^* に関する帰納法で，示す．特に，ここで，$i^* = k$ とすると，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，線型独立であることが示せたことになる．

$i^* = 1$ のとき (帰納法の初め) には，補題の前での注意から，$\mathbb{b}_1 \neq \mathbb{0}$ だから，例 7.1, (1) により，$\mathbb{b}_1$ は，線型独立である．

$i^* \in \overline{k}$ で，$i^* + 1 \leq k$ のとき，i^* に対し，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}$ が，線型独立と仮定して，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}, \mathbb{b}_{i^*+1}$ も，線型独立であること (帰納法のステップ) を示す．このために，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}, \mathbb{b}_{i^*+1}$ が，線型独立でない，として，矛盾を示す．

$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}, \mathbb{b}_{i^*+1}$ が，線型独立でない，とすると，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{i^*+1} \end{bmatrix} \in K^{i^*+1}$，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{i^*+1} \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ で，

(7.3) $c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{i^*}\mathbb{b}_{i^*} + c_{i^*+1}\mathbb{b}_{i^*+1} = \mathbb{0}$ x-7-2

となるものが，存在する．

$c_{i^*+1} \neq 0$ である：　もし，$c_{i^*+1} = 0$ とすると，$c_1 \mathbb{b}_1 + \cdots + c_{i^*} \mathbb{b}_{i^*} = \mathbb{0}$ となり，これは自明でない線型結合だから，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*}$ が，線型独立である，という仮定に矛盾である．

したがって，(7.3) の両辺に，$\frac{1}{c_{i^*+1}}$ を，掛けることができるが，そうして得られた等式を，移項すると，

$$\mathbb{b}_{i^*+1} = \left(-\frac{c_1}{c_{i^*+1}}\right)\mathbb{b}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_{i^*}}{c_{i^*+1}}\right)\mathbb{b}_{i^*}$$

となり，(7.2) に矛盾である．　❑ (補題 7.8)

次の補題 7.9 は，補題 7.8 の証明と同様に，直接証明できるが，補題 7.8 の系として示すこともできる (演習!)．

P-7-5 **補題 7.9** $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in K^n$ が，線型独立のとき，$\mathbb{b} \in K^n$ として，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$, $\mathbb{b}$ が，線型独立となるのは，$\mathbb{b}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ 上で独立である，ちょうどそのときである．　❑

P-7-6 **補題 7.10** $\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k \in K^n$ が，線型独立のとき，$\mathbb{b} \in K^n$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の線型結合として表わせるなら，その線型結合の表現は，一意である．つまり，$c_1, ..., c_k, d_1, ..., d_k \in K$ に対し，$\mathbb{b} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k = d_1\mathbb{b}_1 + \cdots + d_k\mathbb{b}_k$ なら，$c_1 = d_1, ..., c_k = d_k$ である．

x-7-2-a **証明．** $c_1, ..., c_k, d_1, ..., d_k \in K$ に対し，　(7.4)：$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$ だが，

$$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k = d_1\mathbb{b}_1 + \cdots + d_k\mathbb{b}_k$$

だったとすると，この等式の両辺から，$d_1\mathbb{b}_1 + \cdots + d_k\mathbb{b}_k$ を引くと，

$$(c_1 - d_1)\mathbb{b}_1 + \cdots + (c_k - d_k)\mathbb{b}_k = \mathbb{0}$$

が得られるが，これは，(7.4) により，自明でない線型結合だから，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，線型独立であることに矛盾である．　❑ (補題 7.10)

$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in K^n$ が，線型独立で，すべての $\mathbb{b} \in K^n$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の線型結合として書けるとき，$\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ は，K^n の**基底** (basis) である，と

いう．このとき，$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ が，K^n の基底である，という言い方をすることもある．この言い方をしたときには，枚挙 $\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ には，重複がないものと仮定する (補題 7.3, (2) を参照).

“すべての $\mathbb{b} \in K^n$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の線型結合として書ける” という条件は，“$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，K^n を，**生成** (generate) する”，と表現されることもある．

例 7.2 により，$\mathcal{B} = \{\mathbb{e}_1^n, ..., \mathbb{e}_n^n\}$ は，K^n の基底である．この $\mathcal{B}$ は，$\#(\mathcal{B}) = n$ を満たすが，実は，すべての基底について，この等式が成り立つことが，示せる．

定理 7.11　(1)　$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ が，K^n の基底なら，$k = n$ である．　P-7-7

(2)　n 個のベクトル $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n \in K^n$ が，線型独立なら，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n$ は，K^n の基底である．

証明． (1):　補題 7.7 により，$k \leq n$ である．

$k < n$ だったとすると，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ が，K^n の基底であることから，各 $\ell \in \overline{n}$ に対し，

(7.5)　$$\mathbb{e}_\ell^n = \sum_{j \in \overline{k}} a_{j,\ell} \mathbb{b}_j$$　x-7-2-0

となるように，$a_{j,\ell} \in K$, $j \in \overline{k}$, $\ell \in \overline{n}$ を，取ることができる．

(7.6)　$$A := [a_{j,\ell}]_{j \in \overline{k}, \ell \in \overline{n}}$$　x-7-2-1

とすると，$k < n$ により，n-変数の方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{0}_k$ は，自明でない解を持つ (系 5.17).

(7.7)　$$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}_n$$　x-7-2-2

をそのような解の一つとすると，

$$\begin{aligned} \mathbb{0}_n &= [\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k]\mathbb{0}_k = [\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k](A\mathbb{c}) = ([\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k]A)\mathbb{c} \\ &= c_1\mathbb{e}_1^n + \cdots + c_n\mathbb{e}_n^n \end{aligned}$$

となる．この線型結合は自明でないから，$\mathbb{e}_1^n, ..., \mathbb{e}_n^n$ の線型独立性 (例 7.2) に，矛盾である．

(2):　$\mathbb{a} \in K^n$ を任意に取ると，補題 7.7 により，$\mathbb{a}, \mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は線型独立でない．したがって，自明でない線型結合で，

x-7-4-a
$$c\,\mathbb{a} + c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_n\mathbb{b}_n = \mathbb{0} \tag{7.8}$$

となるものがある．$c = 0$ なら，$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_n\mathbb{b}_n = \mathbb{0}$ となり，これは自明でない線型結合となるので，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ が線型独立であることに矛盾である．したがって，$c \neq 0$ である．(7.8) の両辺を c で割って移項すると，

$$\mathbb{a} = (-\frac{c_1}{c})\,\mathbb{b}_1 + \cdots + (-\frac{c_n}{c})\,\mathbb{b}_n$$

となる．$\mathbb{a} \in K^n$ は任意だったから，このことと，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ の線型独立性の仮定から，$\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_n$ は，K^n の基底となっていることが，分かる．　□ (定理 7.11)

上の定理から，K^n の基底は，どれも，ちょうど n 個の要素を持つが，この事実は，“K^n は n-次元である”，と表現される．この次元の概念の，より一般的な枠組での扱いは，次の節で見ることになる．

基底の概念を用いると，定理 5.23’ (245 ページ) での，正方行列の可逆性の特徴付けが，次のように，更に，拡張される．

P-7-7-0
定理 7.12 (定理 5.23’ の補足)．A を，K 上の n-次の正方行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ とする．このとき，以下は，同値である:

(e)　A は，可逆である．

(k)　$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は，K^n の基底である．

(ℓ)　$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は，K 上線型独立である．

(m)　$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は，K^n を，生成する．

証明． (e) ⇒ (ℓ):　$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ が線型独立でない，として，$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{0}$ を自明でない線型結合とする．このとき，$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とすると，$A\mathbb{c} = \mathbb{0}$ である (補題 4.3)．もし，A が可逆なら，A^{-1} が存在するから，上の等式の両辺に A^{-1} を，左から掛けると，$\mathbb{c} = \mathbb{0}$ が得られる．しかし，これは，$\mathbb{c}$ のとり方に矛盾である．

(ℓ) ⇒ (k):　$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ が，K 上線型独立なら，定理 7.11 により，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は，K^n の基底である．

(k) $\Rightarrow$ (m): は，規定の定義から，明らかである．

(m) $\Rightarrow$ (e): $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ が，K^n を，生成するなら，各 $j \in \overline{n}$ に対し，$c_{1,j}, \dots, c_{n,j} \in K$ で，$c_{1,j}\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{n,j}\mathbb{a}_n = \mathbb{e}_j^n$ となるものが取れる．$C = [c_{i,j}]$ とすると，補題 4.3 により，$AC = E_n$ である．したがって，定理 5.23', (e) $\Leftrightarrow$ (i) (245 ページ) により，A は，可逆である． □ (定理 7.12)

例 4.30, (2), (3) は，上の定理の (e) $\Leftrightarrow$ (k) の帰結として，理解できることに注意する．

上で準備したことを用いると，第 4.3.1 節の定理 4.72 の証明で，保留になっていた，次の主張が，証明できる (次の補題 7.13 (と定理 4.72) は，後で，命題 7.50 として，より自然な証明が，与えられることになる):

補題 7.13 E, $E' \subseteq \mathbb{R}^3$ を平面とするとき，$E \cap E' \neq \emptyset$ なら，$E \cap E'$ は singleton ではない． P-7-7-1

証明． $E = E'$ なら，$E \cap E' = E$ となり，主張は明らかに成り立つから，$E \neq E'$ とする．

仮定 $E \cap E' \neq \emptyset$ から，必要なら，平行移動を施すことで，一般性を失なうことなく，E も，E' も，$\mathbb{0}$ を含む平面である，としてよい．よって，E と，E' は，それぞれ，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ と，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ によって張られる，$\mathbb{0}$ を含む平面とする．

このとき，$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ は線型独立である [*3]，$E \neq E'$ の仮定から，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$ の少なくとも片方は E' の要素でない (補題 4.68 により，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in E'$ なら $E = E'$ となってしまう)．例えば，$\mathbb{a}_1 \notin E'$ なら，例 7.1, (3) により，$\{\mathbb{a}_1, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$ は，線型独立だから，補題 7.11, (2) により，$\{\mathbb{a}_1, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．したがって，$\mathbb{a}_2$ は，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2$ の線型結合として表わせる．c, d, $e \in \mathbb{R}$ を，$\mathbb{a}_2 = c\,\mathbb{a}_1 + d\,\mathbb{b}_1 + e\,\mathbb{b}_2$ となるようなものとすると，

$$(7.9) \quad -c\,\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2 = d\,\mathbb{b}_1 + e\,\mathbb{b}_2$$ x-7-4-0

である．$\mathbb{a}_1$ と，$\mathbb{a}_2$ の選び方から，これらも，互いに他のスカラー倍でないから，$\mathbb{c} := -c\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2$ とすると，$\mathbb{c} \neq \mathbb{0}$ で，(7.9) から，$\mathbb{c} \in E \cap E'$ である．仮

[*3] 例 7.1, (2) により，$\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2$ が線型独立であることと，$\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2$ が互いに他のスカラー倍でないことが，同値であることに注意します．

定から，$\mathbb{0} \in E \cap E'$ でもあるから，$E \cap E'$ は，singleton ではない[*4].

□ (補題 7.13)

7.2　一般の線型空間での基底と次元

lin-space

7.2.1　体上の線型空間

lin-space-over-K

第 4.1 節の，4.1.1 節で，体 K 上のベクトル (つまり，ある $n \in \mathbb{N}$ に対する，K^n の要素) の和とスカラー倍の基本性質を，(4.3)〜(4.10) と枚挙し，4.1.1 節と，4.1.2 節 で，他の代数的性質は，これらの基本性質から導けることを確かめた [*5].

このことから，(4.3)〜(4.10) は，公理として，何か本質的な性質を捉えている，と考えることができるが，そのような見方から，次に述べる線型空間の概念の定義が，自然に導かれる:

K を体として，空でない集合 X に対し，要素 $\mathbb{0}$, 和の演算 $+ : X^2 \to X$; $\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle \mapsto \mathbb{a} + \mathbb{b}$, および，スカラー倍 $\cdot : K \times X \to X$; $\langle r, \mathbb{a} \rangle \mapsto r\,\mathbb{a}$ が，指定されており，これらが，次の公理を満たすとき，X は，K **上の線型空間** (linear space over K) である，という．$\mathbb{0}$ は，(X の) **ゼロ元**と呼んで [*6]，演算 “$+$” と “$\cdot$” は，それぞれ，(X の) **和**と，**スカラー倍**と呼ぶことにする． K 上の線型空間の満たすべき公理は，(4.3)〜(4.10) に対応する，次のものである:

すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in X$ と $r, s \in K$ に対し，以下の等式が成り立つ:

ax-1 (7.10) $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$ (和の可換性);

ax-2 (7.11) $(\mathbb{a} + \mathbb{b}) + \mathbb{c} = \mathbb{a} + (\mathbb{b} + \mathbb{c})$ (和の結合律);

ax-3 (7.12) $\mathbb{a} + \mathbb{0} = \mathbb{0} + \mathbb{a} = \mathbb{a}$ (ゼロ元の性質);

ax-4 (7.13) $r(s\mathbb{a}) = (rs)\mathbb{a}$ (スカラー倍の結合律);

[*4] 実は，補題 4.70, (1) により，$\ell := \{r\mathbb{c} : r \in \mathbb{R}\}$ とすると，$\ell \subseteq E \cap E'$ で，ここでの仮定 $E \neq E'$ と，定理 4.72 により，$\ell = E \cap E'$ となります．つまり，$E \cap E'$ は，singleton でないだけでなく，直線になっています．

[*5] ここでの “確かめた” は，経験則としての確認ですが，後に，定理 7.75 で，(4.3)〜(4.10) が，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対する K^n で成り立つ，(初等的な) 代数的性質を，すべて網羅していることの，厳密な証明を，与えます．

[*6] K^n での用語の類推で，$\mathbb{0} \in X$ も，**ゼロベクトル**とよぶことがあります．

(7.14)　$(r+s)\mathbb{a} = r\mathbb{a} + s\mathbb{a}$　(スカラー倍と和の分配律); ax-5

(7.15)　$r(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = r\mathbb{a} + r\mathbb{b}$　(スカラー倍と和の分配律); ax-6

(7.16)　$1_K\mathbb{a} = \mathbb{a}$　(1 倍律); ax-7

(7.17)　$0_K\mathbb{a} = \mathbb{0}$　(0 倍律). ax-8

X のゼロベクトル，和の演算，スカラー倍を明示する必要があるときには，$X = \langle X, +, \cdot, \mathbb{0}\rangle$ などと書く [*7]．複数の線型空間を，区別する必要があるときには，ゼロベクトルや演算に添字をつけて，$X = \langle X, +_X, \cdot_X, \mathbb{0}_X\rangle$ などと書くこともある．この書き方に対応して，X でのスカラー倍 $r\,\mathbb{a}$ を，これが X でのスカラー倍として実行されていることを，強調するために，$r_X\mathbb{a}$ と書くこともある．また，体 K で考えていることを強調する必要があるときには，$X = \langle X, +, \cdot, \mathbb{0}\rangle$ は，K **上の線型空間**である，と言うことにする [*8]．X が，K 上の線型空間のとき，K を，X の**係数体** (coefficient field) とよぶこともある．

次は，上で述べた，線型空間の定義の由来から，明らかである:

例 7.14 任意の体 K と，$n \in \mathbb{N}$ に対して，K^n は，通常のベクトルの和とスカラー倍に関して，K 上の線型空間である． □ Ex-7-2

K^n の形のものとは，本質的に異る線型空間も，存在する．

任意の体 K と，空でない集合 I に対し，

(7.18)　${}^I K := \{f \,:\, f : I \to K\}$ x-7-5

---

*7 上でと同様に，“$\cdot$” は，ベクトルのスカラー倍の演算 : $K \times X \to X$; $\langle r, \mathbb{a}\rangle \mapsto r\,\mathbb{a}$ を表徴しているものとします．

*8 線型空間の定義では，X の外側にある K が言及されているので，$X = \langle X, +, \cdot, \mathbb{0}\rangle$ は，第 B.1 節，360 ページの意味での代数構造でないし，366 ページの意味での一階の構造でもありません．しかし，各 $r \in K$ に対し，r 倍の関数 $\cdot_r : X \to X$; $\mathbb{a} \mapsto r\,\mathbb{a}$ を導入して，線型空間 X を代数構造 $\langle X, +, \cdot_r, \mathbb{0}\rangle_{r\in K}$ と考える，ということは可能で，実際，こう捉えることで，線型代数の理論や，モデュールの理論 (環上の線型代数の理論) にモデル理論の手法を応用することが可能になります．ツィーグラー (Martin Ziegler) の 1980 年代初めの研究 [70] では，そのようなモデル理論の応用の成果が得られています [*9]． ziegler

*9 ここでの Zeiegler は，[1] の著者の一人のツィーグラーとは別人です．ちなみに，[1] の方のツィーグラーは，ベルリン自由大学の現学長 (2022 年現在) で，著者のところに，ときどき送られてくる同窓会からのメールには，彼の著名が入っていることもあります．

とする．$\vec{0}_I \in {}^I K$ を，すべての $i \in I$ に対し，

x-7-6 $$(7.19)\quad \vec{0}_I(i) = 0_K$$

となるものとして定義する．$f,\, g \in {}^I K$ に対し，$f + g \in {}^I K$ を，すべての $i \in I$ に対し，

x-7-7 $$(7.20)\quad (f+g)(i) = f(i) + g(i)$$

となるもの，として定義する．また，$\cdot : K \times {}^I K \to {}^I K;\ \langle c, f\rangle \mapsto cf$ を，$c \in K$ と，$f \in {}^K K$ に対し，$i \in I$ とするとき，

x-7-8 $$(7.21)\quad (cf)(i) = cf(i)$$

となるもの，として定義する．

Ex-7-3 **例 7.15** 任意の体 K と，空でない集合 I に対し，上で定義した，${}^I K = \langle {}^I K, +, \cdot, \vec{0}_I\rangle$ は，K 上の線型空間である．

証明． ${}^I K$ の要素が，等式 (7.10)〜(7.17) を満たすことを示せばよい，${}^I K$ の要素は，I から K への写像であるが，2 つの同じ定義域上の写像が等しい，というのは，すべての定義域の要素に対し，これらの写像の取る値が，等しくなることだった (補題 2.8) ことに留意すると，例えば，(7.11) は，次のようにして示せる:

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in {}^I K$ とする．$i \in I$ を，任意に取るとき，

$$((\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c})(i) \underbrace{=}_{(7.20)} (\mathbb{a}+\mathbb{b})(i) + \mathbb{c}(i) \underbrace{=}_{(7.20)} (\mathbb{a}(i)+\mathbb{b}(i)) + \mathbb{c}(i) \overbrace{=}^{K\text{ での和の結合律 }(2.41)}$$

$$\mathbb{a}(i) + (\mathbb{b}(i) + \mathbb{c}(i)) \underbrace{=}_{(7.20)} \mathbb{a}(i) + (\mathbb{b}+\mathbb{c})(i) \underbrace{=}_{(7.20)} (\mathbb{a} + (\mathbb{b}+\mathbb{c}))(i)$$

である．$i \in I$ は，任意だったので，このことから，(補題 2.8 により)，
$(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c} = \mathbb{a} + (\mathbb{b}+\mathbb{c})$ が従う．　□ (例 7.15)

上で定義した K 上の線型空間 ${}^I K$ は，I が無限集合のときには，どの K^n, $n \in \mathbb{N}$ とも本質的に異る．I が十分に大きな無限集合のときには，このことは，K^n より ${}^I K$ の方が集合のサイズ (濃度) が真に大きくなることからも明

らかであるが，後で，(すべての無限集合 I に対し) ${}^IK$ が，代数的な性質に関しても，どの K^n, $n \in \mathbb{N}$ とも本質的に異ることを示す．

I が，無限集合のときには，次の ${}^{\underline{I}}K$ も，どの K^n, $n \in \mathbb{N}$ とも，本質的に異る K 上の線型空間の例となっている:

演習問題 7.16 K を体として， Exerc-7-0

$$ {}^{\underline{I}}K = \{f \in {}^IK \,:\, f(i),\, i \in I \text{ は，有限個を除くと，} \\ \text{すべて } 0_K \text{ である}\} $$

とする．$\vec{0}_I$, $+$, $\cdot$ を，${}^IK$ と同じ定義で導入すると，($+$, $\cdot$ は well-defined で，) ${}^{\underline{I}}K = \langle {}^{\underline{I}}K, +, \cdot, \vec{0}_I \rangle$ は K 上の線型空間である． ❑

例 7.17 （1） 実数の全体 $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}$ 上の通常の可算の乗算により，体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間と見ることができる．この意味での線型空間 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^1$ (1 次元のベクトルの全体の作る線型空間) と同一視することができる． Ex-7-3-0

（2） $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}$ 上の通常の加算と，乗算 (を $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ 上の演算と見たもの) により，体 $\mathbb{Q}$ 上の線型空間と見ることもできる [*10]. ❑

上の例のうちのいくつかのように，K 上の線型空間のうちには，K^n, $n \in \mathbb{N}$ のどれとも本質的に異るものもある．一方，第 7.1 節の終りで触れた次元の概念を，線型空間に一般化して，線型空間の同型性を，群の同型性 (218 ページを参照) でと同様に定義すると，n-次元の K 上の線型空間は，すべて，K^n と同型となることが示せる (定理 7.69)．つまり，K^n, $n \in \mathbb{N}$ は，K 上の線型空間の同型に関して，K 上の有限次元の線型空間の代表系になっている．

第 4 章，第 4.1 節以降で見た，K^n でのベクトルの性質に関する命題の多くは，そこでの証明を，再利用することで，線型空間の要素に関する，より一般的な命題として，示すことができる．以下に，それらを，挙げておく．

補題 7.18 (補題 4.1 に対応する)． X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X$, $r \in K$ とする．このとき， P-7-8

[*10] この例でも，$\mathbb{Q}$ 上の線型空間としての $\mathbb{R}$ は，どの $\mathbb{Q}^n$ とも本質的に異ることが示せます．$\mathbb{Q}$ 上の線型空間としての $\mathbb{R}$ の例は，ハメル基底 (273 ページを参照) との関連で，第 II 巻で再び詳しく見ることになります．

（1）　$r\,\mathbb{0} = \mathbb{0}$.

（2）　$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}, r \neq 0$ なら，$r\,\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ である．

（3）　$r \neq 0$ なら，$\mathbb{a} = \mathbb{b} \;\Leftrightarrow\; r\,\mathbb{a} = r\,\mathbb{b}$ である．　❏

K 上の線型空間 X の，要素 $\mathbb{b}$ の反数 $-\mathbb{b}$ や，2 つの要素 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の差 $\mathbb{a} - \mathbb{b}$ についても，K^n での (4.18), (4.19) でと同様に，導入することができる:

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X$ に対し，

x-7-9 (7.22)　$-\mathbb{b} := -1\mathbb{b};$

x-7-10 (7.23)　$\mathbb{a} - \mathbb{b} := \mathbb{a} + (-\mathbb{b}) \quad (= \mathbb{a} + (-1\mathbb{b}))$

とする．

以下の補題も，第 4 章の，対応する補題の証明の，再利用で，示せる:

P-7-9 **補題 7.19** (補題 4.4 に対応する).　X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in X$ とするとき，次が成り立つ．

（1）　$\mathbb{a} - \mathbb{a} = -\mathbb{a} + \mathbb{a} = \mathbb{0}$.

（2）　$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{a} = \mathbb{b} + \mathbb{c}$.

（3）　$\mathbb{b} + (\mathbb{a} - \mathbb{b}) = \mathbb{a}$.

（4）　$-(\mathbb{a} - \mathbb{b}) = \mathbb{b} - \mathbb{a}$.

（5）　$\mathbb{a} = \mathbb{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{b} - \mathbb{a} = \mathbb{0}$.　❏

7.2.2　線型空間での線型独立性と基底

lin-space-lin-indep-basis 線型独立性の概念も，K^n でと同じ定義で，K 上の線型空間の要素に対して，一般化することができる　—　次の定義は，K^n での対応する定義と，全く同じ文言のものとなっている:

X を，K 上の線型空間して，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in X$, $c_1, \ldots, c_k \in K$ とするとき，$\mathbb{b} \in X$ が，**重み** $c_1, \ldots, c_k$ **を持つ，**$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ **の線型結合** (linear combination of $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ with weights $c_1, \ldots, c_k$) である，とは，

(7.1)　$\mathbb{b} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k \quad (= \sum_{i \in \overline{k}} c_i\mathbb{b}_i)$

となること，とする．$\mathbb{b}, \mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in X$ に対し，$c_1, ..., c_k \in K$ で，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の，重み $c_1, ..., c_k$ を持つ線型結合となるようなものが，取れるとき (つまり，(7.1) が，これらの $c_1, ..., c_k$ に対し，成り立つとき)，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の**線型結合**である，あるいは，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の**線型結合**として表わされる，という．ここで，重み $c_1, ..., c_k$ が，K から選ばれていることを，強調する必要があるときには，“K 上の線型結合” と，言うことにする．

任意の $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in X$ に対し，$\mathbb{0} \in X$ は，常に，$\mathbb{0} = 0\,\mathbb{b}_1 + \cdots + 0\,\mathbb{b}_k$ という線型結合で表わせるが，このような線型結合を，**自明な線型結合** (trivial linear combination) とよぶ．$\mathbb{0} \in X$ が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ の，自明な線型結合以外の線型結合として，表わされないとき，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，X **で線型独立** (linearly independent) である，という．

K 上の線型結合に関しての線型独立性が，問題となっていることを，強調する必要があるときには，“$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ は，X **で，**K **上線型独立**である” と言うことにする．

K^n のベクトルの線型独立性のときと同様に，線型空間での線型独立性も，X の (複数の) ベクトルの間の線型独立性と考えることにより，X の (有限) 部分集合の線型独立性と考える方が，自然である: 次の補題も，K^n での場合と，全く同様に示せる．

補題 7.20 (補題 7.3 に対応する)．　X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k \in X$ とする．　(1)　$\sigma \in S_n$ とするとき， P-7-10

$$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k \text{ が，線型独立} \Leftrightarrow \mathbb{b}_{\sigma(1)},...,\mathbb{b}_{\sigma(k)} \text{ が，線型独立}$$

である．

(2)　ある，異る $i^*, j^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*} = \mathbb{b}_{j^*}$ なら，$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ は，線型独立でない． ❑

上の補題を踏まえて，K 上の線型空間 X に対し，ベクトルの有限集合 $\mathcal{B} \subseteq X$ が，線型独立とは，$\mathcal{B}$ の，ある／任意の枚挙 $\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ に対して，$\mathbb{b}_1,...,\mathbb{b}_k$ が，線型独立であること，とする[*11]．同様に，あるベクトル $\mathbb{a} \in X$

[*11] この，“ある／任意の” という表現については，脚注*1 を，参照してください．なお，ここでの，“ある／任意の枚挙” も，重複のないもの，と考えています．

が，ベクトルの有限集合 $\mathcal{B} \subseteq X$ の線型結合である，とは，$\mathcal{B}$ の，ある／任意の枚挙 $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ に対して，$\mathbb{a}$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の線型結合となること，とする．

次の補題は，補題 7.4，および，補題 7.6 と，全く同様に証明できる:

P-7-11 **補題 7.21** X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in X$ とする．

（1） (補題 7.4 に対応する)．　$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ が，線型独立なら，任意の $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ も，線型独立である．

あるいは，この主張の対偶命題を取ると，ある $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ が，線型独立でないなら，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ も，線型独立でない．

（2） (補題 7.6 に対応)　$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ が，線型独立なら，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in X \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ である．　❏

以下で導入する独立の概念も，K^n での，独立の概念の一般化になっている．X を，K 上の線型空間として，$k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$, $\mathbb{b} \in X$ に対し，$\mathbb{b} \in X$ が，$\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ 上で，**独立** (independent) とは，すべての $c_1, \ldots, c_k \in K$ に対し，$\mathbb{b} \neq c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ となること (つまり，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の K 上の線型結合として表わせないこと)，とする．ただし，$k = 0$ のときには，(X の要素の) 空の列の，任意の線型結合は，$\mathbb{0}$ である，と考えることにして，$\mathbb{b}$ が，(X で，) $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ $(= \emptyset)$ 上で独立とは，$\mathbb{b} \neq \mathbb{0}_X$ のこと，とする．

K の要素を，線型結合の重みとして考えていることを，強調する必要があるときには，$\mathbb{b}$ は，(X で) $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ 上で **K-独立**である，と言うことにする．

$k > 0$ のときには，$\mathbb{b}$ が，$\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ 上 K-独立でない，とは，$\mathbb{b}$ が，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の，K 上の線型結合として表わせることである．

線型独立性の定義と同様に，有限集合上の独立性の定義は，任意の (必ずしも有限でない) 集合上の独立性の定義に自然に拡張される:　X を，体 K 上の線型空間として，$S \subseteq X$ と $\mathbb{b} \in X$ に対して，$\mathbb{b}$ が，**S 上で独立**である (**S 上で K-独立**であるとも言うことにする) とは，S のどんな有限個の要素をとっても，$\mathbb{b}$ が，それらの K-線型結合として表わせないこと，とする．

次の 2 つの補題も，対応する K^n に関する補題と，全く同じ証明で示せる:

P-7-12 **補題 7.22** (補題 7.8 に対応する)．　X を，K 上の線型空間として，$k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in X$ に対し，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ が，X で，K 上線型独立となるのは，

(7.24)　すべての $i^* \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{i^*}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{i^*-1}\}$ 上で K-独立となる　x-7-10-0

ことと同値である．❏

補題 7.23 (補題7.9 に対応する)．　X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in X$ が，K 上線型独立のとき，$\mathbb{b} \in X$ として，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k, \mathbb{b}$ が，K 上線型独立となるのは，$\mathbb{b}$ が，$\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$ 上で K-独立である，ちょうどそのときである．❏　P-7-12-0

次の補題は，線型空間の部分集合上の独立性の基本性質を，纏めたものになっている．

♦ 有限集合上の独立性の公理

補題 7.24 X を，K 上の線型空間として，$\mathcal{B} \subseteq X$, $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X$ とする．このとき，　P-7-13

(1)　$\mathbb{a}$ が，$\mathcal{B}$ 上で，K-独立で，$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ なら，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}'$ 上で K- 独立である．

(2)　$\mathbb{a}$ が，$\mathcal{B}$ 上で，K-独立なら，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}_X$ である．

(3)　(交換定理)　$\mathbb{a}$ を，$\mathcal{B}$ 上で，K-独立とする．このとき，$\mathbb{b}$ が，$\mathcal{B} \cup \{\mathbb{a}\}$ 上で，K-独立なら，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B} \cup \{\mathbb{b}\}$ 上で，K-独立である．

証明． (1):　対偶を示す．$\mathbb{a} \in X$ が，$\mathcal{B}'$ 上で K-独立でない，とすると，$\mathcal{B}'$ の要素 $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k$ と，K の要素 $c_1, ..., c_k$ で，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ となるものが存在するが，$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ は，$\mathcal{B}$ の要素の K 上の線型結合でもあるから，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}$ 上で K-独立でない．

(2):　$\mathbb{a} = \mathbb{0}_X$ なら，$\mathbb{a}$ は，(X の要素の長さが 0 の列としての) $\emptyset$ の，K 上の線型結合だから，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}$ 上で K-独立でない．

(3):　$\mathbb{a}$ を，$\mathcal{B}$ 上で K-独立とする．このとき，主張の結論の対偶が，成り立つことを示す．$\mathbb{a}$ が，$\mathcal{B} \cup \{\mathbb{b}\}$ 上で K-独立でないとすると，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in \mathcal{B}$ と，$c, c_1, ..., c_k \in K$ で，

(7.25)　$\mathbb{a} = c\,\mathbb{b} + c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$　x-7-11

となるものが取れる．仮定から，$c \neq 0_K$ である ($c = 0_K$ なら，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}$ の要素の線型結合として表わされてしまう)．したがって，(7.25) の両辺に，$\frac{1}{c}$ を掛けることができて，これを移項すると，

$$\mathbb{b} = \frac{1}{c}\mathbb{a} + (-\frac{c_1}{c})\,\mathbb{b}_1 + \cdots + (-\frac{c_k}{c})\,\mathbb{b}_k$$

が，得られるから，$\mathbb{b}$ は，$\mathcal{B} \cup \{\mathbb{a}\}$ 上 K-独立でない． ❑ (補題 7.24)

X を，K 上の線型空間とするとき，(必ずしも有限集合ではない) $\mathcal{B} \subseteq X$ が，**線型独立**であるとは，$\mathcal{B}$ の任意の有限部分集合が，線型独立であること，とする．この定義は，補題 7.24, (1) により，整合性のとれたものになっていて，$\mathcal{B}$ が，有限の場合の，線型独立性の定義の，拡張になっている．

$\mathcal{B} \subseteq X$ が，X の**基底**であるとは，$\mathcal{B}$ は，線型独立で，すべての $\mathbb{a} \in X$ に対し，有限集合 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ で，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}_0$ の線型結合となっているようなものが，存在すること，とする [*12]．補題 7.24 により，$\mathcal{B} \subseteq X$ が有限で，$\mathcal{B}$ が，$\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n\}$ と，重複を含まずに枚挙されているときには，$\mathcal{B}$ が X の基底であるのは，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n$ が線型独立で，すべての X の要素が，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n$ の線型結合として表わせるときである．このときには，“$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n$ は，X の基底である” とも言うことにする．ただし，この言い方をしたときには，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_n$ は，重複のない枚挙となっていることを仮定することにする．

前節で定義した K^n の基底は，ここでの意味での基底でもある (つまり，ここでの基底の定義は，前節での K^n の基底の定義の拡張になっている) ことに注意する．

次の補題は，基底の概念の意義を，説明するものとなっている:

P-7-13-0 **補題 7.25** X を，体 K 上の線型空間として，$\mathcal{B} \subseteq X$ を，X の基底とする，このとき，任意の $\mathbb{b} \in X$ は，ある有限集合 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0 = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_k\}$ と，$c_1, ..., c_k \in K \setminus \{0_K\}$ により，$\mathbb{b} = c_1\mathbb{u}_1 + \cdots + c_k\mathbb{u}_k$ と，一意に表現できる [*13]．

このことの特別な場合として，$\mathcal{B}$ が，有限集合のとき (つまり，X が有限次元のとき) には，$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n\}$ として，すべての $\mathbb{b} \in X$ に対し，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in K^n$ で，$\mathbb{b} = c_1\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n\mathbb{u}_n$ となるようなものが，一意に決まる．

---

*12 最後の条件は，(7.38) で導入することになる記法を用いると，$[\mathcal{B}]_X = X$ となること，と表現することもできます．

*13 ただし，ここでは，$\mathbb{0}_X$ は，$\mathcal{B}_0 = \emptyset$ 上の，空の線型結合によって表現されている，と考えています．また，ここで言っている，線型結合の一意性は，和の順序を除いた一意性です．

証明． すべての $\mathbb{b} \in X$ が，$\mathcal{B}$ の (有限個の) 要素の線型結合として表わせることは，基底の定義から，よい．ある $\mathbb{b} \in X$ が，異る 2 つの $\mathcal{B}$ の要素の線型結合表現 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ (ですべての係数が 0_K でないもの) を持ったとすると，

$$\mathbb{0}_X = \mathbb{b} - \mathbb{b} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$$

となり，$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ を整理すると，$\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ が，異ることから，$\mathcal{B}$ の要素の自明でない線型結合が得られる．これは，$\mathcal{B}$ が線型独立であることに，矛盾である．

$\mathcal{B}$ が，有限として，$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n\}$ とすると，X の任意の要素 $\mathbb{b}$ は，$\mathcal{B}$ の要素のうちのいくつかの線型結合として表わせるが，必要なら，この線型結合に，$0_K\mathbb{u}_i$ の形の項を加えることで，$\mathbb{b}$ は，$\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n$ の線型結合として表わせる ((7.17) により $0_K\mathbb{u}_i = \mathbb{0}_K$ となることに注意する)．ここでの証明の前半での議論から，この形の線型結合も，各 $\mathbb{b} \in X$ に対し，一意である．

□ (補題 7.25)

下の例 + 演習問題 7.30 で見るように，基底 $\mathcal{B} \subseteq X$ は，無限集合となる場合も，実際にありえる．$K = \mathbb{R}$ または，$K = \mathbb{C}$ では，K 上の線型空間 X に，自然な距離が導入されていることがあるが [*14]，そのような場合には，線型独立な無限集合 $\mathcal{B} \subseteq X$ は，それが，この距離に関して，X の稠密な線型部分空間 [*15] を生成するときに，X の基底である，と言う流儀もあるので，それと区別するために，上でのような，純粋に代数的な意味での基底を，**ハメル基底** (Hamel basis) と呼ぶこともある [*16]．　hamel-basis

次の定理 7.27 も，これまでに見てきた補題たちと同様に，見掛け上では，対応する補題 7.7 と，定理 7.11 の証明を流用して，示すことができるが，そのためには，以下のような補足が，必要になる．

例えば，$c_1\mathbb{u}_1 + c_2\mathbb{u}_2$ と，$c_2\mathbb{u}_2 + c_1\mathbb{u}_1$ は，同一の線型結合と考えています．

*14 距離については，付録 B の第 B.3 節を参照してください．

*15 “稠密” の概念については，第 B.3 節を参照してください．線型部分空間については，次の節で説明します．

*16 この名称は，一般の線型空間 X での基底 $\mathcal{B}$ の存在を，(第 II 巻で述べることになる) 選択公理と呼ばれる，古典的な数学では用いられることのない数学の公理による議論で，1905 年 (明治 38 年) の論文 [29] で示した，ハメル (Georg Hamel) にちなむものです．ただし，[29] で，実際に考察されているのは，例 7.17, (2) で見た，実数の全体を，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と見たときの，線型空間 $\mathbb{R}$ での，$\mathbb{Q}$ 上の基底の存在です．

X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_k \in X$ とし，$A = [a_{i,j}]$ を，K 上の $k \times \ell$-行列とするとき，

x-7-12 $$(7.26) \quad [\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A := [\, \textstyle\sum_{i \in \overline{k}} a_{i,1} \mathbb{b}_i \;\cdots\; \sum_{i \in \overline{k}} a_{i,\ell} \mathbb{b}_i \,]$$

とする．(7.26) の左辺の $[\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]$ は，X の要素を，成分とする，k-次元の行ベクトルで，この式の右辺は，X の要素成分とする，ℓ-次元の行ベクトルである．

この定義は，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_k \in K^n$ としたときの，$n \times k$-行列 $B = [\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]$ と，K 上の $k \times \ell$-行列 $A = [a_{i,j}]$ に対する，BA の定義の，一般化になっていることに，注意する．

P-7-14 **補題 7.26** X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_k \in X$ とする．A と，B を，それぞれ，K 上の $k \times \ell$-行列と，$\ell \times m$-行列とするとき，

$$([\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A)B = [\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,](AB)$$

が，成り立つ．

証明． $[\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A$ は，X の要素を成分とする ℓ-次元の行ベクトルだから，定義 (7.26) により，$([\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A)B$ は，X の要素を成分とする，m-次元の行ベクトルである．一方，$[\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,](AB)$ も，定義 (7.26) により，X の要素を成分とする，m-次元の行ベクトルである．

$A = [a_{h,i}]$, $B = [b_{i,j}]$ とする．このとき，各 $j \in \overline{m}$ に対し，

$$([\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A)B \text{ の } j \text{ 成分} \underbrace{=}_{\text{定義 (7.26) による}} \textstyle\sum_{i \in \overline{\ell}} b_{i,j} \Big([\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,]A \text{ の } i\text{-成分} \Big)$$

$$\underbrace{=}_{\text{定義 (7.26) による}} \textstyle\sum_{i \in \overline{\ell}} b_{i,j} \Big(\sum_{h \in \overline{k}} a_{h,i} \, \mathbb{b}_h \Big) \underbrace{=}_{\text{(7.15) と (7.13) の繰り返し適用}} \textstyle\sum_{h \in \overline{k},\, i \in \overline{\ell}} (a_{h,i} \, b_{i,j}) \mathbb{b}_h$$

$$\underbrace{=}_{\text{(7.14) の繰り返し適用}} \textstyle\sum_{h \in \overline{k}} \Big(\sum_{i \in \overline{\ell}} a_{h,i} b_{i,j} \Big) \mathbb{b}_h \underbrace{=}_{\text{行列の積の定義 (3.2)}} \textstyle\sum_{h \in \overline{k}} \Big(AB \text{ の } (h,j)\text{-成分} \Big) \mathbb{b}_h$$

$$\underbrace{=}_{\text{定義 (7.26) による}} [\, \mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_k \,](AB) \text{ の } j \text{ 成分}$$

により，求める等式が，得られる．ただし，上で "⋯ の繰り返し適用" とした箇所は，厳密には，帰納法により証明する必要がある．"⋯ の繰り返し適用" による証明と，帰納法による証明の違いを説明するためには，数理論理学の知識が必要となるため，本書では，それには踏み込まないが，興味のある読者は，[21] を参照されたい．

□ (補題 7.26)

定理 7.27 (補題 7.7 と，定理 7.11 に対応する)．　X を，K 上の線型空間として，$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n$ を，X の基底とする．このとき， P-7-15

（1）　任意の $k > n$ と，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k \in X$ に対し，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ は，線型独立でない．

（2）　$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ を，X の任意の基底とするとき，$k = n$ である．

（3）　任意の $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n \in X$ に対し，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ が，線型独立なら，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ は，X の基底である．

証明． (1):　$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n$ が，X の基底であることから，各 $j \in \overline{k}$ に対し，$c_{i,j} \in K$, $i \in \overline{n}$ で，

$$\mathbb{a}_j = c_{1,j}\,\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{n,j}\,\mathbb{b}_n$$

となるものが取れる．C を $n \times k$-行列 $[c_{i,j}]$ とすると，

$$(7.27)\quad [\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,]C = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_k\,]$$ x-7-14

である．$k > n$ だから，系 5.17 により，$\mathbb{0}_k$ と異る，$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} \in K^k$ で，

$$(7.28)\quad C\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} = \mathbb{0}_n$$ x-7-15

となるものが取れる．$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$ を，(7.27) の両辺に，右から掛けると，

$$[\mathbb{0}_X] = [\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,]\mathbb{0}_n \underbrace{=}_{(7.28)} [\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,]\Bigl(C\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}\Bigr)$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 }7.26}\left(\left[\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,\right] C\right)\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} \underbrace{=}_{(7.27)} \left[\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_k\,\right]\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} = \left[\,\textstyle\sum_{j\in\overline{k}} d_j\mathbb{a}_j\,\right]$$

である．したがって，$\sum_{j\in\overline{k}} d_j\mathbb{a}_j = \mathbb{0}_X$ である．この線型結合は，自明でないから，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ は，線型独立でない．

(2):　$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in X$, $k < n$ で, $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ が, X の基底とすると, ($\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ と $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$, および，$n$ と，k の役割を逆転して，これらに) (1) を応用すると，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は，線型独立でないことが分かるが，これは，仮定に矛盾である．

(3):　(1) と，(2) を用いて，定理 7.11, (2) の証明でと全く同様に，示せる (演習!).　❑ (定理 7.27)

K 上の線型空間 X が，有限個の要素からなる基底を持つときには，定理 7.27, (2) により，X の基底の要素の数は，一意に決まる．そのような数を，X の**次元** (dimension) とよび，$\dim(X)$ と表わす．$\dim(X) \in \mathbb{N}$ である (実は，以下の例 7.28 でのように，$\dim(X) = 0$ の場合もあり得る)．

X が，このような次元を持つとき，X は，**有限次元**である，という．

Ex-7-4 **例 7.28** $\mathbb{0}$ を，何らかの数学的対象とする (例えば，$\mathbb{0} = \emptyset$ とする)．このとき，$X = \{\mathbb{0}\}$ に，演算 $+$ と，体 K の要素によるスカラー倍を，

x-7-16 (7.29)　$\mathbb{0} + \mathbb{0} := \mathbb{0}$,

x-7-17 (7.30)　$r\,\mathbb{0} := \mathbb{0}\ ,\ r \in K$

により定義すると，X は，K 上の線型空間となる．X の要素の空列の線型結合は，$\mathbb{0}$ のこととする，という前にも述べた取り決めを採用すると，X は空集合から生成されるから，(X の部分集合としての) 空集合 $\emptyset$ は，この X の基底となっている．したがって，$\dim(X) = 0$ である．そこで，このような X を，**ゼロ次元線型空間** (zero dimensional linear space) とよぶことにする．❑

Ex-7-5 **例 7.29** $n \in \mathbb{N}$ とするとき，$\mathbb{e}_1^n, \ldots, \mathbb{e}_n^n$ は，K^n の基底である (例 7.2 を参照)．したがって，K^n は，K 上の，n 次元の線型空間である (つまり $\dim(K^n) = n$ である)．❑

次元が有限でない線型空間も，存在する．

例 + 演習問題 7.30 I を，無限集合とする．各 $i \in I$ に対し，$\mathbb{e}_i^I : I \to K$ を，$j \in I$ に対し， Ex-7-6

$$(7.31)\quad \mathbb{e}_i^I(j) = \begin{cases} 1_K, & j = i \text{ のとき} \\ 0_K, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$ x-7-18

として，$\mathcal{B} := \{\mathbb{e}_i^I : i \in I\}$ とする．$\mathcal{B} \subseteq {}^{\underline{I}}K \subseteq {}^{I}K$ で，$\mathcal{B}$ は，(演習問題 7.16 と，例 7.15 での線型空間 ${}^{\underline{I}}K$，または，${}^{I}K$ の部分集合として) K-線型独立である．

特に，${}^{\underline{I}}K$ も，${}^{I}K$ も，有限次元線型空間ではない．

$\mathcal{B}$ は，${}^{\underline{I}}K$ の基底だが，${}^{I}K$ の基底ではない．

証明． $\mathcal{B}$ が，${}^{I}K$ の基底でないことは，具体的な例では，例えば，$\mathbb{d} \in {}^{I}K$ を，すべての $i \in I$ に対して $\mathbb{d}(i) := 1_K$ として定めると，$\mathbb{d}$ が，$\mathbb{e}_i^I$, $i \in I$ のうちの，どの有限個の線型結合としても表わせないことから，従う．

他の主張は容易に確かめられる (演習!). □ (例 + 演習問題 7.30)

無限集合 I に対する，K 上の線型空間 ${}^{I}K$ にも，基底が存在するが，この存在証明には，選択公理と呼ばれる古典的な数学 (19 世紀の終りくらいまでの数学のほとんどを含む) では用いられることのない，数学の公理が，必要となる．これについては，第 II 巻で改めて取り上げることになる．

次の補題での，集合 S の有限性の条件は，実は，必要ないが，無限の S に対する証明では，選択公理の帰結と，超限帰納法による議論が，必要になる．これらについては，第 II 巻で触れる． ♦ 第 II 巻に選択公理に関する章を入れる

♦ 第 II 巻で補題 7.31 の無限次元版を証明する．

補題 7.31 X を，体 K 上の線型空間として，$S \subseteq X$ を，有限集合とする．このとき，$\mathcal{B} \subseteq S$ で， P-7-15-a

(7.32) $\mathcal{B}$ は，K 上線型独立である; x-7-18-0

(7.33) 任意の $\mathbb{a} \in S$ は，$\mathcal{B}$ の要素の線型結合として表わせる x-7-18-1

を，満たすものが存在する[*17]．

[*17] (7.33) は，次の節で導入することになる記法や，用語を用いると，$[\mathcal{B}]_X = [S]_X$，つまり，$\mathcal{B}$ と S は，X の同一の線型部分空間を生成すること，と表現することができます．

証明． $\#(S)+1$ に関する帰納法で示す．

$\#(S)=0$ のとき (つまり $\#(S)+1=1$ のとき) には，$\mathcal{B}=\emptyset$ とすればよい．$n>0$ で，すべての $\#(S)=n-1$ となる $S\subseteq X$ に対し，補題の主張が，成り立つとして，$\#(S)=n$ となる $S\subseteq X$ に対しても，補題の主張が，成り立つことを示す．

$S=\{\mathbb{a}_1,\dots,\mathbb{a}_n\}$ とする．帰納法の仮定から，$S_0=\{\mathbb{a}_1,\dots,\mathbb{a}_{n-1}\}$ $(=S\setminus\{\mathbb{a}_n\})$ に対しては，補題の主張が成り立つから，ある $k\le n-1$ と，$\mathbb{b}_1,\dots,\mathbb{b}_k\in\{\mathbb{a}_1,\dots,\mathbb{a}_{n-1}\}$ で，$\mathcal{B}_0=\{\mathbb{b}_1,\dots,\mathbb{b}_k\}$ が，(S_0 に対し)，(7.32), (7.33) を満たすようなものが取れる．

もし，$\mathbb{a}_n$ が，$\mathbb{b}_1,\dots,\mathbb{b}_k$ の K 上の線型結合で表わされるなら，$\mathcal{B}=\mathcal{B}_0$ は，既に，求めるようなものとなっている．そうでなければ，補題 7.23 により，$\mathcal{B}_0\cup\{\mathbb{a}_n\}$ は，線型独立となるから，$\mathcal{B}=\mathcal{B}_0\cup\{\mathbb{a}_n\}$ が，求めるようなものである．　□ (補題 7.31)

P-7-15-0 **補題 7.32** X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，すべての $\mathbb{a}\in X$ が，$\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n$ の線型結合として表わせるものとする[*18]．$\mathbb{v}_1,\dots,\mathbb{v}_k\in X$ として，すべての $i\in\overline{n}$ に対し，$\mathbb{u}_i$ が，$\mathbb{v}_1,\dots,\mathbb{v}_k$ の，K 上の線型結合として表わせるなら，すべての $\mathbb{a}\in X$ は，$\mathbb{v}_1,\dots,\mathbb{v}_k$ の，K 上の線型結合として表わせる．

証明． 仮定から，各 $i\in\overline{n}$ に対し，$c^i_1,\dots,c^i_k\in K$ で，

x-7-19 $$(7.34)\quad \mathbb{u}_i=\sum\nolimits_{j\in\overline{k}}c^i_j\mathbb{v}_j$$

となるものが取れる．仮定により，任意の $\mathbb{a}\in X$ に対し，$d_0,\dots,d_n\in K$ で，$\mathbb{a}=\sum_{i\in\overline{n}}d_i\mathbb{u}_i$ となるものが取れる．このとき，(7.13), (7.14), (7.15) の繰り返し適用により，

$$\mathbb{a}=\sum\nolimits_{i\in\overline{n}}d_i\mathbb{u}_i\underbrace{=}_{(7.34)\text{ による}}\sum\nolimits_{i\in\overline{n}}d_i\Bigl(\sum\nolimits_{j\in\overline{k}}c^i_j\mathbb{v}_j\Bigr)=\sum\nolimits_{i\in\overline{n},j\in\overline{k}}(d_ic^i_j)\mathbb{v}_j$$
$$=\sum\nolimits_{j\in\overline{k}}\Bigl(\sum\nolimits_{i\in\overline{n}}d_ic^i_j\Bigr)\mathbb{v}_j$$

である．　□ (補題 7.32)

---
*18 この条件から，$\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n$ が線型独立なら，$\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n$ は，X の基底となりますが，ここでは，$\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n$ の線型独立は，特に，仮定していません．

補題 7.33 X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n\}$ を X の基底とする．$k < n$ で，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k \in X$ とするとき [*19]，$i^* \in \overline{n}$ で，$\mathbb{u}_{i^*}$ が，$\mathbb{v}_1,..., \mathbb{v}_k$ 上で K-独立となるものが取れる． P-7-15-1

証明． 補題 7.31 により，$k_0 \leq k$ と $\mathbb{w}_1,..., \mathbb{w}_{k_0} \in \{\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k\}$ で，$\mathbb{w}_1,..., \mathbb{w}_{k_0}$ は線型独立で，$\{\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k\}$ のすべての要素は，$\mathbb{w}_1,..., \mathbb{w}_{k_0}$ の，K 上の線型結合として表わされるようなものが存在する．もし，すべての $i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{u}_i$ が，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k$ 上 K-独立でないなら (つまり，もし，$\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n$ のどれもが，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k$ の線型結合として表わされるとすれば)，補題 7.32 により，すべての $\mathbb{a} \in X$ は，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k$ の K 上の線型結合として表現できる．したがって，再び，補題 7.32 により，すべての $\mathbb{a} \in X$ は，$\mathbb{w}_1,..., \mathbb{w}_{k_0}$ の，K 上の線型結合として表わされるから，$\mathbb{w}_1,..., \mathbb{w}_{k_0}$ は X の基底である．ところが，$k_0 < n$ だから，これは，補題 7.27, (2) により，矛盾である． ❏ (補題 7.33)

次の定理でも，(選択公理の下では) 線型空間 X が有限次元である，という条件は落せる (第 II 巻を参照)．

定理 7.34 (シュタイニッツ [*20] の基底の入れ替え定理 [61])　X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n\}$ を，X の基底とする (特に，$n = \dim(X)$ とする)．このとき，任意の，線型独立な $\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k \in X$, $k \leq n$ に対し，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_{n-k} \in \mathcal{B}$ を選んで，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k$, $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_{n-k}$ が，X の基底となるようにできる． P-7-16

証明． $k = n$ なら，補題 7.27, (3) により，$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k$ は，既に，X の基底となっているからよい．そうでないときには，補題 7.33 により，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_{n-k} \in \mathcal{B}$

[*19] ここでは，$k = 0$ で，“$\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_k \in X$” が空の列のときも，場合として含まれていることに注意します．ちなみに，空な列 (あるいは，X の空な部分集合) $\emptyset$ は，無内容的解釈 (21 ページを参照) により，線型独立であることに注意します．

[*20] ドイツの数学者シュタイニッツ (1871–1928) は，[61] で，それまで具体的な個別の対象として研究されてきていた様々な体の，一般的な理論を確立して，20 世紀の代数学への扉を開いた人です．現代的な代数学の最初の教科書の一つである [68] の著者として知られている，ファン・デル・ヴェルデン (1903–1996) は，現代代数学の始まりに関する自身の回想を語っている 1979 年の講演の講演録 [69] で，シュタイニッツの [61] の重要性を “どれだけ高く評価したとしても過大評価にならない” と述べています．

なお，[69] はドイツ語ですが，ロケットによる，[56] は，現代代数学の成立期に関する，英語で書かれた，優れた論説で，[69] からも多く文章が英訳と併記して引用されています．

を，

すべての $i \in \overline{n-k}$ に対し，$\mathbb{a}_i$ は，$\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k\} \cup \{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_{i-1}\}$ 上で，K-独立である

を満たすように，順次に取ることができる．ただし，$i = 1$ のときには，ここでの $\{\mathbb{a}_1, \dots, \underbrace{\mathbb{a}_{i-1}}_{=\mathbb{a}_0}\}$ は，空集合 $\emptyset$ のこと，とする．

補題 7.22 により，$\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k\} \cup \{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_{n-k}\}$ は，K 上で線型独立だから，補題 7.27, (3) により，X の基底である． □ (定理 7.34)

7.3 線型部分空間とアファイン部分空間

subspace

7.3.1 線型部分空間

lin-subspaces $X = \langle X, +, \cdot, \mathbb{0} \rangle$ を，体 K 上の線型空間とするとき，X の空でない部分集合 $Y \subseteq X$ が，**X の線型部分空間** (linear subspace) である，とは，

x-7-19-0 (7.35) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in Y$, $r \in K$ に対し，$\mathbb{a} + \mathbb{b}$, $r\,\mathbb{a} \in Y$ となる

こととする．体 K 上の線型空間 X の Y が，係数体 K に関する線型部分空間であることを強調する必要があるときには，“**X の K 上の線型部分空間**” と言うことにする．

P-7-17 **補題 7.35** X を，体 K 上の線型空間として，Y を，X の空でない部分集合とする．このとき，

（1） Y が，X の線型部分空間なら，$\mathbb{0} \in Y$ である．

（2） Y が，X の線型部分空間であることと，

x-7-20 (7.36) すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in Y$, $r, s \in K$ に対し，$r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} \in Y$ が成り立つ

ことは，同値である．

証明． (1): $Y \neq \emptyset$ だから，$\mathbb{a} \in Y$ が取れるが，$\mathbb{0} \overbrace{=}^{0\text{ 倍律 (7.17)}} 0\,\mathbb{a} \underbrace{\in}_{(7.35)} Y$ である．

(2): Y が X の線型部分空間なら，

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in Y$, $r, s \in K$ に対し，(7.35) により，$r\,\mathbb{a}$, $s\,\mathbb{b} \in Y$ だから，再び (7.35)

により，$r\mathbb{a}+s\mathbb{b}\in Y$ である．

逆に，(7.36) が，成り立つとすると，特に，(7.36) で，$r=s=1_K$ とすると，(1 倍律 (7.16) により) $\mathbb{a},\mathbb{b}\in Y$ に対し，$\mathbb{a}+\mathbb{b}\in Y$ となることが分かる．同様に，特に，(7.36) で，$s=0_K$ とすると，(0 倍律 (7.17) により) $\mathbb{a}\in Y$ で $r\in K$ なら，$r\mathbb{a}\in Y$ であることが分かる．　❏ (補題 7.35)

Y が，$X=\langle X,+_X,\cdot_X,\mathbb{0}_X\rangle$ の線型部分空間なら，Y は，X の和とスカラー倍に関して，閉じている (つまり，(7.35) が成り立つ) から，簡単のために，X の和 $+_X$ とスカラー倍 $\cdot_X$ を，Y に制限したものを，それぞれ $+_Y$，$\cdot_Y$ と書くことにして[*21]，$\mathbb{0}_Y:=\mathbb{0}_X$ とすると，$Y=\langle Y,+_Y,\cdot_Y,\mathbb{0}_Y\rangle$ は，再び K 上の線型空間になる[*22]．

例 7.36　(1)　$X=\langle X,+_X,\cdot_X,\mathbb{0}_X\rangle$ を，K 上の線型空間とするとき，$\{\mathbb{0}_X\}$ は，X の線型部分空間である．　Ex-7-7

(2)　X を，K 上の線型空間とするとき，X は，X 自身の線型部分空間である．

(3)　$k,n\in\mathbb{N}$, $k\leq n$ とするとき，

$$(7.37)\quad Y=\{\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\in K^n\ :\ a_1,\ldots,a_k\in K\}$$ x-7-21

は，K^n の線型部分空間である[*23]．　❏

上の例 7.36, (2) に配慮して，線型空間 X の線型部分空間で X の真の部分集合となっているものを，X の**真の線型部分空間** (strict linear subspace) とよぶことにする．

X を，体 K 上の線型空間として，$S\subseteq X$ とするときに，

[*21] 特に，$\cdot_Y:K\times Y\to Y$; $\langle r,\mathbb{a}\rangle\mapsto r{}_X\mathbb{a}$ です．

[*22] 線型空間の公理 (7.10)〜(7.17) は，恒等式 (つまり，“すべての … に対し，等式 … が成り立つ”，という形の主張) からなるので，これらの恒等式が，X で成り立てば，X の演算を Y に制限したものを，演算として持っている Y でも，当然，成り立つことに注意します．

[*23] 後に，例 7.36, (3) が，有限次元の線型空間と，その部分空間の関係性を，完全に捉えるものになっていることを，示します (補題 7.76 を，参照してください)．

x-7-22 (7.38) $[S]_X := \{\mathbb{b} \in X : \mathbb{b}$ は, S の要素の K 上の線型結合として表わせる $\}$

$$= \{\textstyle\sum_{i\in\overline{k}} c_i\mathbb{a}_i : k \in \mathbb{N}^*,\, c_1, \ldots, c_k \in K,\, \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in S\}$$

とする．$[S]_X$ が，係数体 K 上の線型結合の全体からなる集合，として構成さていることを強調したいときには，$[S]_X$ を，$[S]_X^K$ とも書くことにする．

$[S]_X$ は，(X で) S **の生成する線型部分空間**，あるいは，S **の張る線型部分空間**とよばれるが， 実際，この命名が示唆するように，任意の $S \subseteq X$ に対して，$[S]_X$ が，X の線型部分空間で，$[S]_X$ は，S を部分集合として含む線型部分空間のうち，($\subseteq$ に関して) 最小のものになることは，以下の補題 7.38 で見るように，容易に示せる．

P-7-18 **補題 7.37** X を，体 K 上の線型空間として，$S \subseteq X$ とする． このとき，

（1） $S \subseteq X$ が有限で，$S = \{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k\}$ なら，

x-7-23 (7.39) $[S]_X = \{c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_k\mathbb{a}_k : c_1, \ldots, c_k \in K\}$

である．

（2） $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in [S]_X$ なら，$n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n \in S$, $c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n \in K$ で，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b} = d_1\mathbb{a}_1 + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ となるようなものが取れる．

証明． 以下の証明のアイデアは，既に補題 7.25 の証明で述べられているものである．(1): 等式 (7.39) での "$\supseteq$" は，明らかだから，"$\subseteq$" のみを示す． $\mathbb{a} \in [S]_X$ とすると，$\mathbb{a}$ は，ある $\ell \leq k$ に対し，S の ℓ 個の要素の線型結合として表わせる．必要なら，S の要素を並べ替えることで，$\mathbb{a}$ は，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_\ell$ の線型結合 $\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_\ell\mathbb{a}_\ell$ となっているとしてよい．このとき，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_\ell\mathbb{a}_\ell + 0\,\mathbb{a}_{\ell+1} + \cdots + 0\,\mathbb{a}_k$ とも表わせるから，$\mathbb{a}$ は (7.39) の右辺に属すことが，分かる．

(2): $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in [S]_X$ とすると，$n \in \mathbb{N}$ と，互いに異る $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \in S$ と，$k_1, k_2 \in \overline{n}$, $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$ と，$c_1, \ldots, c_{k_2}$, $d_{k_1}, \ldots, d_n \in K$ で，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{k_2}\mathbb{a}_{k_2}$, $\mathbb{b} = d_{k_1}\mathbb{a}_{k_1} + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ となるものが取れる．

ここで，$c_{k_2+1} = \cdots = c_n := 0_K$, $d_1 = \cdots = d_{k_1-1} := 0_K$ とすれば，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b} = d_1\mathbb{a}_1 + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ である． □ (補題 7.37)

補題 7.38 X を，体 K 上の線型空間として，$S \subseteq X$ とする．このとき， P-7-19

（1） $[S]_X$ は，X の線型部分空間である．

（2） $S \subseteq [S]_X$ である．更に，任意の X の線型部分空間 Y で，$S \subseteq Y$ となるものに対し，$[S]_X \subseteq Y$ となる．

（3） Y^* を，X の線型部分空間として，$S \subseteq Y^*$ とする．このとき，

(7.40) すべての X の部分空間 Y に対し，$S \subseteq Y$ なら，$Y^* \subseteq Y$ となる x-7-23-0

なら，$Y^* = [S]_X$ である．

証明． (1): $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in [S]_X$, $r \in K$ とする．このとき，補題7.37, (2) により，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n \in S$ と $c_1, \dots, c_n$, $d_1, \dots, d_n \in K$ で，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$, $\mathbb{b} = d_1\mathbb{a}_1 + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ となるものが取れる．このとき，

$$\mathbb{a}+\mathbb{b} = (c_1+d_1)\mathbb{a}_1+\cdots+(c_n+d_n)\mathbb{a}_n, \qquad r\,\mathbb{a} = (rc_1)\mathbb{a}_1+\cdots+(rc_n)\mathbb{a}_n$$

だから，$[S]_X$ の定義から，$\mathbb{a}+\mathbb{b}, r\mathbb{a} \in [S]_X$ である．

(2): $\mathbb{a} \in S$ なら，$\mathbb{a} = 1\,\mathbb{a}$ ($\mathbb{a}$ (のみ) の，重み 1 を持つ線型結合) だから，$\mathbb{a} \in [S]_X$ である．

$Y \subseteq X$ を，S を含む，X の K 上の線型部分空間とする．このとき，$k \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で，

(7.41) $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k \in S$, $r_1, \dots, r_k \in K$ なら，$r_1\mathbb{a}_1 + \cdots + r_k\mathbb{a}_k \in Y$ である x-7-24

が，成り立つことを，示す．$[S]_X \subseteq Y$ は，このことから従う．

$k = 1$ のときには，$\mathbb{a}_1 \in S \subseteq Y$ だから，(7.35) により $r_1\mathbb{a}_1 \in Y$ である．

k に対して，主張が成り立つとすると，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_{k+1} \in S$ $r_1, \dots, r_{k+1} \in K$ に対し，

$$r_1\mathbb{a}_1 + \cdots + r_{k+1}\mathbb{a}_{k+1} = \underbrace{r_1\mathbb{a}_1 + \cdots + r_k\mathbb{a}_k}_{\in Y,\ \text{帰納法の仮定による}} + \underbrace{r_{k+1}\mathbb{a}_{k+1}}_{\in Y,\ k=1\ \text{のときと同様に示せる}} \overbrace{\in}^{(7.35)} Y$$

である．したがって，$k+1$ に対しても，主張が成り立つ．

(3): Y^* と S を，(3) でのようなものとすると，(7.40) と，(1) と，(2) の前半から，$Y = [S]_X$ を考えると，$Y^* \subseteq [Y^*]_X \subseteq [S]_X$ である．一方，(2) の後半から $[S]_X \subseteq Y^*$ だから，((2.21) により) $[S]_X = Y^*$ である． ❑ (補題 7.38)

次は，補題 7.38 から容易に導ける:

Exerc-7-0-0 **演習問題 7.39** X を，体 K 上の線型空間とする．このとき，

（1） $[\emptyset]_X = [\{0_X\}]_X = \{0_X\}$ である．

（2） $S \subseteq S' \subseteq X$ なら，$[S]_X \subseteq [S']_X \subseteq X$ である．

（3） Y が，X の線型部分空間なら，$Y = [Y]_X$ である．特に，任意の $S \subseteq X$ に対し，$[[S]_X]_X = [S]_X$ が成り立つ． □

記法 "$[\cdot]_X$" を使うと，$\mathcal{B} \subseteq X$ が X の基底であることの，次のような言い換えができる:

Exerc-7-1 **演習問題 7.40** X を，K 上の線型空間とする．このとき，（1） $\mathcal{B} \subseteq X$ が，
x-7-24-0 x-7-24-1 X の基底であることは，(7.42)： $\mathcal{B}$ は，線型独立で，(7.43)： $[\mathcal{B}]_X = X$ となる，ちょうどそのときである．

（2） X が，有限次元のときには，$\mathcal{B} \subseteq X$ が，X の基底となるのは，
x-7-24-2 x-7-24-3 (7.44)： $\#(\mathcal{B}) \leq \dim(X)$ で，(7.45)： $[\mathcal{B}]_X = X$ となる，ちょうどそのときである．

証明． (1): $[\mathcal{B}]_X$ の定義から，

$$[\mathcal{B}]_X = X \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } x \in X \text{ は，} \mathcal{B} \text{ の要素の，} K \text{ 上の線型結合として表わせる}$$

となることからよい．

(2): "$\Rightarrow$": は，明らかである ($\#(\mathcal{B}) \leq \dim(X)$ は，$\#(\mathcal{B}) = \dim(X)$ となること (定理 7.27, (2)) からよい)．"$\Leftarrow$": (7.45) と，補題 7.31 と，補題 7.32 により，$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ で，$\mathcal{B}'$ は X の基底となっているようなものが取れる．定理 7.27 により，$\#(\mathcal{B}') = \dim(X)$ だから，(7.44) により，実は，$\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ となっていることが，従う． □ (演習問題 7.40)

線型空間の部分集合が，線型独立であることも，線型空間の部分集合の生成する部分空間の概念を用いて，極小な生成系であること，として特徴付けることができる (以下の定理 7.42 を参照)．この証明のために，まず，補題 7.32 の拡張となっている，次の演習問題 7.41 を見ておく．これは，補題 7.32 と同様

に，直接証明することもできるが，演習問題 7.39, (2) と補題 7.38, (2) からも導ける．

演習問題 7.41 X を，体 K 上の線型空間として，$S' \subseteq S \subseteq X$ とするとき，S の，すべての要素が，S' の要素 (のうちのいくつか) の線型結合として表わせるなら，$[S']_X = [S]_X$ である． ❑ Exerc-7-2

定理 7.42 X を，K 上の線型空間とする．このとき，$\mathcal{B} \subseteq X$ が，線型独立であるのは， P-7-20

(7.46) すべての $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ に対して，$[\mathcal{B}']_X = [\mathcal{B}]_X$ となるなら，$\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ であること， x-7-24-4

または，この命題の含意の部分の対偶をとって得られる

(7.46)' すべての $\mathcal{B}' \subsetneqq \mathcal{B}$ に対して，$[\mathcal{B}']_X \subsetneqq [\mathcal{B}]_X$ となること，

と同値である．

証明． "$\mathcal{B}$ が線型独立 $\Rightarrow$ (7.46)": 対偶を示す．$\mathcal{B}' \subsetneqq \mathcal{B}$ で，

(7.47) $[\mathcal{B}']_X = [\mathcal{B}]_X$ x-7-25

となるものが存在するとする．$\mathbb{a} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ とする．このとき，(7.47) により，$\mathbb{a}$ は，$\mathcal{B}'$ の要素の線型結合として表わせるから，$\mathcal{B}$ は線型独立でない: $\mathbb{a} = \mathbb{0}_X$ なら，補題 7.21, (2) により，$\mathcal{B}$ は線型独立でない．$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}_X$ なら，$\mathbb{a}$ の $\mathcal{B}'$ の要素の線型結合としての表現の等式を移項すると，$\mathcal{B}$ の要素による $\mathbb{0}_X$ の自明でない線型結合による表現が得られるから，この場合にも $\mathcal{B}$ は線型独立でない．

"$\mathcal{B}$ が線型独立 $\Leftarrow$ (7.46)": こちらも，対偶を示す．$\mathcal{B}$ が線型独立でないなら，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k \in \mathcal{B}$ で線型独立でないものが存在するが，

(7.48) $c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k = \mathbb{0}_X$ x-7-25-0

を自明でない線型結合として，一般性を失なうことなく $c_1 \neq 0_K$ とすると，線型結合 (7.48) の等式の両辺を c_1 で割って移項することで，$\mathbb{b}_1 = d_2\mathbb{b}_2 + \cdots + d_k\mathbb{b}_k$ という形の等式が得られる．したがって，$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{\mathbb{b}_1\}$ とすると，$\mathcal{B}' \subsetneqq \mathcal{B}$

だが，演習問題 7.41 により，$[\mathcal{B}']_X = [\mathcal{B}]_X$ である．

□ (定理 7.42)

次は，直観的に明らかに思えるためか，他の教科書では，明示的に述べられていないことが多い:

P-7-21 **補題 7.43** X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，Y を X の部分空間とすると，Y も有限次元の線型空間で，$\dim(Y) \le \dim(X)$ が成り立つ．Y が，X の真の線型部分空間となるのは，$\dim(Y) < \dim(X)$ となる，ちょうどそのときである．

証明． $\mathcal{B}$ を，K 上で線型独立な，Y の部分集合とすると，$\mathcal{B}$ は，X の線型独立な部分集合でもあるから，補題 7.27, (1) により，$\#(\mathcal{B}) \le \dim(X)$ である．したがって，

x-7-26 (7.49)　$n_0 := \max\{\#(\mathcal{B}) : \mathcal{B}$ は，K 上で独立な，Y の部分集合 $\}$

とすると，n_0 は，well-defined で [*24]，$n_0 \le \dim(X)$ となる．Y の，線型独立な部分集合 $\mathcal{B}^*$ で，$\#(\mathcal{B}^*) = n_0$ となるものを取ると，$\mathcal{B}^*$ は，Y の基底である (そうでないとすると，サイズが n_0 より大きな Y の K 上線型独立な部分集合が作れてしまい矛盾である)．したがって $\dim(Y) = n_0 \le \dim(X)$ である．

$\dim(Y) < \dim(X)$ なら，明らかに，$Y \ne X$ だが，$\dim(Y) = \dim(X)$ なら，定理 7.27, (3) により，Y の基底は X の基底ともなるから，$X = Y$ である．

□ (補題 7.43)

上の補題が全く自明なもの，とも言えないことは，シュタイニッツの規定入れ換え定理定理 7.34 など，本章での多くの主張と異り，この補題の後半では，X の次元の有限性が落せないことからも，明らかであろう:　例えば $E := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ として，$E \subsetneqq \mathbb{N}$ だから，

$$Y := \{f \in {}^{\mathbb{N}}K : \text{すべての } k \in E \text{ に対し } f(k) = 0_K\}$$

とすると，Y は K 上の線型空間 $X := {}^{\mathbb{N}}K$ の真の線形部分空間となるが，$\dim(Y)$ も $\dim(X)$ も $\aleph_0$ (可算無限) である (この例も含め，無限次元の線型

[*24] "well-defined" という表現については，付録 B の脚注*8 を参照してください．

空間については，第 II 巻で詳しく考察する).

次の定理でも，実は，X が有限次元である，という条件は，落とすことができるが，この条件を外した，拡張された主張の証明には，選択公理が必要となり，この拡張された主張の一番自然な証明は，超限帰納法を用いるものである．このことについても，第 II 巻で見ることになる．

♦ 第 II 巻の選択公理と超限帰納法に関する章で，次の定理の無限版を証明する

定理 7.44 (基底の拡張定理)　X を，K 上の有限次元の線型空間として，Y を X の線型部分空間とする．$\mathcal{B}_0 \subseteq Y$ を Y の基底とするとき，X の基底 $\mathcal{B}$ で $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ となるものが存在する． P-7-22

証明． $n = \dim(X)$ とする．$\mathcal{B}_1$ を，X の基底とする．補題 7.43 により，$\#(\mathcal{B}_0) \leq n$ である．$n_0 = \#(\mathcal{B}_0)$ として，$\mathcal{B}_0 = \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{n_0}\}$ とすると，$\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{n_0}$ は，X でも K 上で線型独立だから，シュタイニッツの基底の入れ替え定理 (定理 7.34) により，$\mathbb{b}_{n_0+1}, ..., \mathbb{b}_n \in \mathcal{B}_1$ を，$\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_{n_0}, \mathbb{b}_{n_0+1}, ..., \mathbb{b}_n\}$ が，X の基底となるように取れるが，この $\mathcal{B}$ は，求めるようなものである．　□ (定理 7.44)

上の定理と，次の節で導入する，2 つの線型空間の同型の概念を用いると，例 7.36 は，(有限次元の) 線型空間の部分空間に関する状況を，既に，完全に網羅していることが分かる (補題 7.76 を参照).

定理 7.45 X を，体 K 上の線型空間とする．(1)　X' を，X の K 上の線型部分空間とすると，補題 7.35 の後で述べたように，X' 自身も K 上の線型空間となるが，X'' を，X' の K 上の線型部分空間とすると，X'' は，X の線型部分空間でもある． P-7-22-0

(2)　X' と X'' を，X の K 上の線型部分空間とすると，$X' \cap X''$ も X の K 上の線型部分空間である．

(3)　X' と X'' を，X の K 上の線型部分空間として，$\mathcal{B}$ を，$X' \cap X''$ の K 上の基底とする．$\mathcal{B}', \mathcal{B}'' \supseteq \mathcal{B}$ を，それぞれ，X' と X'' の基底とするとき，$\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ は，$[X' \cup X'']_X$ の，K 上の基底となる．

(4)　X' と，X'' を，X の K 上の有限次元の線型部分空間とするとき，$[X' \cup X'']_X$ も，有限次元で，

$$\dim([X' \cup X'']_X) = \dim(X') + \dim(X'') - \dim(X' \cap X'')$$

が成り立つ．

証明． (1):　線型部分空間の定義から，明らかである．

(2):　$X' \cap X''$ が，補題 7.35, (2) での条件を，満たすことを示す．集合の共通部分の定義 (2.3) を，思い出すと，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X' \cap X''$ で，$r, s \in K$ とするとき，$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X'$ かつ $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X''$ だから，X' も，X'' も，X の線型部分空間であることから，$r\mathbb{a} + s\mathbb{b} \in X'$ かつ，$r\mathbb{a} + s\mathbb{b} \in X''$, つまり，$r\mathbb{a} + s\mathbb{b} \in X' \cap X''$ である．

(3):　演習問題 7.41 により，$[\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'']_X = [X' \cup X'']_X$ である．したがって，$\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ が，K 上で線型独立であることを，示せばよい．

そうでなかったとすると，

x-7-26-a-0　(7.50)　$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}''\ (= \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B})$

と，$\mathbb{b}_{k+1}, \ldots, \mathbb{b}_n \in \mathcal{B}''$ で，自明でない K 上の線型結合

x-7-26-a　(7.51)　$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k + c_{k+1}\mathbb{b}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbb{b}_n = \mathbb{0}_X$

が，存在するようなものが，取れる．

x-7-26-0　(7.52)　$\mathbb{d} := c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$

とする．$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ である (そうでなければ，(7.51) により，$\mathbb{b}_{k+1}, \ldots, \mathbb{b}_n \in \mathcal{B}''$ は，線型独立でなくなってしまい，矛盾である)．したがって，(7.50) により，上と同様の議論から，$\mathbb{d} \notin [\mathcal{B}]_X = X' \cap X''$ である．他方，(7.51) と (7.52) から，

$$\mathbb{d} = (-c_{k+1})\mathbb{b}_{k+1} + \cdots + (-c_n)\mathbb{b}_n$$

なので，$\mathbb{d} \in [\mathcal{B}'']_X = X''$ だから，$\mathbb{d} \in X' \cap X''$ となってしまう．これは，矛盾である．

(4):　$\ell := \dim(X')$, $m := \dim(X'')$ とする．(2) により，$X' \cap X''$ は，X の線型部分空間だから，X' の線型部分空間でもある．したがって，仮定と，補題 7.43 により，$X' \cap X''$ は，有限次元の線型空間である．$k := \dim(X' \cap X'')$ として，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ を，$X' \cap X''$ の基底とすると，基底の拡張定理 (定理 7.44)

により，$\mathbb{a}_{k+1}, \dots, \mathbb{a}_\ell \in X'$ と，$\mathbb{b}_{k+1}, \dots, \mathbb{b}_m \in X''$ で，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k, \mathbb{a}_{k+1}, \dots, \mathbb{a}_\ell$ と，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k, \mathbb{b}_{k+1}, \dots, \mathbb{b}_m$ が，それぞれ，X' と X'' の基底となるようなものが，取れる．このとき，(3) により，

$$\underbrace{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k, \mathbb{a}_{k+1}, \dots, \mathbb{a}_\ell, \mathbb{b}_{k+1}, \dots, \mathbb{b}_m}_{\ell+m-k\text{ 個}}$$

は，$[X' \cup X'']_X$ の基底となるから，示すべき等式が，成り立っていることが，分かる． ❑ (定理 7.45)

第 4 章で導入した，直線や平面などの，幾何学的概念は，線型部分空間や，その次元の言葉を使って，次のように言い換えることができる．

演習問題 7.46 （1）　X を，$\mathbb{R}$ 上の線型空間としての，$\mathbb{R}^2$ または，$\mathbb{R}^3$ とする．このとき，$\ell \subseteq X$ が，原点を通る直線であるのは，ℓ が，X の，1-次元の，$\mathbb{R}$ 上の線型部分空間である，ちょうどそのときである． Exerc-7-2-0

（2）　$E \subseteq \mathbb{R}^3$ が，原点を含む平面であるのは，E が，$\mathbb{R}^3$ の 2-次元の部分空間である，ちょうどそのときである． ❑

7.3.2　アファイン部分空間

X を，体 K 上の線型空間として，$S \subseteq X$ とするとき，$\mathbb{b} \in X$ に対し， affine-subspaces

(7.53)　$S + \mathbb{b} := \{\mathbb{a} + \mathbb{b} : \mathbb{a} \in S\}$ x-7-26-0-0

とする．$S + \mathbb{b}$ は，領域 S を “変位ベクトル” $\mathbb{b}$ で平行移動して得られた領域，と捉えることができる．

補題 7.47 X を，体 K 上の線型空間として，X' を，X の線型部分空間とする．このとき，（1）　任意の $\mathbb{b} \in X$ に対し，$\mathbb{b} \in X' + \mathbb{b}$ である． P-7-22-0-0

（2）　$\mathbb{b} \in X'$ なら，$X' + \mathbb{b} = X'$ である．

証明． (1):　$\mathbb{0}_X \in X'$ だから (補題 7.35, (1))，$\mathbb{b} = \mathbb{0}_X + \mathbb{b} \in X' + \mathbb{b}$ である．

(2):　“$\subseteq$” は，部分空間が $+$ に関して閉じていることから，よい．$\mathbb{a} \in X'$ なら，$\mathbb{a} = (\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b}$ で，$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{a} + (-1)\mathbb{b} \in X'$ だから，$\mathbb{a} \in X' + \mathbb{b}$ である．したがって，“$\supseteq$” も成り立つ． ❑ (補題 7.47)

$\mathcal{A} \subseteq X$ が，X の，ある線型部分空間 $X' \subseteq X$ の平行移動 $\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}$ として表わせるとき，$\mathcal{A}$ は，X の**アファイン部分空間** (afine subspace) である，と言うことにする．

$X' = X' + \mathbb{0}$ により，X の線型部分空間 X' は，X のアファイン部分空間である．

$\mathcal{A}$ が，X' のアファイン部分空間のとき，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}$ となる，X の線型部分空間 X' を，$\mathcal{A}$ に**付随する線型部分空間**と呼ぶことにする．任意の X のアファイン部分空間に対し，それに付随する線型部分空間は，一意に決まる:

P-7-22-1 **補題 7.48** X を，体 K 上の線型空間として，$\mathcal{A}$ を，X のアファイン部分空間とする．$\mathbb{b}', \mathbb{b}'' \in X$ に対し，X', X'' を X の部分空間として，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}' = X'' + \mathbb{b}''$ となっているとするとき，$X' = X''$ である．

証明． $\mathbb{a}' \in X'$ とすると，$\mathbb{a}' + \mathbb{b}' \in \mathcal{A}$ だから，$\mathbb{c} \in X''$ で，$\mathbb{a}' + \mathbb{b}' = \mathbb{c} + \mathbb{b}''$ となるものが取れる．この等式の両辺に，$-\mathbb{b}'$ を足すと，等式

x-7-26-1 (7.54) $\mathbb{a}' = \mathbb{c} + (\mathbb{b}'' - \mathbb{b}')$

が得られる．$\mathbb{b}' = \mathbb{0}_X + \mathbb{b}' \in \mathcal{A}$ だから，$\mathbb{c}'' \in X''$ で，$\mathbb{b}' = \mathbb{c}'' + \mathbb{b}''$ となるものが取れる．これを (7.54) に代入すると，

$$\mathbb{a}' = \mathbb{c} + (\mathbb{b}'' - (\mathbb{c}'' + \mathbb{b}'')) = \mathbb{c} - \mathbb{c}'' \in X''$$

となることが分かる．したがって，$X' \subseteq X''$ である．$X'' \subseteq X'$ も，同様に示せるから，$X' = X''$ である． □ (補題 7.48)

上の補題 7.48 により，X を，体 K 上の線型空間として，$\mathcal{A} \subseteq X$ を，そのアファイン部分空間とするとき，$\mathcal{A}$ に付随する線型部分空間 X' は，一意にきまるから，この X' が，有限次元なら，その次元も，$\mathcal{A}$ に対応して，
dim-affine 一意に決まる．この次元のことを，$\mathcal{A}$ の次元とも呼ぶことにする．つまり，$\dim(\mathcal{A}) := \dim(X')$ である．

P-7-22-2 **補題 7.49** X を，体 K 上の線型空間として，$\mathcal{A}$ と，$\mathcal{A}'$ を，X のアファイン部分空間とする．（1） 任意の $\mathbb{b} \in X$ に対し，以下は同値である:
(a) $\mathcal{A} - \mathbb{b}$ $(= \mathcal{A} + (-\mathbb{b}))$ は，$\mathcal{A}$ に付随する線型部分空間となる;
(b) $\mathbb{b} \in \mathcal{A}$； (c) $\mathbb{0}_X \in \mathcal{A} - \mathbb{b}$ である [*25]．

(2)　$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ で，X' と X'' を，それぞれ，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ に付随する線型部分空間とするとき，$X' \subseteq X''$ である．

(3)　$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ で，$\mathcal{A}'$ が有限次元なら，$\mathcal{A}$ も有限次元で，$\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{A}')$ が成り立つ．更に，$\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}')$ なら，$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ である．

(4)　$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ を共に部分集合として含む，$\subseteq$ に関して最小の，X のアファイン部分空間が，存在する．

(5)　$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ なら，$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ も，X のアファイン部分空間である．このとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が，共に有限次元として，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ を部分集合として含む，$\subseteq$ に関して最小の，X のアファイン部分空間 ((4) を参照) を，$\mathcal{A}''$ とすると，$\dim(\mathcal{A}'') = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{A}') - \dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')$ が成り立つ．

証明． (1):　(a) $\Rightarrow$ (c):　$\mathcal{A} - \mathbb{b}$ が $\mathcal{A}$ に付随する線型部分空間なら，特に $\mathcal{A} - \mathbb{b}$ は X の線型部分空間だから，(補題 7.35, (1) により) $\mathbb{0}_X \in \mathcal{A} - \mathbb{b}$ である．

(c) $\Rightarrow$ (b):　$\mathbb{0}_X \in \mathcal{A} - \mathbb{b}$ なら，$\mathbb{0}_X = \mathbb{a} - \mathbb{b}$ となる $\mathbb{a} \in \mathcal{A}$ がとれるが，$\mathbb{a} = \mathbb{b}$ となるから，$\mathbb{b} \in \mathcal{A}$ である．

(b) $\Rightarrow$ (a):　$\mathbb{b} \in \mathcal{A}$ とする．X' を $\mathcal{A}$ に付随する線型部分空間として，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}'$ とすると，$\mathbb{c} \in X'$ で，$\mathbb{b} = \mathbb{c} + \mathbb{b}'$ となるものが取れる．したがって，$-\mathbb{c} \in X'$ に留意すると，

$$\mathcal{A} - \mathbb{b} = (X' + \mathbb{b}') - \mathbb{b} = (X' + \mathbb{b}') - (\mathbb{c} + \mathbb{b}') = X' + (-\mathbb{c}) \overbrace{=}^{\text{補題 7.47, (2)}} X'$$

である．

(2):　$\mathbb{b} \in \mathcal{A}$ とすると，仮定により，$\mathbb{b} \in \mathcal{A}'$ だから，(1) により，

(7.55)　$X' := \mathcal{A} - \mathbb{b}, \quad X'' := \mathcal{A}' - \mathbb{b}$　x-7-26-2

とすると，X' と X'' は，それぞれ，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ に付随する線型部分空間である．(7.55) と $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ の仮定から，$X' \subseteq X''$ である．

(3):　$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ として，X' と X'' を，それぞれ $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ に付随する線型

*25 補題 7.48 により，$\mathcal{A}$ が，線型空間 X のアファイン部分空間のときには，その付随する線型部分空間 X' は，一意に決まりますが，ここでの (1) により，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}$ となる $\mathbb{b} \in X$ は，一般には，一意には決まらないことに，注意してください．

部分空間とすると，(2) により，$X' \subseteq X''$ である．したがって，$\mathcal{A}'$ (つまり X'') が有限次元なら，補題 7.43 により，X' (つまり $\mathcal{A}$) も有限次元で，$\dim(\mathcal{A}) = \dim(X') \leq \dim(X'') = \dim(\mathcal{A}')$ である．

$\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}')$ なら，$\dim(X') = \dim(X'')$ だから，$X' \subseteq X''$ (と，補題 7.43 の後半) により，$X' = X''$ となるから，(1) により，$\mathbb{b} \in \mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b} = X'' + \mathbb{b} = \mathcal{A}'$ である．

(4):　X' と X'' を，それぞれ，X での，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ に付随する線型部分空間とする．$\mathbb{b} \in \mathcal{A}$ とすると，(1) により，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}$ となる．このとき，

x-7-26-3

$$X''' = [X' \cup (\mathcal{A}' - \mathbb{b})]_X \tag{7.56}$$

として，$\mathcal{A}'' = X''' + \mathbb{b}$ が，求めるようなものであることを示す．$\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$ となることは，(7.56) から明らかである．

$\mathcal{A}^*$ を，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ を部分集合として含む，任意の X のアファイン部分空間とする．$\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}^*$ が示したいことである．

$\mathbb{b} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ だから，X^* を，$\mathcal{A}^*$ に付随する線型部分空間とすると，(1) により，$\mathcal{A}^* = X^* + \mathbb{b}$ である．$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ と，(2) により，$X' \subseteq X^*$ で，$\mathcal{A}' - \mathbb{b} \subseteq \mathcal{A}^* - \mathbb{b} = X^*$ だから，(7.56) (と補題 7.38, (2)) により，$X''' \subseteq X^*$ である．したがって，$\mathcal{A}'' = X''' + \mathbb{b} \subseteq X^* + \mathbb{b} = \mathcal{A}^*$ である．

(5):　上と同様に，X' と X'' を，それぞれ $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ に付随する線型部分空間とする．$\mathbb{b} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ とすると (仮定により，このような $\mathbb{b}$ は存在する)，(1) により，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{b}$, $\mathcal{A}' = X'' + \mathbb{b}$ である．したがって，$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = (\mathcal{A} - \mathbb{b}) \cap (\mathcal{A}' - \mathbb{b}) + \mathbb{b} = X' \cap X'' + \mathbb{b}$ だから，定理 7.45, (2) により，$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ もアファイン部分空間である．

(4) の証明 (で $\mathbb{b} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ の場合) を考えると，$\mathcal{A}'' = [X' \cup X'']_X + \mathbb{b}$ だから，

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}'') \overbrace{=}^{\text{上の等式による}} \dim([X' \cup X'']_X) \underbrace{=}_{\text{定理 7.45, (4) による}} \dim(X') + \dim(X'') - \dim(X' \cap X'') \\ = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{A}') - \dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')\end{aligned}$$

である．　□ (補題 7.49)

アファイン部分空間は，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ での，点や，直線や，平面の概念の，一

般化になっている，と考えることができる．$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の点は，通常の解釈では，これらの線型空間の要素であるが，各点を，その点からなる singleton と捉えなおすことにすると，これらは，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の，0-次元のアファイン部分空間である．

直線については，もっと直截的で，演習問題 7.46 を，思い出すと，X を，$\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ として，$\ell \subseteq X$ が，直線であるのは，ℓ が，X の 1-次元のアファイン部分空間であるときである，ことが分かる．同様に，X を $\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}^3$ として，$E \subseteq X$ が，平面であるのは，E が，X の 2-次元のアファイン部分空間であるときである．

このような見方をすると，上の補題 7.48 と，補題 7.49 は，第 4 章で見た，$\mathbb{R}^2$ や，$\mathbb{R}^3$ での，直線や，平面の，幾何学的性質の，一般化になっている，と捉えることができる．

補題 7.48 は，任意の直線 $\ell \in \mathbb{R}^2$ (または $\ell \in \mathbb{R}^3$) に対して，ℓ と平行な原点を通る直線が一つに決まる (定理 4.17 の特別な場合)，また，任意の平面 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ に対し，E と平行な原点を含む平面は，一つに決まる (補題 4.69 の帰結)， などという命題の一般化となっている，と考えることができる．

また，例えば，補題 7.49, (4) は，任意の異る 2 点を通る直線が一意に存在する (補題 4.13)，($\mathbb{R}^3$ で) 任意の直線と，この直線上にない点を含む平面が一意に存在する (補題 4.71 の帰結)，などという命題の一般化となっている，と考えることができる．

$\mathbb{R}^3$ での，2 つの平面に関する定理 4.72 も，ここで考察したアファイン部分空間の次元を用いると，次のように説明することができるようになる:

命題 7.50 (定理 4.72 のアファイン部分空間の次元を用いた別証 (補題 7.13 の証明の言い直しを含む))　$E, E' \subseteq \mathbb{R}^3$ を平面とするとき，次の 3 つのうちの P-7-22-3
どれかが，成り立つ

(i)　$E \cap E' = \emptyset$ である;　(ii)　$E \cap E'$ は直線である;　(iii)　$E = E'$ である．

証明．　$E \neq E'$ で，$E \cap E \neq \emptyset$ と仮定する．$\dim(E) = \dim(E') = 2$ に留意する．補題 7.49, (5) により，$E \cap E'$ は，$\mathbb{R}^3$ のアファイン部分空間で，$E \cap E' \neq E$ だから，補題 7.49, (3) により，$\dim(E \cap E') = 0$ または，

$\dim(E \cap E') = 1$ である．$\dim(E \cap E') = 0$ ではない: もしそうだとすると，E'' を E と E' を含む $\mathbb{R}^3$ のアファイン部分空間として，補題 7.49, (5) により，$\dim(E'') = \dim(E) + \dim(E') - \dim(E \cap E') = 2 + 2 - 0 = 4 > 3$ となってしまい，矛盾である．

したがって，$E \cap E'$ は，$\mathbb{R}^3$ の，1-次元のアファイン部分空間，つまり，直線である．　□ (命題 7.50)

Exerc-7-2-1 **演習問題 7.51** 命題 7.50 に習って，直線の，1-次元のアファイン部分空間としての特徴付けを用いて，定理 4.14 を，再証明せよ．第 4 章の他の命題についても，上で用意された道具を用いて説明できるものがないか確かめよ．　□

7.4　線型写像，アファイン写像と次元定理

lin-affine-dim-thm 7.4.1　線型写像と次元定理

lin-map-dim-thm K を，体とするとき，K 上のベクトル空間 K^m から，K^n への写像 f が，線型写像である，とは，f が，(4.53) と (4.54) を満たすことだった．この定義は，任意の K 上の線型空間 X から，Y への，線型写像の定義に，自然に拡張することができる:

X, Y を，体 K 上の線型空間とするとき，写像 $f : X \to Y$ が，X から Y への **K-線型写像** (K-linear mapping) である，とは，f が，次の (7.57), (7.58) を，満たすことである:

x-7-27 (7.57)　すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X$ に対し，$f(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})$ が，成り立つ．

x-7-28 (7.58)　すべての $\mathbb{a} \in X, c \in K$ に対し，$f(c\,\mathbb{a}) = c\,f(\mathbb{a})$ が，成り立つ．

ここでも，K が何かが，文脈から明らかなときには，“K-” を落として，単に，**線型写像**と言うことにする．

次は，補題 4.21 の証明の再利用で示せる:

P-7-23 **補題 7.52** f を，体 K 上の線型空間 X から，K 上の線型空間 Y への，K-線型写像とするとき，$f(\mathbb{0}_X) = \mathbb{0}_Y$ である．　□

線型写像 $f : X \to Y$ に対して，次のような，X と Y の線型部分空間が定

義される (これらが X と Y の線形部分空間であることは，次の補題 7.53 で示す).

(7.59)　$\mathrm{Ker}(f) := \{\mathbb{a} \in X \,:\, f(\mathbb{a}) = \mathbb{0}_Y\}.$　x-7-29

(7.60)　$\mathrm{Im}(f) := \{\mathbb{b} \in Y \,:\, f(\mathbb{a}) = \mathbb{b}$ となる $\mathbb{a} \in X$ が存在する $\}$　x-7-30

$\mathrm{Ker}(f)$ は，f の**核** (kernel) とよばれる．第 2.3 節での記法を思い出すと，$\mathrm{Ker}(f)$ は，$f^{-1}{''}\{\mathbb{0}_Y\}$ と，表わすこともできる．$\mathrm{Im}(f)$ は，一般の写像での X の f による**像** (ぞう, image) $f{''}X$ (第 2.3 節を参照) に，一致する．

補題 7.53 X, Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を，K-線型写像とする．このとき，　P-7-24

（1） $\mathrm{Ker}(f)$ は，X の K 上の線型部分空間である．

（2） $\mathrm{Im}(f)$ は，Y の K 上の線型部分空間である．

（3） f が，単射となるのは，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbb{0}_X\}$ となる，ちょうどそのときである．

（4） f が上射となるのは，$\mathrm{Im}(f) = Y$ となる，ちょうどそのときである．

証明． (1):　補題 7.35, (2) での条件 (7.36) が満たされることを示す．$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathrm{Ker}(f)$, r, $s \in K$ とする．このとき，

$$f(r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b}) \underbrace{=}_{f\text{ は線型写像による}} r\,f(\mathbb{a}) + s\,f(\mathbb{b}) \overbrace{=}^{\mathbb{a},\,\mathbb{b} \in \mathrm{Ker}(f)\text{ による}} r\,\mathbb{0}_Y + s\,\mathbb{0}_Y = \mathbb{0}_Y$$

だから，$r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．

(2):　再び，補題 7.35, (2) での条件 (7.36) を確認する．$\mathbb{c}$, $\mathbb{d} \in \mathrm{Im}(f)$ で，r, $s \in K$ とすると，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in X$ で，$f(\mathbb{a}) = \mathbb{c}$, $f(\mathbb{b}) = \mathbb{d}$ となるものが取れる [*26]．

$$r\,\mathbb{c} + s\,\mathbb{d} \underbrace{=}_{\mathbb{a},\,\mathbb{b}\text{ の選び方による}} r\,f(\mathbb{a}) + s\,f(\mathbb{b}) \overbrace{=}^{f\text{ は線型写像による}} f(r\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b})$$

[*26] このような，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ は，一意に決まるとは限りませんが，ここでは，そのことは問題となっていません．

だから，$r\,\mathbb{c} + s\,\mathbb{d} \in \mathrm{Im}(f)$ である．

(3):　線型写像 f が単射なら，特に，$f(\mathbb{a}) = \mathbb{0}_Y$ となる $\mathbb{a} \in X$ は，唯一つしかないが，補題 7.52 により，$f(\mathbb{0}_X) = \mathbb{0}_Y$ だから，そのような $\mathbb{a}$ は $\mathbb{0}_X$ と一致する．つまり，$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}{}''\{\mathbb{0}_Y\} = \{\mathbb{0}_X\}$ である．

逆に，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbb{0}_X\}$ なら，任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in X$ に対し，$f(\mathbb{a}) = f(\mathbb{b})$ とすると，

x-7-31
$$(7.61)\quad \mathbb{0}_Y \underbrace{=}_{\mathbb{a},\,\mathbb{b}\text{ の選び方による}} f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{b}) \overbrace{=}^{f\text{ は線型写像だから}} f(\mathbb{a} - \mathbb{b})$$

により，$\mathbb{a} - \mathbb{b} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．したがって，仮定から，$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{0}_X$ つまり $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ となる．よって，f は単射である．

(4):　定義により，$\mathrm{Im}(f) = f''X$ だから，これは自明である．　□ (補題 7.53)

上の補題 7.53, (2) は，次の演習問題の (1) のように，更に一般化できる．

Exerc-7-3
演習問題 7.54 X と Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を，K-線型写像とする．このとき，（1）　X' が，X の線型部分空間なら，$f''X'$ は，Y の線型部分空間である．

（2）　任意の $S \subseteq X$ に対し，$f''[S]_X = [f''S]_Y$ である．

（3）　$Y' \subseteq Y$ が，Y の線型部分空間なら，$f^{-1}{}''Y'$ は，X の線型部分空間である．

（4）　任意の $T \subseteq Y$ に対し，$f^{-1}{}''[T]_Y = [f^{-1}{}''T]_X$ である．

ヒント． (1):　補題 7.53, (2) と同様に，示せる．(2):　(1) と補題 2.6, (1), 補題 7.38, (2) により，$f''[S]_X$ は，$f''S$ を含む，Y の線型部分空間だから，$f''[S]_X \supseteq [f''S]_Y$ である．

一方，$\mathbb{a} \in [S]_X$ で，$\mathbb{a}_i \in S$, $c_i \in K$, $i \in \overline{k}$ を，$\mathbb{a} = \sum^{X}_{i\in\overline{k}} c_i \mathbb{a}_i$ となるように取ると，f の線型性から，

$$f(\mathbb{a}) = \textstyle\sum^{Y}_{i\in\overline{k}} c_i f(\mathbb{a}_i) \in [f''S]_Y$$

となるから，$f''[S]_X \subseteq [f''S]_Y$ である．　□ (演習問題 7.54)

Ex-7-8
例 + 演習問題 7.55 X, Y を，体 K 上の線型空間とする．このとき，

（1）　$f : X \to Y; \mathbb{a} \mapsto \mathbb{0}_Y$ は線型写像である．

（2）　$\mathcal{B}_X$ を X の K 上の基底として，$\mathcal{B}_Y$ を Y の K-線型独立な部分集合とする．任意の $g_0 : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_Y \cup \{\mathbb{0}_Y\}$ に対し，$g : X \to Y$ を，$\mathbb{a} \in X$ が，$\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_k \in \mathcal{B}_X$ と $c_1, \dots, c_k \in K$ に対して，$\mathbb{a} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k$ と表わせるとき，

$$g(\mathbb{a}) := c_1 g_0(\mathbb{b}_1) + \cdots + c_k g_0(\mathbb{b}_k)$$

として定義すると，g は，X から Y への，K 上の線型写像である．

ヒント． (2) の g が well-defined であることは，補題 7.10 によりよい．(1) と (2) を示すには，f と g が，両方とも，(7.57) と，(7.58) を，満たすことを，示せばよい．　□ (例 + 演習問題 7.55)

補題 7.56 X と Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を K-線型写像とする．このとき，（1）　X' を X の線型部分空間とすると，$f \restriction X'$ は，X' から Y への線型写像である． P-7-25

（2）$X' \subseteq X$ が，有限次元の，X の部分空間なら，$f''X'$ も，有限次元で，

$$\dim(f''X') \leq \dim(X') \tag{7.62}$$ x-7-31-0

である．

証明． (1):　線型写像の定義から，明らかである (演習!)．

(2):　X' を有限次元として，$\mathcal{B} \subseteq X'$ を，X' の基底とする．定理 7.27, (2) により，$\#(\mathcal{B}) = \dim(X')$ だから，特に，$\mathcal{B}$ は，有限集合である．

$$f''X' \overset{\substack{\mathcal{B}\text{ は }X'\text{ の基底だから,}\\ [\mathcal{B}]_X = X'\text{ となることによる}}}{\overbrace{=}} f''[\mathcal{B}]_X \underbrace{=}_{\text{演習問題 7.54, (2)}} [f''\mathcal{B}]_Y \tag{7.63}$$ x-7-32

である．したがって，

$$\dim(f''X') \underbrace{\leq}_{\text{(7.63) と補題 7.31 による}} \#(f''\mathcal{B}) \leq \#(\mathcal{B}) = \dim(X')$$

により，$f''X'$ は，有限次元で，(7.62) が，成り立つことが，分かる．

□ (補題 7.56)

上の補題 7.56, (2) は，次の次元定理で，更に精密化できる．この定理にも，X が有限次元である，という条件を除いた，拡張版が存在する．これについても，第 II 巻で述べる．

♦ 無限次元版を第 II 巻で述べる．

P-7-26 **定理 7.57** (次元定理)　X, Y を，体 K 上の線型空間として，X は，有限次元とする．このとき，任意の K-線型写像 $f : X \to Y$ に対し，等式

(7.64)　$\dim(X) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

が，成り立つ．

♦ 次元定理の絵を挿入する!!!

証明． 補題 7.53, (1) により，$\mathrm{Ker}(f)$ は，X の線型部分空間だから，補題 7.43 により，有限次元である．$k := \dim(\mathrm{Ker}(f))$ として，$n = \dim(X)$ とすると，$k \leq n$ である．$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ を $\mathrm{Ker}(f)$ の基底とすると，基底の拡張定理 (定理 7.44) により，この $\mathrm{Ker}(f)$ の基底の拡張 $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k, \mathbb{a}_{k+1}, \ldots, \mathbb{a}_n$ で，X の基底となっているものが存在する．

Cl-7-0 **Claim 7.57.1** $f(\mathbb{a}_{k+1}), \ldots, f(\mathbb{a}_n)$ は，$\mathrm{Im}(f)$ の基底である．特に，$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k$ である．

$$\vdash \quad \mathrm{Im}(f) = f''X \underbrace{=}_{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \text{ は } X \text{ の基底による}} f''[\{\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n\}]_X \underbrace{=}_{\text{演習問題 7.54, (2)}} [\{f(\mathbb{a}_1), \ldots, f(\mathbb{a}_n)\}]_Y$$

$$\underbrace{=}_{f(\mathbb{a}_1) = \cdots = f(\mathbb{a}_k) = \mathbb{0}_Y \text{ による}} [\{f(\mathbb{a}_{k+1}), \ldots, f(\mathbb{a}_n)\}]_Y$$

である．

もし，自明でない K 上の線型結合で，

$$c_{k+1}f(\mathbb{a}_{k+1}) + \cdots + c_n f(\mathbb{a}_n) = \mathbb{0}_Y$$

となるものがあったとすると，f の線型性から，$f(c_{k+1}\mathbb{a}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbb{a}_n) = \mathbb{0}_Y$，したがって，$c_{k+1}\mathbb{a}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbb{a}_n \in \mathrm{Ker}(f)$ となるから，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ が $\mathrm{Ker}(f)$ の基底であることから，$d_1, \ldots, d_k \in K$ で，

$$c_{k+1}\mathbb{a}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = d_1\mathbb{a}_1 + \cdots + d_k\mathbb{a}_k$$

となるものが取れる．上の式を移項して，

$$d_1\mathbb{a}_1 + \cdots + d_k\mathbb{a}_k + (-c_{k+1})\mathbb{a}_{k+1} + \cdots + (-c_n)\mathbb{a}_n = \mathbb{0}_X$$

という自明でない線型結合が得られるが，これは，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ が，線型独立であることに，矛盾である．

以上により，$f(\mathbb{a}_{k+1}), \dots, f(\mathbb{a}_n)$ が，$\mathrm{Im}(f)$ の基底であることが示せた．

$\dashv$ (Claim 7.57.1)

上の Claim 7.57.1 により，

$$\dim(X) = n = k + (n-k) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(X))$$

である． □ (定理 7.57)

任意の線型空間の線型部分空間は，線型写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ として表わせる．ここでは，この事実を，有限次元の線型空間の部分空間に関して見ておくことにする．

♦ 第 II 巻で，任意の部分空間が線型写像の kernel として表わせることを証明する．

P-7-27

補題 7.58 X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，X' を，X の部分空間とする．補題 7.43 により，X' も有限次元の線型空間となるが，$\dim(X) = n$, $\dim(X') = k$ とすると，K 上の線型写像 $f : X \to K^{n-k}$ で，$X' = \mathrm{Ker}(f)$ となるものが，存在する．

証明． 補題 7.43 により，$k \leq n$ である．基底の拡張定理 (定理 7.44) により，X の基底 $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ で，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ が，X' の基底となっているようなものが，取れる．X の任意の要素は，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ の K 上の線型結合として，一意に表現できる (補題 7.25) から，

$$f : X \to K^{n-k}; \qquad c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n \ \mapsto \begin{bmatrix} c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

として f を定義すると，これが求めるようなものとなる． □ (補題 7.58)

演習問題 7.59 上で定義した f が，K 上の線型写像で，$\mathrm{Ker}(f) = X'$ となることを示せ． □

次元定理により，補題 7.58 でのような f は，$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k$ を満たさなければならないので，そのような f の行き先は，少なくとも $(n-k)$-次元でなくてはならないことに注意する (K 上のベクトル空間 K^{n-k} は $(n-k)$-次元である!).

7.4.2　アファイン写像

第 4.2 節で導入した，アファイン写像の概念も，一般の線型空間の間の写像に対するものとして，自然に一般化できる．X と Y を，体 K 上の線型空間とするとき，$f : X \to Y$ が，(K 上の) **アファイン写像** (affine mapping) である，とは，ある K 上の線型写像 $g : X \to Y$ と，$\mathbb{t} \in Y$ に対し，

x-7-33 (7.65)　すべての $\mathbb{a} \in X$ に対し，$f(\mathbb{a}) = g(\mathbb{a}) + \mathbb{t}$ となる

こととする．次の補題 7.60 は，補題 4.42 の証明により，示せる (演習!).

P-7-28 **補題 7.60** X と Y を，体 K 上の線型空間とするとき，$f : X \to Y$ が，アファイン写像となるのは，写像 $g : X \to Y;\ \mathbb{a} \mapsto f(\mathbb{a}) - f(\mathbb{0}_X)$ が，線型写像となる，ちょうどそのときである．特に，f がアファイン写像のときには，$\mathbb{t} := f(\mathbb{0}_X)$ とすると，平行移動 $t_{\mathbb{t}} : Y \to Y;\ \mathbb{b} \mapsto \mathbb{b} + \mathbb{t}$ と，上の g に対し，$f = t_{\mathbb{t}} \circ g$ である．❏

線型写像 $g : X \to Y$ は，$g(\mathbb{0}_X) = \mathbb{0}_Y$ を，満たさなければならないから (補題 7.52)，f が，アファイン写像のとき，(7.65) でのような，g と $\mathbb{t} \in Y$ は，($\mathbb{t} = f(\mathbb{0}_X)$ により) 一意に決まる．そこで，このような g のことを，f **に付随する線型写像**とよぶことにする．(7.65) で $\mathbb{t} = \mathbb{0}_Y$ とすると，f は，線型写像 g と一致するから，線型写像は，アファイン写像の特別な場合となっている．

線型写像でのときと同様に，アファイン写像 $f : X \to Y$ に対し，$\mathrm{Im}(f)$ で，$f''X$ を表わすことにする．

P-7-29 **補題 7.61** X と，Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を，アファイン写像とする．このとき，（1）　$\mathcal{A} \subseteq X$ を，アファイン部分空間とすると，$f''\mathcal{A}$ は，Y のアファイン部分空間である．

（2）　すべての $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ は，X のアファイン部分空間

である．

証明． $g : X \to Y$ を f に付随する線型写像として， $\mathbb{b}_0 = f(\mathbb{0}_X)$ とする．

(7.66)　$\mathbb{a} \in X$ に対し，$f(\mathbb{a}) = g(\mathbb{a}) + \mathbb{b}_0$ x-7-34

である．

(1):　$\mathcal{A}$ を，X のアファイン部分空間として，X の部分空間 X' と，$\mathbb{a}_0 \in X$ に対して，$\mathcal{A} = X' + \mathbb{a}_0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f''\mathcal{A} &= \{f(\mathbb{a}+\mathbb{a}_0) \,:\, \mathbb{a} \in X'\} \\ &\underbrace{=}_{(7.66)\text{ による}} \{g(\mathbb{a}+\mathbb{a}_0) + \mathbb{b}_0 \,:\, \mathbb{a} \in X'\} \\ &\underbrace{=}_{g\text{ の線型性による}} \{g(\mathbb{a}) + (g(\mathbb{a}_0) + \mathbb{b}_0) \,:\, \mathbb{a} \in X'\} = g''X' + (g(\mathbb{a}_0) + \mathbb{b}_0)) \end{aligned}$$

となる．演習問題 7.54, (1) により， $g''X'$ は，Y の線型部分空間だから，$f''\mathcal{A}$ は，Y のアファイン部分空間であることが分かる．

(2):　$\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，$\mathbb{a}_0 \in X$ で，$f(\mathbb{a}_0) = \mathbb{b}$ となるものが取れる．このとき，(7.66) により，

(7.67)　$g(\mathbb{a}_0) = \mathbb{b} - \mathbb{b}_0$ x-7-35

である．

$$\begin{aligned} f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\} &= \{\mathbb{a} \in X \,:\, f(\mathbb{a}) = \mathbb{b}\} \\ &\underbrace{=}_{(7.66)\text{ による}} \{\mathbb{a} \in X \,:\, g(\mathbb{a}) + \mathbb{b}_0 = \mathbb{b}\} = \{\mathbb{a} \in X \,:\, g(\mathbb{a}) = \mathbb{b} - \mathbb{b}_0\} \\ &\underbrace{=}_{(7.67)\text{ と } g\text{ の線型性による}} \{\mathbb{a} \in X \,:\, g(\mathbb{a} - \mathbb{a}_0) = \mathbb{0}_Y\} = \underbrace{g^{-1}{}''\{\mathbb{0}_Y\}}_{=\mathrm{Ker}(g)} + \mathbb{a}_0 \end{aligned}$$

だが，補題 7.53, (1) により $\mathrm{Ker}(g)$ は X の K 上の線型部分空間だから，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ $(= \mathrm{Ker}(g) + \mathbb{a}_0)$ は，X のアファイン部分空間である． □ (補題 7.61)

上の補題 7.61, (2) は，次のように一般化することができる．

Exerc-7-3-0 **演習問題 7.62** X と，Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を，アファイン写像とする．Y' が Y のアファイン部分空間なら，$f^{-1}{}''Y'$ は空集合であるか，あるいは，X のアファイン部分空間である．

290 ページで定義した，アファイン部分空間の次元の概念を用いると，線型写像に関する次元定理 (定理 7.57) は，アファイン写像に関する次元定理に，拡張される (以下の，定理 7.64)．まず，次の補題を見ておく．

P-7-30 **補題 7.63** X と Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ をアファイン写像とする．（1） ある $\mathbb{b}^* \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}^*\}$ を考えると，これは，補題 7.61, (2) により，X のアファイン部分空間だが，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}^*\}$ が有限次元なら，すべての $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ は有限次元で，$\dim(f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}) = \dim(f^{-1}{}''\{\mathbb{b}^*\})$ が成り立つ．

（2） f が, 単射となるのは, ある $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ が, singleton になること，と同値である．

証明． (1):　g を，f に付随する線型写像とすると，補題 7.61, (2) の証明から，すべての $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ は，$\mathrm{Ker}(g) + \mathbb{a}_0$ という形をしている．したがって，これらのうちの一つが，有限次元なら，すべて有限次元で，その次元は，すべて $\dim(\mathrm{Ker}(g))$ に等しい．

(2):　f が，単射であることは，すべての $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ が，singleton になることと同値である．一方，$f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}$ が，singleton であることは，これが，X の 0-次元のアファイン部分空間となることと同値だから，(1) から，主張が導かれる． □ (補題 7.63)

P-7-31 **定理 7.64** (アファイン写像に関する次元定理)　X, Y を，体 K 上の線型空間として，X は，有限次元とする．$f : X \to Y$ をアファイン写像とすると，$\mathrm{Im}(f)$ は，有限次元で，ある／すべての $\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，

x-7-35-0 (7.68) $\dim(X) = \dim(f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\}) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

が，成り立つ．

証明． g を，f に付随する線型写像とすると，次元定理により，$\dim(X) = \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$ である．このことと，アファイン部分空間の次元

の定義から，$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ となること，および，補題 7.63, (1) により，ある／すべての $b \in \mathrm{Im}(f)$ に対し，$\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(f^{-1}{}''\{\mathbb{b}\})$ となることから，(7.68) が導かれる．　□ (定理 7.64)

本節を終える前に，次元定理の応用として，定理 5.3 の後で述べた，超平面について，補足説明を加えることにする．

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ として，体 K 上の n-次元のベクトル空間 K^n を考える．$H \subseteq K^n$ が，**超平面** (hyperspace) であるとは，H は，K^n の $(n-1)$-次元のアファイン部分空間であること，とする[*27]．

$K = \mathbb{R}$ で，$n = 3$ のときには，超平面の概念は，通常の平面のそれと一致する．特に，超平面 H が，$\mathbb{0}_n$ を含むときには，H は，K^n の $(n-1)$-次元の部分空間となるが，このときには，H は，K^n の**線型超平面**である，と言うことにする．H が超平面のとき，H に付随する K^n の線型部分空間を，H に付随する線型超平面とよぶことにする．

定理 7.65 K を，体として，$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とするとき，以下の (a), (b), (c) は，同値である．　P-7-32

(a)　H は，K^n の超平面である．

(b)　ある $c_1, ..., c_n \in K$, $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ と，$d \in K$ で，

$$(7.69)\quad H = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n \,:\, c_1a_1 + \cdots + c_na_n = d \}$$ x-7-36

となるものが取れる．

(c)　ある $d_1, ..., d_n \in K$, $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ で，

$$(7.70)\quad H = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n \,:\, d_1a_1 + \cdots + d_na_n = 0_K \},$$ x-7-37

または，

[*27] ここで述べることは，K 上の有限次元の線型空間に関する理論として，一般化できますが，次の節で見るように (定理 7.65 を参照)，そのような一般化は，実は，ここでの記述を，本質的に改良するものにはなりません．

x-7-38 (7.71) $H = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n \,:\, d_1(d_1 - a_1) + \cdots + d_n(d_n - a_n) = 0_K \}$

となるものが取れる．

注意．（1） 上の定理で，$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 等の場合には，条件，(7.70) と (7.71) は，$\mathbb{d} := \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ として，内積を用いて，(5.5) と，(5.6) に対応する式

(7.70)′ $\quad H = \{\mathbb{a} \in K^n \,:\, (\mathbb{d}, \mathbb{a}) = 0\}$

または，

(7.71)′ $\quad H = \{\mathbb{a} \in K^n \,:\, (\mathbb{d}, \mathbb{d} - \mathbb{a}) = 0\}$

で，表現できる．例 5.2 も参照．

（2） 定理の (c) の，(7.70) は，(b) で，$d = 0$ となる場合に対応し，H は，この場合には，K^n の線型部分空間になる．(7.71) は，(b) で，$d \neq 0$ となる場合に対応する (以下の証明を参照).

定理 7.65 の証明． (c) ⇒ (b): (7.70) は (7.69) の特別な場合である．(7.71) での，条件の等式は，$d_1 a_1 + \cdots + d_n a_n = (d_1)^2 + \cdots + (d_n)^2$ と変形できるが，この式は，(7.69) での条件の形になっている．

“(b) ⇒ (c)”: $c_1, \ldots, c_n \in K$ と $d \in K$ を，(7.69) を満たすものとする．$d = 0_K$ のときには，$d_i := c_i$, $i \in \overline{n}$ とすれば，H は，(7.70) でのように表わされる．

$d \neq 0_K$ のときには，$c := (c_1)^2 + \cdots + (c_n)^2$ とすると，仮定から，$c \neq 0_K$ である．ここで，$d_i := \frac{d}{c} c_i$, $i \in \overline{n}$ とすれば，H は (7.71) でのように表わされる．これは，次から分かる:

$$
\begin{aligned}
& d_1(d_1 - a_1) + \cdots + d_n(d_n - a_n) = 0 \quad \overbrace{\Leftrightarrow}^{d_i,\ i \in \overline{n} \text{ の定義による}} \\
& \frac{d}{c}c_1\left(\frac{d}{c}c_1 - a_1\right) + \cdots + \frac{d}{c}c_n\left(\frac{d}{c}c_n - a_n\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{c^2}\underbrace{\left((c_1)^2 + \cdots + (c_n)^2\right)}_{= c,\ c \text{ の定義による}} - \left(\frac{d}{c}c_1 a_1 + \cdots + \frac{d}{c}c_n a_n\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{c} - \frac{d}{c}(c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = d.
\end{aligned}
$$

“(a) $\Rightarrow$ (b)”:　X' を，K^n での H に付随する線型部分空間として $\mathbb{b} \in K^n$ を，$H = X' + \mathbb{b}$ となるように取る．このとき，補題 7.58 により，線型写像 $f : K^n \to K^1$ で，$\mathrm{Ker}(f) = X'$ となるものが存在する．$d = f(\mathbb{b})$ とすると，

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbb{a} + \mathbb{b} \,:\, \mathbb{a} \in K^n,\, \mathbb{a} \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{\mathbb{a} + \mathbb{b} \,:\, \mathbb{a} \in K^n,\, f(\mathbb{a}) = 0_K\} \\ &= \{\mathbb{a} + \mathbb{b} \,:\, \mathbb{a} \in K^n,\, \underbrace{f(\mathbb{a} + \mathbb{b})}_{= f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})\ ;\ f\ \text{は線型写像による}} = d\ \} = \{\mathbb{a} \in K^n \,:\, f(\mathbb{a}) = d\ \} \end{aligned}$$

である．f の表現行列 A を取ると (定理 4.23)，A は，$1 \times n$-行列だから，$A = [c_1 \cdots c_n]$ と書ける．$A = O$ だったとすると，$H = K^n$ または，$H = \emptyset$ となってしまい，H は，超平面でないことになり矛盾である (ここで，条件 $n \geq 2$ を用いていることに注意)．したがって，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ で，

$H = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n \,:\, c_1a_1 + \cdots + c_na_n = d\ \}$ となり，これは H の，(7.69) の形の表現となっている．

“(b) $\Rightarrow$ (a)”:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.72}$$

x-7-39

となる $c_1, ..., c_n \in K$ があって，H が，(7.69) でのように表わされているとする．このとき，関数 $f : K^n \to K^1$ を，$\mathbb{a} \in K^n$, $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ に対し，

$$f(\mathbb{a}) := c_1a_1 + \cdots + c_na_n$$

と定義すると，f は，線型写像で，(7.72) により，f は，全射である．(7.69) と f の定義から，$H = f^{-1}{}''\{[d]\}$ である．したがって，補題 7.61 により，H は，K^n のアファイン部分空間で，アファイン写像に関する次元定理 (定理 7.64) により，$\dim(H) = n - 1$ である．これによって，H が，K^n での超平面であることが，示せた．　❏ (定理 7.65)

系 7.66 $\mathbb{d} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbb{0}\}$, とするとき，$E = \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 \,:\, (\mathbb{d}, \mathbb{d} - \mathbb{a}) = 0\}$ は，$\mathbb{d}$ を含む $\mathbb{R}^3$ の平面である．E は，幾何学的直観からは，$\mathbb{d}$ を垂線とする平面であることに注意する．　P-lin-eq-1

証明． E が，$\mathbb{d}$ を要素として含むことは，$(\mathbb{d}, \mathbb{d}-\mathbb{d}) = 0$ によりよい．定理 7.65 により，E は，$\mathbb{R}^3$ の超平面だが，$\mathbb{R}^3$ では，平面の概念と超平面の概念は一致するので，ここでの主張が得られる．

“幾何学的直観” は，(4.90) (4.3.3 節の最後も参照) によりよい． □ (系 7.66)

7.5 線型空間の同型と埋め込み

isomorphic

X と Y を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to Y$ を，線型写像とする．f が，単射となるのは，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbb{0}_X\}$ となるときだったが (補題 7.53, (3))，そのようなとき，f は，線型空間 X の，線型空間 Y への**埋め込み**である，と言うことにする．

線型空間の埋め込み $f : X \to Y$ が，全射でもあるとき，つまり，f が，全単射となるような線型写像であるとき．f は，X から Y への **(線型空間の) 同型写像**である，という．$f : X \to Y$ が，X の Y への埋め込みのときには，f は，X から，Y の部分空間 $f''X$ への同型写像である．

P-7-33

補題 7.67 X, Y, Z を，体 K 上の線型空間とする．このとき，

（1） $f : X \to Y$ が，線型空間の同型写像なら，$f^{-1} : Y \to X$ も，線型空間の同型写像である．

（2） $f : X \to Y$ と，$g : Y \to Z$ が，線型空間の同型写像なら，$g \circ f : X \to Z$ も，線型写像である．

（3） $f : X \to Y$ と，$g : Y \to Z$ が，線型空間の同型写像なら，$g \circ f : X \to Z$ も，線型空間の同型写像である．

証明． (1): $f : X \to Y$ が，線型空間の同型写像なら，f は，全単射だから，f の逆写像 f^{-1} は，存在して，f^{-1} も，全単射となる (補題 2.13, (1))．従って，f^{-1} が，線型写像であることを確かめればよい．

このために，$\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2 \in Y$, $c \in K$ として，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2 \in X$ を，それぞれ $f(\mathbb{a}_1) = \mathbb{b}_1$, $f(\mathbb{a}_2) = \mathbb{b}_2$ となるように取る．逆写像の定義から，$f^{-1}(\mathbb{b}_1) = \mathbb{a}_1$, $f^{-1}(\mathbb{b}_2) = \mathbb{a}_2$, である．$f$ は，線型写像だから，$f(c\,\mathbb{a}_1) = cf(\mathbb{a}_1) = c\,\mathbb{b}_1$, $f(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) = f(\mathbb{a}_1) + f(\mathbb{a}_2) = \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2$ である．したがって，再び，逆写像の定義から，

$$f^{-1}(c\,\mathbb{b}_1) = c\,\mathbb{a}_1 = cf^{-1}(\mathbb{b}_1);$$
$$f^{-1}(\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = \mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2 = f^{-1}(\mathbb{b}_1) + f^{-1}(\mathbb{b}_2)$$

が，成り立つ．

(2):　$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in X$, $c \in K$ とするとき，

$$g\circ f(c\,\mathbb{a}_1) \underbrace{=}_{\text{合成関数の定義}} g(f(c\,\mathbb{a}_1)) \overbrace{=}^{f\text{ の線型性}} g(cf(\mathbb{a}_1)) \underbrace{=}_{g\text{ の線型性}} cg(f(\mathbb{a}_1)) \overbrace{=}^{\text{合成関数の定義}} c\,g\circ f(\mathbb{a}_1);$$

$$g\circ f(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) \underbrace{=}_{\text{合成関数の定義}} g(f(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2)) \overbrace{=}^{f\text{ の線型性}} g(f(\mathbb{a}_1) + f(\mathbb{a}_2))$$

$$\underbrace{=}_{g\text{ の線型性}} g(f(\mathbb{a}_1)) + g(f(\mathbb{a}_2)) \overbrace{=}^{\text{合成関数の定義}} g\circ f(\mathbb{a}_1) + g\circ f(\mathbb{a}_2)$$

だから，$g\circ f$ は，線型写像である．

(3):　上の (2) と，補題 2.11, (5) により，よい．　□ (補題 7.67)

K 上の線型空間 X から，Y への，線型空間の同型写像が，存在するとき，X と Y は，**同型** (isomorphic) であるといい，このことを，$X \cong Y$ と表わす．X と Y が，K 上の線型空間として同型であることを強調する必要があるときには，$X \cong^K Y$ と書くことにする．$g : X \to Y$ が，K 上の線型空間 X から，K 上の線型空間 Y への同型写像であるとき，これを $f : X \overset{\cong}{\to} Y$ で表わすことにする．

上の補題 7.67 により，2 つの線型空間 X, Y が，“同型である” という関係は，(線型空間の全体のクラス上の) 同値関係である [*28]．群の同型 (218 ページを参照) でと同様に，線型空間 X から Y への同型写像は，X の，線型空間としての代数的な構造を，Y のそれに忠実にコピーするもの，と考えられるから，同型な線型空間 X, Y は，本質的には，同じ “ 型” の線型空間として，同一視することができる．

[*28] クラス上の同値関係，という概念については，付録 B の，360 ページ前後を，参照してください．

Ex-7-9 **例 7.68** 補題 4.81 での，$i_{xy} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は，$\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}^2$ の，$\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みである．この埋め込みは，$\mathbb{R}^2$ から，$\mathbb{R}^3$ での xy-平面 $i_{xy}{}''\mathbb{R}^2$ への，(線型空間の) 同型写像である．更に，i_{xy} は，2 つのベクトルの内積の値を，保存するものにもなっている．このことから，例えば，i_{xy} は，$\mathbb{R}^2$ での直角三角形を，それと “合同” な，$\mathbb{R}^3$ での直角三角形に移す．❏

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，すべての，n-次元の，体 K 上の線型空間は，ベクトル空間 K^n と同一視できる:

P-7-33-0 **定理 7.69** 任意の体 K と，$n \in \mathbb{N}$ に対し，X を，任意の n-次元の K 上の線型空間とすると，$X \cong K^n$ である．

証明． $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ を，X の基底とする．任意の X の要素は，$\mathcal{B}$ の線型結合として一意に表わせる (補題 7.25 の後半による) から，各 $\mathbb{b} \in X$ に対し，この線型結合を，$\mathbb{b} = c_1^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_n$ と書くことにして，

x-7-40
$$\varphi_{\mathcal{B}} : X \to K^n;\quad \mathbb{b} \mapsto \begin{bmatrix} c_1^{\mathbb{b}} \\ \vdots \\ c_n^{\mathbb{b}} \end{bmatrix} \tag{7.73}$$

と定義すると，$\varphi_{\mathcal{B}}$ は，X から K^n への線型空間の同型写像となる:

$\varphi_{\mathcal{B}}$ が，線型写像であることを見るために，$\mathbb{b}, \mathbb{b}' \in X$, $c \in K$ とすると，

$$c\,\mathbb{b} = c(c_1^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_n) = (c \cdot c_1^{\mathbb{b}})\mathbb{u}_1 + \cdots + (c \cdot c_n^{\mathbb{b}})\mathbb{u}_n;$$

$$\begin{aligned} \mathbb{b} + \mathbb{b}' &= (c_1^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n^{\mathbb{b}}\mathbb{u}_n) + (c_1^{\mathbb{b}'}\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n^{\mathbb{b}'}\mathbb{u}_n) \\ &= (c_1^{\mathbb{b}} + c_1^{\mathbb{b}'})\mathbb{u}_1 + \cdots + (c_n^{\mathbb{b}} + c^{\mathbb{b}'_n})\mathbb{u}_n \end{aligned}$$

だから，線型結合表現の一意性 (補題 7.25) により，$i \in \overline{n}$ に対し，$c_i^{c\mathbb{b}} = c \cdot c_i^{\mathbb{b}}$, $c_i^{\mathbb{b}+\mathbb{b}'} = c_i^{\mathbb{b}} + c_i^{\mathbb{b}'}$ である．

したがって，$\varphi_{\mathcal{B}}$ の定義 (7.73) から，$\varphi_{\mathcal{B}}(c\,\mathbb{b}) = c\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{b})$, $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{b} + \mathbb{b}') = \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{b}) + \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{b}')$ である．

$\varphi_{\mathcal{B}}$ が，単射であることは，線型結合表現の一意性 (補題 7.25) から従い，$\varphi_{\mathcal{B}}$ が，全射であることは，任意の $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in K^n$ に対し，$\varphi_{\mathcal{B}}(c_1\mathbb{u}_1 + \cdots + c_n\mathbb{u}_n) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ となることから，よい．❏ (定理 7.69)

演習問題 7.70 K を，体として，I を，ちょうど n 個の要素を持つ有限集合とする．このとき，$K^n \cong {}^I K \cong {}^{\underline{I}}K$ が成り立つ．　□

有限次元空間の上の線型写像に対しては，有限集合の上の写像に対する，演習問題 2.14, (2) と類似の命題が，成立する:

補題 7.71 X を，体 K 上の有限次元の線型空間として，$f, g : X \to X$ を線型写像とする．$f \circ g = id_X$ か，$g \circ f = id_X$ の少なくとも一方が，成り立つときには，f と g は，X から X 自身への同型写像で，$f^{-1} = g$ が成り立つ．　P-7-34

証明． $f, g : X \to X$ を線型写像として，

(7.74)　$f \circ g = id_X$　x-7-41

の場合を考える ($g \circ f = id_X$ の場合も，同様に議論できる)．この場合には，f は，単射だから (補題 2.11, (6))，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ である (補題 7.53, (3))．したがって，次元定理 (定理 7.57) により，

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(X) - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} = \dim(X)$$

である．したがって，補題 7.53, (2) と補題 7.43 により，$\mathrm{Im}(f) = X$, つまり，f は，上射である．よって，f は，X から X 自身への同型写像である．特に，f の逆写像 f^{-1} が，存在する．ここで，

$$g \underbrace{=}_{\text{補題 2.10, (2)}} id_X \circ g \overbrace{=}^{\text{逆写像の定義}} (f^{-1} \circ f) \circ g \underbrace{=}_{\text{補題 2.10, (1)}} f^{-1} \circ (f \circ g) \underbrace{=}_{(7.74)} f^{-1} \circ id_X \underbrace{=}_{\text{補題 2.10, (2)}} f^{-1}$$

である．　□ (補題 7.71)

上の補題を用いると，定理 6.50 の，次のような，エレガントな別証が，得られる．

定理 7.72 (定理 6.50 の別証)　K を，体として，A, B を，K の要素を成分とする n-次の正方行列とする．$AB = E_n$ または，$BA = E_n$ の，少なくとも片方が成り立てば，A は (したがって B も)，可逆で，$B = A^{-1}$ である．　P-7-35 x-7-42 **証明．** (7.75)： $AB = E_n$ が，成り立つ場合を考える．他の場合も，同様に証明できる．定理 4.34 により，$(\varphi_A)^{-1} = \varphi_B$ が成り立つことが示せればよい．

定理 4.24 と，補題 4.27 により，(7.75) は，$\varphi_A \circ \varphi_B = id_{K^n}$ と同値で，例 7.29 により $\dim(K^n) = n$ だから，特に，K^n は有限次元である．したがって，補題 7.71 により，$(\varphi_A)^{-1} = \varphi_B$ である． ❑ (定理 7.72)

Exerc-7-4 **演習問題 7.73** 体 K 上の線型空間 X が，有限次元でないときには，補題 7.71 は，必ずしも成り立たない．

ヒント． 例えば，K を，任意の体として，X を，演習問題 7.16 での ${}^I K$ とするとき，補題 7.71 の主張の反例となるような，f, g を，見つけることができる． ❑ (演習問題 7.73)

次の定理 7.74 は，系 4.75 を一般化し，定理 4.34 を改良するものとなっている．この定理は，次の章の，演習問題 8.3, (2) で，任意の有限次元の線型空間に対しての，同値性を主張する定理として，更に一般化される．

P-7-35-0 **定理 7.74** K を体として，$n \in \mathbb{N}$ に対し，A を K 上の n-次の正方行列とする．このとき，以下は同値である:

(a) A は，可逆である．

(b) $\varphi_A : K^n \to K^n$ は，単射である．

(c) $\varphi_A : K^n \to K^n$ は，全射である．

(d) $\varphi_A : K^n \to K^n$ は，全単射である．

証明． “(a) $\Leftrightarrow$ (d)”: は，定理 4.34 の主張である．

“(d) $\Rightarrow$ (b)”: は，自明である．

“(b) $\Rightarrow$ (c)”: φ_A を単射とすると，次元定理 (定理 7.57) により，$\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) = \underbrace{\dim(K^n)}_{=n} - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))}_{=0} = n$ だから，$\mathrm{Im}(\varphi_A) = K^n$ つまり，φ_A は全射である．

“(c) $\Rightarrow$ (d)”: φ_A を全射とすると，次元定理 (定理 7.57) により，$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = \underbrace{\dim(K^n)}_{=n} - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A))}_{=n} = 0$ だから，補題 7.53 (と例 7.28) により φ_A は単射でもあるので，φ_A は，全単射である． ❑ (定理 7.74)

以下で，第 4.1 節と，第 7.3 節で保留になっていた，主張の証明を与えて，本節を終える．

♦ Scan_2021-04-10–21.11-confinemnt-chap7 - annotated.pdf (34) p.43～

次の定理や，その証明の，意味は，直観的には明らかだとは思うが，その厳密な定式化や，厳密な証明には，数理論理学 (特に，モデル理論) の知識が必要になる [*29]．

定理 7.75 K を体として，Φ を，“すべての ... に対して，$\underset{\sim\sim\sim}{\qquad}$ が成り立つ” という形をしている，K 上の線型空間に関する主張とする．ただし，“すべての ...” は，線型空間の要素や係数体 K の要素に関する言及で，“$\underset{\sim\sim\sim}{\qquad}$” は，等式，または (複数の) 等式に，“かつ”，“または”，“でない” や，これらの組合せで表現できる論理演算を，施して得られる表現とする [*30]．　P-7-36

Φ が，すべての K^n, $n \in \mathbb{N}$ で成り立つなら，Φ は，線型空間の公理 (7.10)～(7.17) から導ける．

証明． 定理が成り立たないとして，矛盾を示す．Φ を，定理でのような形をした，K 上線型空間の要素に関する主張で，Φ はすべての K^n, $n \in \mathbb{N}$ で成り立つが，(7.10)～(7.17) からは導けないようなものとする．

このときには，(7.10)～(7.17) を満たす代数的構造 (つまり K 上の線型空間) X で，Φ を満たさないものが存在する [*31]．特に，$r_1, ..., r_k \in K$ と $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_\ell \in X$ で，Φ の反例となるもの (つまり，“$\underset{\sim\sim\sim}{\qquad}$” を満たさないようなもの) が存在する．$X' := [\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_\ell\}]_X$ とすると，$r_1, ..., r_k$ と $\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_\ell$ は，X' でも，Φ の反例となっている [*32]．補題 7.31 により，X' は有限次元だ

[*29] 線型空間のモデル理論的な扱いについては，脚注*8 も参照してください．

[*30] このような主張の例としては，“すべての $r \in K$ に対して，$r\,\mathbb{0} = \mathbb{0}$ である”，“すべての $\mathbb{a}$ と，すべての $r \in K$ に対して，$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ で，$r \neq 0_K$ なら，$r\,\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ である”，“すべての $r \in K$ と，すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して，$r \neq 0_K$ なら，$\mathbb{a} = \mathbb{b}$ であることと，$r\,\mathbb{a} = r\mathbb{b}$ であることは同値である”，などが含まれます．ここで挙げた 3 つの主張は，それぞれ，補題 4.1 の，(1), (2), (3) であることに注意してください．モデル理論の用語では，ここで述べたような形の主張は，全称文 (universal sentence) あるいは，$\forall$-文とよばれます．

[*31] ここでは，これについては，これ以上は深入りしないことにしますが，このことは，厳密には，脚注*8 で述べたような定式化で，完全性定理 (completeness theorem) を用いることで証明できます．

[*32] このことは，X' の要素 (のいくつか) をパラメタとし，K の (いくつかの) 要素を係数として含む，等式について，それが X で成り立つことと，X' で成り立つことは，同値である，という (それ自体は自明な) 事実に基づいています．

から，$n = \dim(X')$ とすると，定理 7.69 により，Φ は，K^n で成り立たないことになってしまい，矛盾である． □ (定理 7.75)

次の補題は，有限次元の線型空間と，その線型部分空間の間の関係の，すべての場合が，例 7.36, (3) で捉えられていることを示している:

P-7-37 **補題 7.76** X を体 K 上の有限次元の線型空間として，X' を X の部分空間とする．$\dim(X) = n$, $\dim(X') = k$ とすると，$k \leq n$ だが，このとき，X から K^n への (K 上の線型空間の) 同型写像 f で，

$$(7.76)\quad f''X' = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in K^n \,:\, a_1, \ldots, a_k \in K \right\}$$

となるものが存在する．

証明． 補題 7.43 と，基底の拡張定理 (定理 7.44) により，X の基底 $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ で，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ が，X' の基底となるようなものが，取れる．この $\mathcal{B}$ に対し，f を，定理 7.69 の証明での $\varphi_{\mathcal{B}}$ とすると，f は，求めるようなものとなっている． □ (補題 7.76)

7.6　内積空間と正規直交系

inner-product 第 II 巻に移動する．

第 8 章

線型写像と固有値

chap8

You would need, of course, to study and digest Riemann's mathematics in order to master the technique to read and use this equation[*1]. It takes a little commitment and effort. But less than is necessary to come to appreciate the rarefied beauty of a late Beethoven string quartet. In both cases the reward is sheer beauty and new eyes with which to see the world. — Carlo Rovelli [57]

8.1　線型写像の行列表現

matrix-representation　X と Y を，体 K 上の有限次元の線型空間で，それぞれの次元が，$\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$ となるものとする．$\mathcal{B}_X = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$, $\mathcal{B}_Y = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_m\}$ を，それぞれ，X と Y の基底とすると，補題 7.69 (の証明) により，これらの基底は，線型空間の同型写像

x-8-0
$$\varphi_{\mathcal{B}_X} : X \to K^n, \quad \varphi_{\mathcal{B}_Y} : Y \to K^m \tag{8.1}$$

を，惹き起こす．

特に，$j \in \overline{n}$, $i \in \overline{m}$ に対し，

x-8-0-0
$$\varphi_{\mathcal{B}_X}(\mathbb{u}_j) = \mathbb{e}^n_j, \qquad \varphi_{\mathcal{B}_Y}(\mathbb{v}_i) = \mathbb{e}^m_i \tag{8.2}$$

である．

$f : X \to Y$ を，K 上の線型写像とするとき，

x-8-1
$$\varphi_{\mathcal{B}_Y} \circ f = f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y} \circ \varphi_{\mathcal{B}_X} \tag{8.3}$$

となる写像 $f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y} : K^n \to K^m$ を，考える．

---

*1 引用した文章での，“this equation” は，一般相対性理論の方程式ですが，ここで言っていることは，他の数学や物理学などの “美しい” 理論で置き換えても，全く同様に言えると思います．この文章を書いているのは物理学者なので，アインシュタインの美しい理論を観賞するには，リーマン幾何学を勉強する苦行を行なわなくてはいけない，とも読めるような書き方になっていますが，むしろリーマンの理論自身も，ここで言っているような，観賞に値する “美しい” 理論と理解すべきでしょう．

ちなみに，ここで言及されているベートーベンの後期の弦楽四重奏曲群は，最後のピアノソナタ群や，バガテルよりさらに後に書かれた，ベートーベンの最晩年の作品です．この文章では，ベートーベンの晩年の弦楽四重奏曲の美を理解するのは，たやすいことだ，と言っているように見えるかもしれませんが，実を言えば，これらの弦楽四重奏曲を深く理解するにも，自分自身で演奏に参加するか (深い理解を得る，という目的に関しては，ビオラ奏者として参加するのがベストでしょう)，あるいは，スコアを読み込むか，というような「苦行」が，必要になります．

$$
(8.4)\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}_X}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}_Y}"] \\
K^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}"'] & K^m
\end{tikzcd}
$$
x-8-1-a

条件 (8.3) は，

$$(8.5)\qquad f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = \varphi_{\mathcal{B}_Y} \circ f \circ (\varphi_{\mathcal{B}_X})^{-1}$$
x-8-1-0

と同値だから，補題 7.67, (1), (2) により，$f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} : K^n \to K^m$ は，線型写像である．したがって，定理 4.23 により，$f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ の表現行列が存在する．$m \times n$-行列 $A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ を，$f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = \varphi_{A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}}$ となるものとする．つまり，任意の $\mathbb{a} \in K^n$ に対し，$f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}(\mathbb{a}) = A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}\mathbb{a}$ である．

命題 8.1 各 $j \in \overline{n}$ に対し，$a_{1,j}, \ldots, a_{m,j} \in K$ を， P-8-0

$$(8.6)\qquad f(\mathbb{u}_j) = a_{1,j}\mathbb{v}_1 + a_{2,j}\mathbb{v}_2 + \cdots + a_{m,j}\mathbb{v}_m$$
x-8-2

となるように取ると，$A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = [a_{i,j}]$ である．

証明． (8.6) と，(8.2), および，$\varphi_{\mathcal{B}_Y}$ の線型性から，

$$(8.7)\qquad \varphi_{\mathcal{B}_Y}(f(\mathbb{u}_j)) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}$$
x-8-3

である．したがって，

$$f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}(\mathbb{e}^n_j) \underbrace{=}_{(8.5)\text{ による}} \varphi_{\mathcal{B}_Y}(f(\underbrace{(\varphi_{\mathcal{B}_X})^{-1}(\mathbb{e}^n_j)}_{=\mathbb{u}_j,\ (8.2)\text{ による}})) = \varphi_{\mathcal{B}_Y}(f(\mathbb{u}_j)) \underbrace{=}_{(8.7)\text{ による}} \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}$$

となる．

よって，定理 4.23 により，$A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = [a_{i,j}]$ である． ❑ (命題 8.1)

上のような $A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ を，**線型写像 f の，基底 $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ に関する行列表現**と呼ぶことにする．

♦ f が単射 ⇔ $f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ が単射 etc. の同値を示し，系 7.74 の有限次元空間 X への一般化を formulate する．演習問題にする？

次に，上での線型空間 X, Y が，それぞれ，K^n, K^m である場合について，考えてみる．このときには，

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & K^n & \longrightarrow & K^m & \\
\varphi_{\mathcal{B}_X} & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \varphi_{\mathcal{B}_Y} \\
 & K^n & \longrightarrow & K^m & \\
 & & f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} & &
\end{array}
$$

となっていて，$f, \varphi_{\mathcal{B}_X}, \varphi_{\mathcal{B}_Y}$ の表現行列が，それぞれ， $A_f, A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}}, A_{\varphi_{\mathcal{B}_Y}}$ だとすると，定理 4.24 と，定理 4.34 により，

x-8-4 $$(8.8)\quad A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = A_{\varphi_{\mathcal{B}_Y}} A_f (A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}})^{-1}$$

である．

定理 7.12 により，$[\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]$ も，$[\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_m]$ も，可逆であることに，注意する．

P-8-1 **命題 8.2** $X = K^n, Y = K^m$ として，$\mathcal{B}_X = \{\mathbb{u}_1, \dots, \mathbb{u}_n\}$, $\mathcal{B}_Y = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m\}$, $f : K^n \to K^m$, $\varphi_{\mathcal{B}_X}$, $\varphi_{\mathcal{B}_Y}$, $A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}}$, A_f, $A_{\varphi_{\mathcal{B}_Y}}$, $A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ を，上のようなものとする．このとき，$A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}} = ([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1}$, $A_{\varphi_{\mathcal{B}_Y}} = ([\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_m])^{-1}$ となり，したがって，

x-8-5 $$(8.9)\quad A^f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y} = ([\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_m])^{-1} A_f [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]$$

である．

証明． $\varphi_{\mathcal{B}_X}$ の定義から，各 $i \in \overline{n}$ に対し，$\varphi_{\mathcal{B}_X}(\mathbb{u}_i) = \mathbb{e}^n_i$ である．したがって $(\varphi_{\mathcal{B}_X})^{-1}(\mathbb{e}^n_i) = \mathbb{u}_i$ となるから，定理 4.23 により，$(A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}})^{-1} = A_{(\varphi_{\mathcal{B}_X})^{-1}} = [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]$ である．よって，

x-8-5-0 $$(8.10)\quad A_{\varphi_{\mathcal{B}_X}} = ([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1}$$

である．同様に，$A_{\varphi_{\mathcal{B}_Y}} = ([\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_m])^{-1}$ である．(8.9) は，このことと，(8.8) から，従う． ❑ (命題 8.2)

上で，特に，$\mathcal{B}_X$ と，$\mathcal{B}_Y$ を，それぞれ，K^n と，K^m の標準基底 $\{\mathbb{e}^n_1, \dots, \mathbb{e}^n_n\}$,

$\{\mathbb{e}_1^m, \ldots, \mathbb{e}_m^m\}$ とするときには，第 4.2 節の意味での，$f : K^n \to K^m$ の表現行列は，f の基底 $\mathcal{B}_X$ と $\mathcal{B}_Y$ に関する表現行列と，一致することに，注意する．

特に，$n = m$ で，$X = K^n = K^m = Y$ の場合には，$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y$ と，取ることができるから，これを $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ と呼ぶことにすると，線型写像 $f : K^n \to K^n$ に対して，対応する線型写像を $f_{\mathcal{B}}$ と書き，この表現行列となっている，基底 $\mathcal{B}$ (と $\mathcal{B}$) に関する f の表現行列を $A_{\mathcal{B}}^f$ と書くことにする．

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^n \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

このときには，命題 8.2 での (8.9) の特別な場合として，

(8.11)　$f_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{B}} \circ f \circ {\varphi_{\mathcal{B}}}^{-1}$ x-8-5-1

となる．命題 8.2 の証明での，(8.10) に関する議論により，

(8.12)　$\varphi_{\mathcal{B}}$ の表現行列は，$([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1}$ である x-8-5-2

が言えるから，(8.11) に対応する，行列表現は，

(8.13)　$A_{\mathcal{B}}^f := ([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1} A_f [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]$ x-8-6

である．この (正方) 行列を，線型変換 $f : X \to X$ の $\mathcal{B}$ に関する表現行列とよぶことにする．

演習問題 8.3（1）　X と Y を，体 K 上の有限次元の線型空間として，$\mathcal{B}_X$ と $\mathcal{B}_Y$ を，それぞれの基底とする．$f : X \to Y$ を，K 上の線型写像として，$f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}$ を，(8.4) でのようなものとする．このとき， Exerc-8-a

（i）　f は，単射である　$\Leftrightarrow$　$f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}$ は，単射である．

（ii）　f は，上射である　$\Leftrightarrow$　$f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}$ は，上射である．

（2）　(定理 7.74 の一般化)　X を，K 上の有限次元の線型空間として，$\mathcal{B}$ を，X の基底とする．このとき $Y = X$, $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}$ としたときの，

(8.4) での $f_{\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y}$ を，$f_{\mathcal{B}}$ と，表わすことにする．$A = A_{f_{\mathcal{B}}}$ とする．$f_{\mathcal{B}} = \varphi_A$ である．このとき，以下は同値である:

(a)　A は，可逆である．

(b)　$f : X \to X$ は，単射である．

(c)　$f : X \to X$ は，全射である．

(d)　$f : X \to X$ は，全単射である．

$$\begin{array}{ccccc} & X & \stackrel{f}{\longrightarrow} & X & \\ \varphi_{\mathcal{B}} & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \varphi_{\mathcal{B}} \\ & K^n & \underset{f_{\mathcal{B}} = \varphi_A}{\longrightarrow} & K^n & \end{array}$$

ヒント． (2) は，(1) と，定理 7.74 から，従う．　(演習問題 8.3)

8.2　正方行列の対角化と，固有値，固有ベクトル

8.2.1　正方行列の対角化

eigentlich

K を，体として，$n \in \mathbb{N}$ とし，K 上の線型写像 $f : K^n \to K^n$ を考える．前節で考察したように，K^n の基底 $\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ を選ぶと，f の基底 $\mathcal{B}$ に関する行列表現 $A^f_{\mathcal{B}} = ([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1} A_f [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]$ が，定まる [*2]．

以下で，$\mathcal{B}$ に関する行列表現が，できるだけシンプルなものになるように，基底 $\mathcal{B}$ をうまく選ぶ，ということについて考察する．この方向の考察は，第 II 巻で，更に，推し進められることになる．

もちろん，「できるだけシンプルな」の解釈は，一意には，決まらないが，一つの妥当な解釈として，「表現行列が対角行列になる」が，考えられる．

A を，対角成分が $a_1, \ldots, a_n$ であるような対角行列とするときには，A のベクトル $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ への作用は，

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{bmatrix}$$

となる．というのが，ここでの「シンプルであること」の内訳である．特に，

[*2] ここでは，簡単のため，基底を，順序の入っていない集合 $\{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ として書いていますが，厳密には，この基底に関する関数 f の表現行列 $A^f_{\mathcal{B}}$ を決定するときには，$\{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ の順序 (つまり，最初のものが，$\mathbb{u}_1$，次のものが，$\mathbb{u}_2$ etc. という順序) が，反映されていることに注意しておきます．

$K = \mathbb{R}$ のときには，これは，座標ごとの，縮尺 a_i による縮小拡大である [*3].

$A^f_{\mathcal{B}}$ が，対角行列になるような，$\mathcal{B}$ を求めることを，線型写像 f の対角化，あるいは，正方行列 A_f の**対角化** (diagonalization) とよぶ.

正方行列 A が，対角化を，持つことを，A は，**対角化可能**である，という．K, K' を，2 つの体として，K が，K' の部分体となっているとき (例えば，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ がこのような組の例である)，A が，K 上の n-次の正方行列なら，A は，K' 上の正方行列と見ることもできる．後で見るように，A は K 上の n-次の正方行列としては，(K^n の基底によってでは) 対角できないが，K' 上の n-次正方行列としては，(${K'}^n$ の基底によって) 対角化できる，という状況が生じることはあり得る．そこで，A が，K^n の基底によって対角化できる，ということを強調するために，A は，K **上で対角化可能**である，と言うこともある．また，A の対角化を，与える K^n の基底 $\mathcal{B}$ のことも，A の対角化と呼ぶことにする.

補題 8.4 体 K と，K 上の線型写像 $f : K^n \rightarrow K^n$ に対し，K^n の基底 P-8-2
$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n\}$ が，f の対角化となるのは，各 $i \in \overline{\mathbb{N}}$ に対し，$a_i \in K$ で，$f(\mathbb{u}_i) = a_i\mathbb{u}_i$ となるものが取れる，ちょうどそのときである.

証明. (8.14)：$A^f_{\mathcal{B}}$ が，対角成分 $a_1, ..., a_n$ を持つ対角行列となっている， x-8-6-0
とすると，

$$f(\mathbb{u}_i) = \varphi_{\mathcal{B}}{}^{-1} \circ f_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{u}_i) \underbrace{=}_{\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{u}_i) = \mathbb{e}^n_i \text{ による}} \varphi_{\mathcal{B}}{}^{-1} \circ f_{\mathcal{B}}(\mathbb{e}^n_i) \underbrace{=}_{(8.12) \text{ による}} [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n] A^f_{\mathcal{B}}\, \mathbb{e}^n_i$$
$$\underbrace{=}_{(8.14) \text{ の仮定による}} [\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n]\, a_i \mathbb{e}^n_i = a_i \mathbb{u}_i$$

である.

逆に，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，$f(\mathbb{u}_i) = a_i\mathbb{u}_i$ とすると，

$$A^f_{\mathcal{B}}\, \mathbb{e}^n_i \underbrace{=}_{(8.11) \text{ による}} \varphi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}{}^{-1}(\mathbb{e}^n_i) \underbrace{=}_{(8.12) \text{ による}} \varphi_{\mathcal{B}}(f(\mathbb{u}_i)) \underbrace{=}_{f \text{ に関する仮定による}} \varphi_{\mathcal{B}}(a_i\mathbb{u}_i)$$

[*3] もう少し正確には，$a_i < 0$ のときには，これは，“向き” の変更 (裏返し) と，縮小拡大の組合せになっています.

$$\underbrace{=}_{(8.12)\text{ による}} ([\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n])^{-1}\, a_i \mathbb{u}_i = a_i \mathbb{e}_i^n$$

である．$A_{\mathcal{B}}^f \mathbb{e}_i^n$ は，行列 $A_{\mathcal{B}}^f$ の i 列目だから，$A_{\mathcal{B}}^f$ は，対角成分を $a_1, \ldots, a_n$ とする，対角行列である． □ (補題 8.4)

8.2.2　固有値と固有ベクトル

上の補題 8.4 を，念頭に置いて，次の定義を行なう: X を，体 K 上の線型空間として，$f : X \to X$ を，線型写像とする．定義域と，値域が，同じ線型空間となっているような，線型写像は，(X 上の) **線型変換** (linear transformation) 線型変換と呼ばれることもある．以下では，この用語を用いることにする．

$a \in K$ が，X 上の線型変換 f の**固有値** (eigenvalue) である，とは，$\mathbb{u} \in X \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ で，$f(\mathbb{u}) = a\mathbb{u}$ となるようなものが存在すること，とする [*4]．

$a \in K$ が，線型変換 $f : X \to X$ の固有値のとき，$f(\mathbb{u}) = a\mathbb{u}$ となるベクトル $\mathbb{u} \in X$ を，(固有値 a に対応する f の) **固有ベクトル** (eigenvector) とよぶ．固有値の定義では，ゼロベクトルは除外していたが，固有ベクトル (たち) には，ゼロベクトルも，含まれることにしていることに注意する．

P-8-2-0 **補題 8.5** X を，体 K 上の線型空間として，f を，X 上の線型変換とする．$a \in K$ に対し．

[*4] 固有値や固有ベクトルの概念の歴史的な背景については，英語版の Wikipedia の項目
https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors
にコンパクトな記述があります．ドイツ語版の Wikipedia の項目
https://de.wikipedia.org/wiki/Eigenwertproblem
にもあるように，ここでのような意味での，固有値，固有ベクトルの概念や「固有値」や「固有ベクトル」という (原語での) 用語は，ヒルベルトが，1904 年 (明治 37 年) の論文 [31] で導入したもの，と考えられているようです．

固有値，固有ベクトルは，この，20 世紀前半の数学を代表する数学者であるヒルベルトが，導入したドイツ語の用語では，それぞれ，„Eigenwert“, „Eigenvektor“ ですが，この「固有の」という意味のドイツ語の接頭詞 "eigen" は，英語でも，そのまま踏襲されて，“eigenvalue” “eigenvector” という重箱読み的英語が，使われるようになっています．

なお，ヒルベルトに端を発する重箱読み的英語には，「有限の立場」と日本語に誤訳されることの多い，„finitärer Standpunkt“ (確定的な立場?) の “finitary standpoint” という訳もあります (ドイツ語での “finitär” は，文法用語からの借用語と思われますが，英語での “finitary” は，普通の辞書には載っていない造語です)．

$$E_a^f := \{\mathbb{u} \in X \,:\, \mathbb{u} \text{ は}, f \text{ の}, a \text{ に対応する固有ベクトルである }\}$$

とすると，E_a^f は，X の線型部分空間である．

また，$a \in K$ が f の固有値であるのは，$E_a^f \neq \{\mathbb{0}_X\}$ となる，ちょうどそのときである．

証明． a が，f の固有値でないなら，固有値の定義から，$E_a^f = \{\mathbb{0}_X\}$ である．特に，この場合には，E_a^f は，X の 0-次元部分空間である．

a が，f の固有値なら，固有値の定義から，$\mathbb{0}_X$ と異る，a の，固有ベクトルが，存在するから，$E_a^f \neq \{\mathbb{0}_X\}$ である．

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in E_a^f$, $c \in K$ とすると，

$$f(c\,\mathbb{u}) \underbrace{=}_{f\text{ の線型性による}} c\,f(\mathbb{u}) \overbrace{=}^{\mathbb{u} \in E_a^f\text{ による}} c(a\,\mathbb{u}) = a(c\,\mathbb{u})$$

により，$c\,\mathbb{u} \in E_a^f$ である．また，

$$f(\mathbb{u}+\mathbb{v}) \underbrace{=}_{f\text{ の線型性による}} f(\mathbb{u}) + f(\mathbb{v}) \overbrace{=}^{\mathbb{u},\mathbb{v} \in E_a^f\text{ による}} a\,\mathbb{u} + a\,\mathbb{v} = a(\mathbb{u}+\mathbb{v})$$

だから，$\mathbb{u}+\mathbb{v} \in E_a^f$ である．

以上から，E_a^f が，X の，K 上の線型部分空間であることが，分かった．

□ (補題 8.5)

上でのような，線型空間 X の線型部分空間 E_a^f を，線型変換 f の，固有値 a に対応する，**固有空間**とよぶ．

$X = K^n$ の場合には，線型変換 $f : K^n \to K^n$ と，その表現行列 A_f は，1 対 1 に対応する (n-次正方行列 A の，線型変換 φ_A への対応が，これの逆対応になる) ので，n-次の正方行列 A に対して，その固有値や固有ベクトルは，φ_A の固有値や固有ベクトルのこと，とする．

つまり，A が，体 K 上の n-次の正方行列のとき，$a \in K$ が，A の**固有値** (eigenvalue) である，とは，$\mathbb{u} \in K^n \setminus \{\mathbb{0}_n\}$ で，$A\,\mathbb{u} = a\mathbb{u}$ となるようなものが，存在すること，である．

$a \in K$ が，A の固有値のとき，$\mathbb{u} \in K^n$ が，(固有値 a に対応する A の) **固**

有ベクトル (eigenvector) であるとは，$A\mathbb{u} = a\mathbb{u}$ が成り立つこととする．

また，$E_a^A := E_a^{\varphi_A}$ とする．つまり，$E_a^A = \{\mathbb{u} \in K^n : A\mathbb{u} = a\mathbb{u}\}$ である．

正方行列 (あるいは，K^n 上の線型写像) の固有値と固有ベクトルは，次の定理の応用で求めることができる:

P-8-3 **定理 8.6** A を，体 K 上の n-次の正方行列とするとき，$a \in K$ に対し，次の (a), (b), (c) は，同値である:

（a） a は，A の固有値である．

（b） $A - a\,E_n$ は，可逆でない．

（c） $\det(A - a\,E_n) = 0$ である．

証明． (a) $\Leftrightarrow$ (b):　$a \in K$ と，$\mathbb{u} \in K^n$ に対し，

x-8-8
$$(8.15)\quad A\,\mathbb{u} = a\,\mathbb{u} \;\Leftrightarrow\; A\,\mathbb{u} = aE_n\mathbb{u} \;\Leftrightarrow\; (A - a\,E_n)\mathbb{u} = \mathbb{0}_n$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
&a \text{ は，} A \text{ の固有値の一つである}\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{固有値の定義による}} \mathbb{u} \in K^n \setminus \{\mathbb{0}_n\} \text{ で，} A\,\mathbb{u} = a\,\mathbb{u} \text{ となるものが存在する}\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(8.15)\text{ による}} \mathbb{u} \in K^n \setminus \{\mathbb{0}_n\} \text{ で，} (A - aE_n)\,\mathbb{u} = \mathbb{0}_n \text{ となるものが存在する}\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\varphi_{A-aE_n} \text{ と } \mathrm{Ker}(\cdot) \text{ の定義による}} \mathrm{Ker}(\varphi_{A-aE_n}) \neq \{\mathbb{0}_n\}\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{定理 7.74 と補題 7.53, (3) による}} A - aE_n \text{ は可逆でない}
\end{aligned}$$

である．

(b) $\Leftrightarrow$ (c):　は，系 6.47 により，よい． □ (定理 8.6)

n-次正方行列 A に対して，ε を，変数として，定理 8.6, (c) に対応する (K 係数の，n-次) 方程式 $\det(A - \varepsilon E_n) = 0$ は，A の**特性方程式** (characteristic equation) とよばれる [*5]．

---

*5 $\det(A - \varepsilon E_n)$ を，**特性多項式**とよんで，$\det(A - \varepsilon E_n) = 0$ の解を，特性多項式の**根** (こ

例 8.7 $K=\mathbb{R}$ 上の 2-次の正方行列 $A=\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}$ の特性方程式を解くと，　Ex-8-0

$$\det(A-\varepsilon E_2)=0 \iff \begin{vmatrix}8-\varepsilon & -10\\ 5 & -7-\varepsilon\end{vmatrix}=0 \iff \varepsilon^2-\varepsilon-6=0$$
$$\iff (\varepsilon-3)(\varepsilon+2)=0 \iff \varepsilon=3 \text{ または，} \varepsilon=-2$$

である．A の固有値 3 に対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ の満たすべき方程式は，

$$\begin{bmatrix}8-3 & -10\\ 5 & -7-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathbb{0}_2 \tag{8.16}$$
x-8-8-a

と書けるから，これを解くと，$E^A_3=\{c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\}$ が得られる．同様に，A の固有値 -2 に対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ の満たすべき方程式

$$\begin{bmatrix}8-(-2) & -10\\ 5 & -7-(-2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathbb{0}_2 \tag{8.17}$$
x-8-8-0

を解いて，$E^A_{-2}=\{c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\}$ が得られる．$\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ は互いに他のスカラー倍でないから，(例 7.1 と，定理 7.11 により)，$\mathbb{u}_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$, $\mathbb{u}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ とすると，$\mathcal{B}=\{\mathbb{u}_1,\mathbb{u}_2\}$ は，$\mathbb{R}^2$ の基底となり，補題 8.4 により，これが，A の対角化で，

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}}_{=([\mathbb{u}_1\mathbb{u}_2])^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{=[\mathbb{u}_1\mathbb{u}_2]} \tag{8.18}$$
x-8-9

である．□

演習問題 8.8 例 8.7 での固有ベクトルの計算 (つまり，(8.16) と (8.17) の求解) を行ない，等式 (8.18) の検算をせよ．□　Exerc-8-0

上の例 8.7 では，A の固有値 3 と -2 の，それぞれの，ゼロベクトルでない固有ベクトル $\mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2$ を取ることで，$\mathbb{R}^2$ の基底を作ることができたが，これ

ん) とよぶ，という，多少時代がかった用語の使い方がされることも，あります．

は，“偶然うまくできた”わけではなく，次の補題の記述する事情が，その背景となっている．

P-8-4 **補題 8.9** X を，体 K 上の線型空間として，f を，X 上の線型変換とする．$a_1, \ldots, a_k \in K$ を，互いに異る f の固有値として，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k \in X \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ を，それぞれ，$a_1, \ldots, a_k$ に対する，f の固有ベクトルとする．このとき，$\{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k\}$ は，線型独立である．

証明． そうでないとすると，

x-8-10 (8.19) 互いに異る f の固有値 $a_1, \ldots, a_k \in K$ と，それぞれ，$a_1, \ldots, a_k$ に対する，f の固有ベクトル $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k \in X \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ で，すべてが 0_K ではない $c_1, \ldots, c_k \in K$ に対し (つまり，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{bmatrix}$ となるような，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \in K^n$ に対し)，

x-8-12 (8.20) $\mathbb{0}_X = c_1\mathbb{u}_1 + \cdots + c_k\mathbb{u}_k$ となる

ものが存在する．このような反例のうち，k が，最小となるものを，選んでおく (つまり，上での $a_1, \ldots, a_k$ と $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ での k が最小のものとなっているとする)．

x-8-11 (8.21) $k \geq 2$

である ($\mathbb{u}_1 \neq \mathbb{0}_0$ だから，$\{\mathbb{u}_1\}$ は，線型独立である)．

k の最小性から，$c_1, \ldots, c_k \in K \setminus \{0_K\}$ である (もし，ある $i \in \overline{k}$ に対し $c_i = 0$ なら，$a_1, \ldots, a_k$ と $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ から，c_i, $\mathbb{u}_i$ を除いたものも，反例となってしまい，k の最小性に矛盾する)．

x-8-13 (8.22)
$$\begin{aligned}\mathbb{0}_X &\underbrace{=}_{(8.20)\text{ と，補題 }7.52\text{ による}} f(c_1\mathbb{u}_1 + \cdots + c_k\mathbb{u}_k) \overbrace{=}^{f\text{ の線型性による}} c_1 f(\mathbb{u}_1) + \cdots + c_k f(\mathbb{u}_k) \\ &\underbrace{=}_{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k\text{ の選び方による}} c_1 a_1 \mathbb{u}_1 + \cdots + c_k a_k \mathbb{u}_k\end{aligned}$$

である．再び k の最小性から (上でと同じ議論により)，$a_1, \ldots, a_k \in K \setminus \{0_K\}$

がわかる．ここで，(8.20) $-\frac{1}{a_1}\times$ ((8.22) の両端辺からなる等式) を整理すると，

$$\mathbb{0}_X = \text{“}\mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_k \text{ の自明でない線型結合”}$$

という形の等式が得られるが，これは，k の最小性の仮定に，矛盾である．

□ (補題 8.9)

補題 8.10 X を，体 K 上の線型空間として，f を，X 上の線型変換とする．$a_1, \ldots, a_k \in K$ を，互いに異る f の固有値として，各 $i \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{u}_{i,1}, \ldots, \mathbb{u}_{i,n_i}$ を，n_i 個の互いに異る a_i の固有ベクトルで，$\{\mathbb{u}_{i,1}, \ldots, \mathbb{u}_{i,n_i}\}$ は K 上線型独立とする，このとき， P-8-5

$$\mathbb{u}_{1,1}, \ldots, \mathbb{u}_{1,n_1},\ \mathbb{u}_{2,1}, \ldots, \mathbb{u}_{2,n_2},\ \ldots,\ \ \mathbb{u}_{k,1}, \ldots, \mathbb{u}_{k,n_k}$$

も線型独立である．

証明． そうでなかったとすると，

$$\begin{aligned} c_{1,1}\mathbb{u}_{1,1} + \cdots + c_{1,n_1}\mathbb{u}_{1,n_1} + c_{2,1}\mathbb{u}_{2,1} + \cdots + c_{2,n_2}\mathbb{u}_{2,n_2} + \cdots + c_{k,1}\mathbb{u}_{k,1} \\ + \cdots + c_{k,n_k}\mathbb{u}_{k,n_k} = \mathbb{0}_X \end{aligned} \tag{8.23}$$ x-8-14

が，自明でない線型結合となっているような，係数 $c_{1,1}, \ldots \in K$ が，取れる．各 $i \in \overline{k}$ に対し，

$$\mathbb{u}_i = c_{i,1}\mathbb{u}_{i,1} + \cdots + c_{i,n_i}\mathbb{u}_{i,n_i}$$

とすると，補題 8.5 により，$\mathbb{u}_i \in E^f_{a_i}$ で，(8.23) により，

$$\mathbb{u}_1 + \mathbb{u}_2 + \cdots + \mathbb{u}_k = \mathbb{0}_X \tag{8.24}$$ x-8-15

である．

各 $i \in \overline{k}$ に対する，$\mathbb{u}_{i,1}, \ldots, \mathbb{u}_{i,n_i}$ の独立性と，(8.23) の線型結合の非自明性から，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ は，すべてが $\mathbb{0}_X$ とは異る．しかし，これは，補題 8.9 に矛盾である． □ (補題 8.10)

上の補題を用いると，正方行列の対角化可能性の，次のような特徴付けが得られる:

P-8-6 **定理 8.11** (対角化可能性の特徴付け定理)　A を，体 K 上の n-次の正方行列とする．$a_1, ..., a_k \in K$ を，互いに異る，A の，K 上での固有値の全体とする．このとき，

（1）　$\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k}) \le n$ である．

（2）　A の K 上の対角化 $\mathcal{B}$ が, 存在するのは, $\dim(E^A_{a_1})+\cdots+\dim(E^A_{a_k}) = n$ となる，ちょうどそのときである．

証明． (1): $i \in \overline{k}$ に対し，$n_i := \dim(E^A_{a_i})$ として，$\mathcal{B}_i = \{\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_{n_i}\}$ を $E^A_{a_i}$ の基底とする．$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ とすると，補題 8.10 により，$\#(\mathcal{B}) = \dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k})$ で，$\mathcal{B} \subseteq K^n$ は独立である．したがって，不等式 $\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k}) \le \dim(K^n) = n$ が成り立つ．

(2): $\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k}) = n$ なら，$\mathcal{B}_i$, $i \in \overline{k}$, $\mathcal{B}$ を，(1) でのように取ると，$\mathcal{B}$ は K^n の基底となる．したがって，補題 8.4 により，$\mathcal{B}$ は φ_A の (つまり A の) 対角化である．

逆に，$\mathcal{B}$ が，A の対角化なら，補題 8.4 により，$\mathcal{B}_i = \mathcal{B} \cap E^A_{a_i}$ とすると，$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ となるから，$\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k}) \ge n$ がわかる．したがって，(1) と合せると，$\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_k}) = n$ である．

□ (定理 8.11)

P-8-6-0 **系 8.12** K を，体として，A を，K 上の n-次の正方行列とするとき，A の特性方程式 $\det(A - \varepsilon I) = 0$ が，(K の範囲で) n 個の互いに異る解を持つなら，A は (K で) 対角化可能である．また，このときには，A の各固有値 a に対し，$\dim(E^A_a) = 1$ となる．

証明． $a_1, ..., a_n$ を，A の特性方程式の互いに異る解とすると，定理 8.6 により，各 a_i, $i \in \overline{n}$ は，A の固有値である．固有値の定義から $\dim(E^A_{a_i}) \ge 1$ だから，$\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_n}) \ge n$ である．したがって，対角化可能性の特徴付け定理 (定理 8.11) により，$\dim(E^A_{a_1}) + \cdots + \dim(E^A_{a_n}) = n$ で，$i \in \overline{n}$ に対し，$\dim(E^A_{a_i}) = 1$ となり，A は，対角化可能であることが，分かる．

□ (系 8.12)

正方行列の可逆性には，既に，定理 5.23' (245 ページ), 定理 7.12, 定理 7.74 などの，様々な特徴付けが，与えられているが，これは，以下のように，固有

値に関する命題として，特徴付けることもできる:

定理 8.13 体 K 上の n-次の正方行列 A が可逆であることと，0_K が A の固有値でないこと，は同値である． P-8-7

証明． 0_K は，A の固有値である

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{固有値の定義と } 0\mathbb{u}=\mathbb{0}_n \text{ による}} \ \mathbb{u} \in K^n \setminus \{\mathbb{0}_n\} \text{ で，} A\mathbb{u} = \mathbb{0}_n \text{ となるものが存在する}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\varphi_A \text{ と } \mathrm{Ker}(\cdot) \text{ の定義による}} \ \mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{\mathbb{0}_n\} \ \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{補題 7.53 による}} \ \varphi_A \text{ は，単射でない}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{定理 7.74 による}} \ A \text{ は可逆でない}$$

□ (定理 8.13)

X と Y を，K 上の線型空間として，f と f' を，それぞれ，X 上と，Y 上の線型変換とする．f と f' が，**相似**である，とは，X から Y への同型写像 g で，

(8.25)　$f = g^{-1} \circ f' \circ g$ 　x-8-15-a

となるものが存在すること，とする．f と f' が，相似であることを，$f \sim f'$ と表わすことにして，同型写像 $g : X \to Y$ が，そのことの，(8.25) の意味での例証となっていることを，$f \sim_g f'$ と，表わすことにする．

補題 8.14 線型変換の相似性は，線型変換の間の同値関係である．つまり，X, Y, Z を，体 K 上の線型空間として，f, f', f'' をそれぞれ，X, Y, Z 上の線型変換とするとき，次の (i), (ii), (iii) が成り立つ: P-8-8

(i) $f \sim f$ である．

(ii) $f \sim f'$ なら，$f' \sim f$ である．

(iii) $f \sim f'$, $f' \sim f''$ なら，$f \sim f''$ である．

証明． (i): $f \sim_{id_X} f$ により，よい．(ii): $f \sim_g f'$ なら，$f' \sim_{g^{-1}} f$ である．(iii): $f \sim_g f'$, $f' \sim_{g'} f''$ なら，$f \sim_{g' \circ g} f''$ である． □ (補題 8.14)

体 K 上の線型空間 X と，X 上の線型変換 f に対し，

(8.26)　$\mathcal{E}_f := \{a \in K : a \text{ は } f \text{ の固有値 }\}$ 　x-8-15-a-0

と書くことにする．

P-8-9 **定理 8.15** 体 K 上の線型空間 X, X' と，それぞれ，X 上と X' 上の，線型変換 f, f' に対し，ある，線型空間の同型写像 $g : X \to X'$ により，$f \sim_g f'$ なら，$\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{f'}$ で，各 $a \in \mathcal{E}_f$ $(=\mathcal{E}_{f'})$ に対し，$E_a^{f'} = g''E_a^f$ で，$g \restriction E_a^f : E_a^f \xrightarrow{\cong} E_a^{f'}$ である．

特に，E_a^f が，有限次元であることと，$E_a^{f'}$ が，有限次元であることは同値で，これが成り立つ場合には，$\dim(E_a^f) = \dim(E_a^{f'})$ である．

証明． $f \sim_g f'$ により，(8.25) が成り立つ．

$a \in \mathcal{E}_f$ で，$\mathbb{u} \in E_a^f \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ とすると，

x-8-15-a-1 (8.27) $f(\mathbb{u}) = a\,\mathbb{u}$

だから，

$$
\begin{aligned}
f'(g(\mathbb{u})) &\underbrace{=}_{(8.25)\text{ による}} (g \circ f \circ g^{-1})(g(\mathbb{u})) = g \circ f \circ \underbrace{g^{-1} \circ g}_{= id_X}(\mathbb{u}) = g \circ f(\mathbb{u}) \\
&= g(f(\mathbb{u})) \underbrace{=}_{(8.27)\text{ による}} g(a\,\mathbb{u}) \underbrace{=}_{g\text{ の線型性による}} a\,g(\mathbb{u})
\end{aligned}
$$

である．g は，単射だから，$\mathbb{u} \neq \mathbb{0}_X$ により，$g(\mathbb{u}) \neq \mathbb{0}_{X'}$ である．したがって，$a \in \mathcal{E}_{f'}$ で，$g(\mathbb{u}) \in E_a^{f'} \setminus \{\mathbb{0}_{X'}\}$ となることが分かる．

一方，$a \in \mathcal{E}_{f'}$ として，$\mathbb{v} \in E_a^{f'} \setminus \{\mathbb{0}_{X'}\}$ とすると，

x-8-15-a-2 (8.28) $f'(\mathbb{v}) = a\,\mathbb{v}$

だから，

$$
\begin{aligned}
f(g^{-1}(\mathbb{v})) &\underbrace{=}_{(8.25)\text{ による}} (g^{-1} \circ f' \circ g)(g^{-1}(\mathbb{v})) = (g^{-1} \circ f' \circ \underbrace{g \circ g^{-1}}_{= id_{X'}})(\mathbb{v}) \\
&= (g^{-1} \circ f')(\mathbb{v}) = g^{-1}(f'(\mathbb{v})) \underbrace{=}_{(8.28)\text{ による}} g^{-1}(a\mathbb{v}) \underbrace{=}_{g^{-1}\text{ の線型性 (定理 7.67,(1))}} a\,g^{-1}(\mathbb{v})
\end{aligned}
$$

である．g^{-1} は，単射なので，$g^{-1}(\mathbb{v}) \neq \mathbb{0}_X$ である．したがって，$a \in \mathcal{E}_f$ で，$g^{-1}(\mathbb{v}) \in E_a^f \setminus \{\mathbb{0}_X\}$ である．

以上 (と (2.21)) から，$\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{f'}$ で，$E_a^{f'} = g''E_a^f$ であることが，分かる．

また，補題8.5 により，E^f_a は，X の部分空間だから，$g \restriction E^f_a : E^f_a \xrightarrow{\cong} g''E^f_a = E^{f'}_a$ である．特に，$g \restriction E^f_a$ は，E^f_a の基底を，$E^{f'}_a$ の基底に移し，$(g \restriction E^f_a)^{-1}$ は，$E^{f'}_a$ の基底を，E^f_a の基底に移すから，E^f_a が，有限次元であることと，$E^{f'}_a$ が，有限次元であることは，同値となり，これらが，有限次元とのきには，$\dim(E^f_a) = \dim(E^{f'}_a)$ が，成り立つ． ❏ (定理 8.15)

K を体として，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し，$X = K^n$ のときには，K^n 上の線型変換 f は，その表現行列 A_f に，対応するから，この対応により，正方行列の相似の概念が，導入できる．つまり，体 K 上の n-次正方行列 A, A' が，**相似**である，とは，可逆な n-次の正方行列 B で，

$$(8.29)\quad A = B^{-1}A'B \qquad \text{x-8-15-a-3}$$

となるものが存在すること，とする，線型変換でと同様に，2 つの n-次の正方行列 A, A' が相似であることを，$A \sim A'$ と表わす，可逆な n-次の正方行列 B が，この相似の例証となっているとき，つまり，(8.29) が成り立つとき，このことを，$A \sim_B A'$ と表わす．

K 上の n-次の正方行列 A に対し，

$$\mathcal{E}_A := \{a \in K : a \text{ は}, A \text{ の固有値 }\}$$

とする．

補題 8.16 A と A' を，体 K 上の n-次の正方行列として，B を，K 上の，可逆な n-次の正方行列とする．このとき， P-8-10

(1) $A \sim_B A' \Leftrightarrow \varphi_A \sim_{\varphi_B} \varphi_{A'}$ である．

(2) $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{\varphi_A}$ で，すべての $a \in K$ に対し，$E^A_a = E^{\varphi_A}_a$ である．

(3) $\sim$ は，K 上の n-次の正方行列の間の同値関係である．

(4) $A \sim_B A'$ なら，$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{A'}$ で，各 $a \in \mathcal{E}_A$ $(= \mathcal{E}_{A'})$ に対し，$\varphi_B{}''E^A_a = E^{A'}_a$ で，$\varphi_B \restriction E^A_a : E^A_a \xrightarrow{\cong} E^{A'}_a$ である，特に，すべての $a \in K$ に対し，$\dim(E^A_a) = \dim(E^{A'}_a)$ が成り立つ．

(5) $A \sim A'$ なら，$\det(A) = \det(A')$ である．

証明． (1): 定理 4.24 と定理 4.34 により，

$$A \sim_B A' \ \Leftrightarrow\ A = B^{-1}A'B \ \Leftrightarrow\ \varphi_A = (\varphi_B)^{-1}\circ\varphi_{A'}\circ\varphi_B$$
$$\Leftrightarrow\ \varphi_A \sim_{\varphi_B} \varphi_{A'}$$

である．

(2): φ_A の定義 (4.51) により，$A\mathbb{u} = a\,\mathbb{u} \ \Leftrightarrow\ \varphi_A(\mathbb{u}) = a\,\mathbb{u}$ となることから明らかである．

(3): (1) と，補題 8.14 により，よい．

(4): (1), (2) と，定理 8.15 により，よい．

(5): B を，可逆な n-次の正方行列で，$A = B^{-1}A'B$ となるものとするとき，

$$\det(A) = \det(B^{-1}A'B) \underbrace{=}_{\text{定理 6.40, (1) による}} \det(B^{-1})\det(A')\det(B)$$
$$\underbrace{=}_{\text{定理 6.40, (2) による}} \frac{1}{\det(B)}\det(A')\det(B) = \det(A')$$

となるから，よい．　□ (補題 8.16)

P-8-10-0 **定理 8.17** X を，体 K 上の，n-次元線型空間として，$\mathcal{B} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ と，$\mathcal{B}' = \{\mathbb{u}'_1, \ldots, \mathbb{u}'_n\}$ を，2 つの X の基底とする．f が，X の上の線型変換なら，$f_{\mathcal{B}} \sim_{\varphi_{\mathcal{B}'}\circ(\varphi_{\mathcal{B}})^{-1}} f_{\mathcal{B}'}$ である．

特に，$g := \varphi_{\mathcal{B}'}\circ(\varphi_{\mathcal{B}})^{-1}$ とすると，$f_{\mathcal{B}'} = g\circ f_{\mathcal{B}}\circ g^{-1}$ で，g の表現行列を B とすると，$A^f_{\mathcal{B}'} = BA^f_{\mathcal{B}}B^{-1}$ が成り立つ．

証明． 以下の図式を，辿ることで，示せる (演習!)．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] \\
K^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}}"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}\circ(\varphi_{\mathcal{B}})^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^n \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}\circ(\varphi_{\mathcal{B}})^{-1}"] \\
K^n \arrow[r, "f_{\mathcal{B}'}"'] & K^n
\end{tikzcd}$$

♦ figur8-01.pdf　□ (定理 8.17)

8.3　2 次元空間と 3 次元空間での回転，再訪

$\mathbb{R}^2$ での回転行列は， rotation-revisited

$$(8.30)\quad a^2+b^2=1$$ x-8-15-0

となる $a, b \in \mathbb{R}$ に対する，

$$(8.31)\quad R=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$ x-8-16

という形の 2-次の行列として，特徴付けられるのだった (第 4 章の，131 ページ前後を参照).

第 6 章で導入した行列式の概念を用いて，このことの再整理をしておく:

定理 8.18 R を，$\mathbb{R}$ 上の 2-次の正方行列とするとき，以下は，同値である: P-8-11

(a) R は，上の意味での回転行列である．つまり，R は，(8.30) を満たす，ある $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，(8.31) のように表わすことができる．

(b) R は，$\det(R) > 0$ を満たす，直交行列である．

(c) R は，$\det(R) = 1$ を満たす，直交行列である．

(d) ある $\theta \in [0, 2\pi)$ に対し，$R = R_\theta$ $\left(=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right)$ である．

証明． “(a) ⇒ (c)”:　R が，(8.30) を満たすような a, b により，(8.31) のように表されているとすると，

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}\right) = -ab + ab = 0, \quad \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 \underbrace{=}_{(8.30)} 1,$$

$$\left(\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 \underbrace{=}_{(8.30)} 1$$

だから，定理 4.47, (a) ⇔ (b) により，R は直交行列で，

$$\det(R) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \underbrace{=}_{(8.30)} 1$$

である．

“(c) ⇒ (b)”:　は，自明である．

“(b) ⇒ (c)”:　は，補題 6.45 により，よい．

“(a) ⇒ (d)”:　(8.30) により，$0 \leq \theta < 2\pi$ が，$\cos\theta = a$, $\sin\theta = b$ となるように，取れる．この θ に対して，$R = R_\theta$ となる．

♦ Appendix B と関連づける．

“(d) ⇒ (a)”:　$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ なら，$a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ とすると，a, b は (8.30) を満たし ((A-10) を参照)，R は，(8.31) を満たす．□ (定理 8.18)

回転行列 R の特性方程式 $\begin{vmatrix} a-\varepsilon & -b \\ b & a-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$ を，考えると，

$$\begin{vmatrix} a-\varepsilon & -b \\ b & a-\varepsilon \end{vmatrix} = (a-\varepsilon)^2 - b^2 = \varepsilon^2 - 2a\varepsilon + a^2 + b^2 \underbrace{=}_{(8.30)\text{ による}} \varepsilon^2 - 2a\varepsilon + 1$$

となるが，この右辺の多項式の，判別式は，$4a^2 - 4$ となるから，特性方程式が，(2 つの) 実数解を持つのは，$a = \pm 1$ となるとき (あるいは，これと同値な $b = 0$ となるとき)，つまり，回転角が，$0°$ または，$180°$ であるときに限る．このときには，それぞれ，A は，E_2 または $-E_2$ となって，それ自身対角行列 (したがって，標準基底により対角化可能) だが，それ以外のときには，回転行列 R は，固有ベクトルを全く持たず，特に R は，対角化可能でない．このことは，$0°$ でも $180°$ でもない回転角での回転では，すべてのベクトルが，一周でも半周でもない回転を施されるので，回転の結果は，もとのベクトルのスカラー倍にはならない，という幾何学的な理解に，対応させることができる．

一方，複素数の範囲で考えたときには，この特性多項式は，2 次方程式の解法により解くことができて，$b \neq 0$ のときには，2 つの異る解が得られるから，系 8.12 により，R は，すべての場合に，対角化可能である．

次に，$\mathbb{R}^3$ での原点を固定した，物理的な回転に対応する変換を考えてみると，2 次元空間での回転に関する考察と同様の議論から，そのような変換は，距離を保存する線型変換でなくてはならないから，この変換の表現行列 R は，定理 4.47 により，直交行列である．したがって，補題 6.45 により，$\det(R) = 1$ または，$\det(R) = -1$ となるが，130 ページでのような，「連続的な時間変化としての回転」の議論により，$\det(R)$ は，$\det(E_3)$ $(= 1)$ と等しい値を，持たなくてはならないことがわかる．

そこで，$\mathbb{R}$ 上の 3-次の正方行列 R が，**回転行列** (または，**3 次元の回転行**

列) である，とは，R は，直交行列で，

$$(8.32)\quad \det(R) = 1$$ x-8-16-0

となること，とする．

　より一般的には，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の n-次の正方行列 R が，**n-次元の回転行列**である，とは，R は直交行列で，$\det(R) = 1$ となること，と定義する．この定義の意味での回転行列は，次を満たす:

補題 8.19　(1)　すべての回転行列は，可逆で，回転行列の逆行列も回転行列である． P-8-12

(2)　2 つの回転行列の積は，再び回転行列である．

証明． (1): R を回転行列とすると，補題 4.49, (2) により，R は可逆で，R^{-1} も直交行列である．また，定理 6.40 により，$\det(R^{-1}) = \frac{1}{\det(R)} = 1$ だから，R^{-1} も回転行列であることが分かる．

　(2): 定理 4.49, (1) と定理 6.40, (1) により，よい．　□ (補題 8.19)

　$\mathbb{R}^3$ で，x-軸，y-軸，z-軸を，回転軸とする角度 θ の回転を表わす行列を，それぞれ，$R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ と表したのだった ((4.137),(4.138) を参照)．補題 4.78 と行列式の計算から，$R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_x(\theta)$ の形の行列は，どれも，(上の定義の意味での) 回転行列で，これらは，物理的な回転に対応するものになっていると，考えてよいので，

$$(8.33)\quad \begin{array}{l}R_x(\theta_x),\ R_y(\theta_y),\ R_x(\theta_z)\\ \text{の形の行列の積の全体}\end{array} \subseteq \begin{array}{l}\mathbb{R}^3\ \text{での原点を固定する物理的な}\\ \text{回転の表現となる行列の全体}\end{array} \subseteq \begin{array}{l}3\ \text{次元の回転}\\ \text{行列の全体}\end{array}$$ x-8-17

という包含関係が成り立っていると考えてよい．以下で，

$$(8.34)\quad \begin{array}{l}R_x(\theta_x),\ R_y(\theta_y),\ R_x(\theta_z)\\ \text{の形の行列の積の全体}\end{array} = \begin{array}{l}3\ \text{次元の回転}\\ \text{行列の全体}\end{array}$$ x-8-18

を示すが (系 8.22)，これによって，(8.33) の包含関係は，等号で置き換えられることが示せたことになる．ここで，(8.34) の等式は，数学の内部での等式だが，(8.33) の包含関係は，物理的な回転の表現が考察されていることから，数学の範囲をはみだす主張になっていることに注意する．

　次の定理は，オイラーの回転定理の代数版，と見ることもできるし，不動点定理の特別な場合，と見ることもできる (これらの解釈については，本節の最

後で補足説明する).

P-8-13 **定理 8.20** R を，3 次元の回転行列とするとき，$1 \in \mathcal{E}_R$ である．

証明． 定理 8.6 により，$\det(R - E_3) = 0$ が示せればよい．

$$\det(R-E_3) \underbrace{=}_{\text{定理 6.24 による}} \det({}^t(R-E_3)) = \det(\underbrace{{}^tR}_{=R^{-1};\ \text{定理 6.51 による}} - E_3)$$
$$= \det(R^{-1} - \underbrace{R^{-1}R}_{=E_3}) = \det(R^{-1}(E_3 - R))$$
$$\underbrace{=}_{\text{定理 6.40, (1)}} \overbrace{\det(R^{-1})}^{=1;\ \text{定理 6.40, (2) と (8.32) による}} \cdot \det(E_3 - R) \underbrace{=}_{\text{補題 6.29, (3) による}} (-1)^3 \det(R - E_3)$$

により，$\det(R - E_3) = 0$ となることが分かる． □ (定理 8.20)

R を 3 次元の回転行列として，$\mathbb{u}$ を，R の固有値 1 に対応する固有ベクトルで，$\|\mathbb{u}\| = 1$ となるものとする (定理 8.20 と補題 8.5 により，このような $\mathbb{u}$ は存在する)．θ_x と θ_y をうまく選んで，

x-8-19 (8.35) $R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)\mathbb{u} = \mathbb{e}^3_z$

となるようにできる (補題 4.79, (1) の座標を入れ換えたものによる)．ただし，ここでは，$\mathbb{e}^3_z$ は，$\mathbb{e}^3_3$ の別名として使われている．同様に，$\mathbb{e}^3_x := \mathbb{e}^3_1$, $\mathbb{e}^3_y := \mathbb{e}^3_2$ と書くことにする．

x-8-20 (8.36) $R' := R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)\,R\,(R_x(\theta_x)R_y(\theta_y))^{-1}$

とすると，$R_x(\theta_x)$, $R_y(\theta_y)$ が，回転行列であることと，補題 8.19 により，R' も回転行列である．(8.35) から，$R'\mathbb{e}^3_z = \mathbb{e}^3_z$ である．

xy-平面 $E_{xy} := \{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R},\ c = 0\}$ が，

x-8-21 (8.37) $E_{xy} = \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbb{a}, \mathbb{e}^3_z) = 0\}$

と表わせることと，直交行列が (特に，回転行列も)，内積を保存すること (定理 4.47) から，$\varphi_{R'} \restriction E_{xy} : E_{xy} \overset{\cong}{\to} E_{xy}$ となることが分かる．また，同一視

$$(8.38)\quad \varphi : E_{xy} \to \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$ x-8-22

(に対応する，E_{xy} の基底 $\mathcal{B} = \{\mathbb{e}_x^3, \mathbb{e}_y^3\}$ と $\varphi_{\mathcal{B}}$ $(= \varphi)$) による $\varphi_{R'} \restriction E_{xy}$ の表現行列を R^* とすると，φ_{R^*} は内積を保存するから，R^* は対角行列である．また $R'\mathbb{e}_z^3 = \mathbb{e}_z^3$ だから，

$$(8.39)\quad R' = \begin{bmatrix} R^* & O_{2\times 1} \\ O_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix}$$ x-8-23

となる．したがって, $\det(R') = 1$ であることと, 補題 6.39 により, $\det(R^*) = 1$ となる．よって，定理 8.18 により，$R^* = R_\theta$ となる，$\theta \in [0, 2\pi)$ が，取れる．(8.39) から，

$$R' = \begin{bmatrix} R_\theta & O_{2\times 1} \\ O_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} = R_z(\theta)$$

である．

以上を纏めると，次が得られる:

定理 8.21 任意の 3 次元の回転行列 R は，z-軸を回転軸とする回転 (つまり，ある $\theta \in [0, 2\pi)$ に対する $R_z(\theta)$ (の表現する線型変換)) と相似である．特に，θ, θ_x, $\theta_y \in [0, 2\pi)$ で， P-8-14

$$R = R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)\,R_z(\theta)\,\bigl(R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)\bigr)^{-1}$$

となるものが存在する． ❏

このことから，直ちに次が分かる:

系 8.22 等式 (8.34) が成立する． P-8-15

証明． "⊆" は，補題 4.78 と，演習問題 6.15 により，よい．"⊇" は，定理 8.21 から従う． ❏ (系 8.22)

オイラーの回転定理は，「剛体の一つの固定点を持つ変位は，ある回転軸を持つ回転である」ということを主張するものである．これは物理学の言葉で書かれている主張であるが，これを数学で解釈したものが，定理 8.21 である，と考えられる:　剛体とは,「伸び縮みしない理想的物体」という意味である

から，その変位は，等長変換に対応する．平行移動して固定点を $\mathbb{0}_3$ とすることができるが，「$\mathbb{0}_3$ を固定する $\mathbb{R}^3$ での等長変換は線型変換となる」ということが，(数学で) 証明できる [*6]．古典物理の意味での 3 次元空間での物体の変位なので，それを連続的に動かしたとき，ある瞬間に裏返ることはなく，したがって，この線型変換の行列式の値は，常に 1 でなくてはならない — 以上の考察から，オイラーの回転定理の数学的解釈が，まさに定理 8.21 となることが，結論できる．

定理 8.21 の核となっているのは，1 が，常に 3 次元の回転行列の固有値となることを主張する定理 8.20 なので，定理 8.20 のことを，オイラーの回転定理 (の代数版) と呼ぶこともあるようである．

オイラーの回転定理は，次の球面上の連続変換に関する不動点定理の，特殊な場合となっている，と考えることができる:

P-8-16 **定理 8.23** (球面上の連続変換に関する不動点定理)　S を $\mathbb{R}^3$ での単位球面とする [*7]．$f: S \to S$ を連続関数とするとき，$\mathbb{p} \in S$ で，$f(\mathbb{p}) = \mathbb{p}$ となっているか，あるいは，$f(\mathbb{p})$ は，$\mathbb{p}$ の対蹠点 (たいせきてん，球の中心を挟んで反対側にある点) となっているようなものが存在する． ❏

回転行列の，x-, y-, z-軸を回転軸とする回転の合成としての表現，ということのみの観点からは，定理 8.21 は，次の定理に改良することもできる．

P-8-17 **定理 8.24** 任意の回転行列 R は，α, β, $\gamma \in [0, 2\pi)$ をうまく選ぶことで，

x-8-24 (8.40) $R = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha)$

---

*6 そのような変換が線型変換になることは，122 ページでの r_θ が線型変換になることの議論と同様に示せ，　定理 4.47 により，それが直交変換となることが分ります．

*7 つまり，$S := \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbb{a}\| = 1\}$ です．この定理は，英語で “Hairly Ball Theorem” (毛球定理?) ドイツ語で „Igelsatz“ (ハリネズミ定理?) などと呼ばれることもある，ポアンカレ=ブラウアの浮動点定理の系として得られるものですが，時々，似ているけれど，これとは異る (つまり，直球で，片方の系として，もう片方が出てくるわけではない) ブラウアの不動点定理と混同されることがあるようです — かく言う著者も，これを書くために調べてみる前は，混同して理解していました．ちなみに，ブラウアーの不動点定理は，「凸領域 X からそれ自身への連続写像 $f: X \to X$ は，常に固定点 ($f(x^*) = x^*$ となるような点 $x^* \in X$) を持つ」というものです．凸領域については，第 C.1 節 の，458 ページを参照してください．

と，表現することができる． □

この定理も，オイラーによるもののようである．定理 8.24 (と，この定理での α, β, γ の計算) は，物理学や工学で，非常に重要な役割をはたすが，その証明は，(8.40) を α, β, γ を変数とする方程式と見て，計算することで得られる．この計算は，かなり強引なものとなるが，著者は，この定理が成り立つことの代数的な説明を与えるような，別証を知らない．

8.4　線型変換のトレースと行列式

♦ trace が基底の変換で不変なことを示す演習 $tr(AB) = tr(BA)$ を示せばよい．

行列に対して導入される不変量 [*8] のうちには，その行列を表現行列として持つ線型写像の不変量となっている (つまり，その値が線型空間の基底の選び方に依存しないものとなっている) ものも少なくない．以下では，行列式 $\det(A)$ や，トレース $\mathrm{tr}(A)$ が，そのようなものであることを確認する．

行列式の定義や基本性質については，既に第 6 章で見ているので，トレースの説明から始めることにする．

ある体 K 上の n-次の正方行列 $A = [a_{i,j}]$ に対し，A の**トレース** (trace) を，

♦ Scan_2021-07-09–9.24-confinement-chap8 pp.22–24

$$\mathrm{tr}(A) := \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}} a_{\ell,\ell}$$

で定義する．

補題 8.25 $A = [a_{i,j}]$ と $B = [b_{i,j}]$ を，体 K 上の n-次の正方行列とする．このとき， P-8-18

(1) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つ．

(2) B が可逆なら，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B^{-1}AB)$ である．

証明． (1): $AB = \left[\sum_{k\in\overline{n}} a_{i,k}b_{k,j}\right]$, $BA = \left[\sum_{\ell\in\overline{n}} b_{i,\ell}a_{\ell,j}\right]$ だから，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \textstyle\sum_{\ell\in\overline{n}}(\sum_{k\in\overline{n}} a_{\ell,k}b_{k,\ell}) = \sum_{\ell,k\in\overline{n}} a_{\ell,k}b_{k,\ell} = \sum_{k,\ell\in\overline{n}} b_{k,\ell}a_{\ell,k}\\ &= \textstyle\sum_{k\in\overline{n}}(\sum_{\ell\in\overline{n}} b_{k,\ell}a_{\ell,k}) = \mathrm{tr}(BA)\end{aligned}$$

[*8] K 上の行列に対して，K の要素を対応させる対応のことを，行列の不変量とよぶことにします．たとえば，正方行列の行列式 (正方行列 A に $\det(A)$ を対応させる) は，ここでのような意味での不変量の典型的な例の一つです．

である．

$$(2):\quad \mathrm{tr}(BAB^{-1}) \overset{\text{定理 3.10 による}}{\overbrace{=}} \mathrm{tr}(B(AB^{-1})) \underbrace{=}_{(1)\text{ による}} \mathrm{tr}((AB^{-1})B) \overset{\text{定理 3.10 による}}{\overbrace{=}} \mathrm{tr}((A(B^{-1}B)) = \mathrm{tr}(A)$$

により，よい．　□ (補題 8.25)

補題 8.25, (2) に対応する命題は，行列式に対しても成り立つ．

P-8-19 **補題 8.26** $A = [a_{i,j}]$ と $B = [b_{i,j}]$ を，体 K 上の n-次の正方行列として，B は，可逆とする．このとき，$\det(A) = \det(B^{-1}AB)$ である．

証明． これは，補題 8.16, (5) の言い換えにすぎないが，短い証明なので再度書き出しておく：

$$\det(A) \overset{\text{定理 6.40, (2) による}}{\overbrace{=}} \det(B^{-1})\det(A)\det(B) \overset{\text{定理 6.40, (1) による}}{\overbrace{=}} \det(B^{-1}AB)$$

により，よい．　□ (補題 8.26)

X を，体 K 上の有限次元の線型空間とする．$f : X \to X$ を線型変換とするとき，X の，ある基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を，前と同じように，$A^f_{\mathcal{B}}$ と表わすことにして，$\mathrm{tr}(f)$ と $\det(f)$ を，

x-8-25 (8.41) $\mathrm{tr}(f) := \mathrm{tr}(A^f_{\mathcal{B}})$,

x-8-26 (8.42) $\det(f) := \det(A^f_{\mathcal{B}})$

で定義する．

P-8-20 **定理 8.27** $\mathrm{tr}(f)$ も，$\det(f)$ も，well-defined である．つまり，これらの定義 (8.41), (8.42) は，X の基底 $\mathcal{B}$ の選び方に依存しない．

証明． 補題 8.25, (2), 補題 8.26, 定理 8.17 により，よい．　□ (定理 8.27)

A を，体 K 上の正方行列として，$a \in K$ を，A の固有値の一つとするとき，A の (つまり線型変換 φ_A の) a に対応する固有空間の次元を，a の**幾何的多重度** (geometrical multiplicity) とよぶ． この用語を用いると，定理 8.11, (2) は，次のように言い換えることができる．

定理 8.28 (定理 8.11, (2) の言い換え)　A を，体 K 上の n-次正方行列として，$a_1, ..., a_k$ を，A の互いに異る固有値の全てとし，$\gamma_1, ..., \gamma_k$ を，それぞれの幾何的多重度とする．このとき，A が K 上で対角化可能であるのは，$\sum_{i \in \overline{k}} \gamma_i = n$ となる，丁度そのときである． P-8-21

A が対角化可能なときには，A の対角化は，各 a_i, $i \in \overline{k}$ を丁度 γ_i 個対角成分として持つようなものになっている． ❑

対角行列 A については，$tr(\cdot)$ と $\det(\cdot)$ の定義から，$\mathrm{tr}(A)$ と $\det(A)$ はそれぞれ対角成分の和と積になる．このことと，補題 8.25, (2), 補題 8.26，および，定理 8.28 の後半を用いると次が得られる:

定理 8.29 A を，体 K 上の対角化可能な n-次正方行列として，$a_1, ..., a_k$ を，A の互いに異る固有値の全てとし，$\gamma_1, ..., \gamma_k$ を，それぞれの幾何的多重度とする．このとき，次の等式が成り立つ: P-8-22

$$tr(A) = \sum_{i \in \overline{k}} \gamma_i a_i,$$
$$\det(A) = \prod_{i \in \overline{k}} \gamma_i a_i.$$ ❑

上の定理での，幾何的多重度を代数的多重度とよばれる概念で置き換えると，定理 8.29 は，必ずしも対角化可能でない正方行列に拡張できる．このことは，第 II 巻で示すことになる．

8.5　対称行列の対角化

第 II 巻に移動 sym-diagonalization

付録 A

三角函数

A.1　角度の直観的導入と三角関数の定義

trigonometry

intro-angle

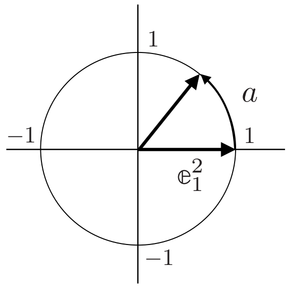
日常生活では，角度は，45°, 90°, 180° など，度数で表現されることが多い．この，度数は，原点を中心に，円周 (例えば，半径が 1 の円) を一回りした角度を，360° とし，これを等分して，角度を表すシステムである．しかし，この 360 という数は，恣意的なものに思える[*1]．数学では，通常，この，度数法の代わりに，**弧度法** (radiant [ˈreɪdɪənt]) が用いられる．これは，360° に相当する角度を，(単位なしの) 2π, または，2π rad として表わす，というものである．2π は（π の定義から）半径が 1 の円の円周の長さになるので，弧度法での角度の表現は，次のように考えることができる:

x-A-0

(A-1)　$a \in \mathbb{R}$ が，弧度法で表している角度は，xy-平面の原点を中心に，半径が 1 の円を描いたとき，x 軸方向の単位ベクトル $\mathbb{e}_1^2$ を，原点を中心に，この円上の円弧の長さが a になるように，反時計りに回転させたとき，結果として得られるベクトルと，もとの $\mathbb{e}_1^2$ のなす，$\mathbb{e}_1^2$ から見

[*1] 一回りの角度を 360 で割ったものを 1° とする，という取り決めは，古代バビロニア (紀元前 2000 年から紀元前 1600 年くらいの間の時期のことです) で，既に採用されているようです．360 という数が，選ばれた理由の，可能な説明としては，バビロニアの数学が，60 進法に基くものだったことや，バビロニアの暦の 1 年が，360 日だったこと，などが挙げられているようです — 1° ／円周　が，1 日／1 年の日数　に，ほぼ等しいというのは，人によっては気がつかないで見過してまっている，事実かもしれません．この，一周の角度を，360 で割る，というアイデアは，17 世紀頃には (古代バビロニアの頃から，3000 年以上も後です!)，日本を含む，東北アジア (漢字文化圏) にも伝搬していたようです．

て，反時計回り方向の角のこと，とする．



◆ figur15x.pdf

上での角度の定義は，$\mathbb{R}^2$ に関する議論を厳密に展開する，という立場からは，問題の残るものである．(A-1) の定義が，成立するためには，原点を中心とする半径が 1 の円周 — つまり，**単位円** (unit circle)

x-A-0-0 (A-2)　$\mathsf{C} := \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{a}\| = 1\}$ [*2]

上の，円弧の長さが，厳密に定義できていなければならない[*3]．もちろん，「円周上の円弧の長さ」という概念が，そもそも妥当なものかどうか (実際，曲線の定義如何によっては，長さが定義できないような曲線が存在しえる)，それが，角の持つべき性質を，うまく反映するものになっているかどうか (例えば，平面上の回転に関して不変になっているか，角度の和と円弧の連結が対応しているか，など)，この定義と，それに必要となってくる道具を導入してゆく過程で，同時に確かめてゆかなくてはならない．しかし，これを，今言ったような方針で素直に実行しようとすると，例えば，本書の第 4.2 節，第 4.2.3 節の前後で，微分や積分の初歩の理論のうちの，大きな部分を展開しなくてはならなくなるが，これは，かなり無理があるように思える．また，仮にこれを行なったとしても，例えば，極座標変換に関連する微分や積分での通常の理論展開では，角度や三角関数についての基本を仮定して議論しているので，これを，このまま行なったのでは，いずれにしても循環が生じてしまう．

この問題の解決は，次の付録 B で，議論することになるが，ここでは，とり

[*2] $\|\mathbb{a}\| = d(\mathbb{0}, \mathbb{a})$ に注意．

[*3] 円弧の長さの定義を，諦めるとしても，角の等分割の定義くらいは，必要となるでしょう．実は，角の二分割は，第 4 章の，補題 4.53 で，見るように，円弧の長さの議論を経由せずに扱かうことができます．付録 B では，このことを使って，微積分なしに円弧の長さに相当する量を導入しています．本付録 A での議論を，これに繋げることで，三角関数を用いる議論が，厳密に，しかも，論理の飛躍や循環なしに説明できるように，なります．

あえず，(A-1) の立場での，ナイーヴな角度の理解を認めて [*4]，その上で三角関数の理論を展開してみることにする．

弧度法での角度を，(A-1) でのように定義すると，a が，0 と，2π の間の数でなくても，またマイナスの数でも，a の表している角度を，考えることができることになる．ただし，マイナスの数が弧度法で表す角度は，時計回りの回転を，マイナスの円弧の長さと考えることにする．

弧度法での，円周一回りに相当する角度は，2π で，これは，0 の表す角度と同じものである．より一般的には，次が，成立つことが，分かる:

(A-3)　$a, b \in \mathbb{R}$ を，弧度法で考えるとき，a と，b が，同じ角（度）を，表しているのは，ある $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$a = b + 2\pi k$ となるときである．　x-A-1

このことから，次が導かれる:

(A-4)　実数の足し算は，弧度法での角度の足し算を，自然に導入する [*5]．　x-A-1-a

これは，次のようにして見ることができる: $a, a'\ b, b' \in \mathbb{R}$ で，a と a' が，弧度法で同じ角度を表わしており，b と b' も，弧度法で同じ角度を表わしているとする．このとき，(A-3) から，$a = a' + 2\pi k$, $b = b' + 2\pi\ell$ となる $k, \ell \in \mathbb{Z}$ が取れる．したがって，$a + b = a' + b' + 2\pi(k + \ell)$ となるから，ふたたび (A-3) により，$a+b$ と $a'+b'$ は，弧度法で同じ角度を表わす数になっている．

度数法での $x°$, $0 \leq x < 360$ が，弧度法で $0 \leq a < 2\pi$ のとき，$x : 360 = a : 2\pi$ だから，$x°$ は，弧度法では，$\frac{2x\pi}{360}$ になることに注意する．例えば，$90°$ は，$\frac{2\times 90\pi}{360} = \frac{\pi}{2}$ である．

三角関数のうち，サイン関数とコサイン関数[*6] $\sin x$, $\cos x$ は，$\mathbb{R}$ から，閉

[*4] 日本語の “ナイーブ” は，ポジティヴな意味での，“純真な”，“素朴な” といった意味合いにとられることが多いようですが，現代の欧米語での，フランス語の «naïv» を，語源とする同系の単語は，むしろ，例えば，日本語の “単細胞的” に近い，ネガティーヴなコノーテションを持つ語として使われることが，殆どです．　naive

[*5] ここで言っているのは，付録 B, 第 B.1 節の言葉で言うと，(A-3) に対応する同値関係が，実数の足し算と両立する，ということです．ただし，念のために付け加えると，もちろんこれは，弧度法に特有な状況ではなく，同様の主張は，度数法につても言えます．

[*6] $\sin x$, $\cos x$ は，古い (といっても，明治時代から昭和時代くらいの) 言葉では，正弦関数，余弦関数とも言います．「関数」（古くは「函数」）という用語は，比較的新しく日本語に導入されたものだと思いますが (因みに，ヨーロッパで，この用語に対応する “function”, «fonction» などの単語が，現在の意味で使われるようになったのは，20 世紀の初め (明

区間 $[-1,1]$ への関数である[*7]．この 2 つの関数は，次のように定義できる:

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し．$\mathbb{e}_1^2$ を，反時計回りに，θ だけ回転させることで得られるベクトルを，$\mathbb{e}_\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とするとき，$a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ とする[*7].

この定義から直ちに，

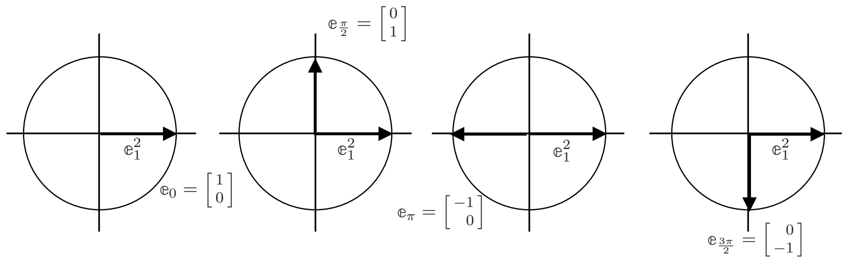
x-A-1-0 (A-5) $\sin 0 = 0; \cos 0 = 1,$

x-A-1-1 (A-6) $\sin \frac{\pi}{2} = 1; \cos \frac{\pi}{2} = 0,$

x-A-1-2 (A-7) $\sin \pi = 0; \cos \pi = -1;$

x-A-1-2-0 (A-8) $\sin \frac{3\pi}{2} = -1; \cos \frac{3\pi}{21} = 0$

が，分かる．



♦ figur18x.pdf

$\| \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$ だから，

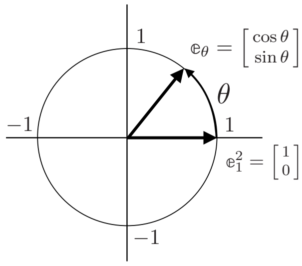
x-A-1-3 (A-9) すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\sin\theta$ と，$\cos\theta$ は，同時に 0 とはならない．

x-A-2 (A-10) すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ である[*8].

治後期) くらいです)，「正弦」，「余弦」という用語自身は，江戸時代の後期には日本で使われていたようです．

*7 三角関数では，歴史的な記法が継承されていて，$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ などと書かずに，$\sin x$, $\cos x$, $\sin\theta$, $\cos\theta$ などと書くことが多いので，注意が必要です．よくある，学生の珍答案のパターンの一つに，例えば，“$\sin x$” を “sin” と “x” の掛け算と勘違いして，$\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\cancel{\sin}\ \cancel{x}}{\cancel{\sin}\ 2\ \cancel{x}} = \frac{1}{2}$ と計算してしまう，というのがあります — この間違いは，日本の学生だけのものでもなく，著者が，昔，旧西ドイツの Hannover 大学 (現 Leibniz 大学) で，工学部の微積の授業の演習を受け持ったときにも，これをやった試験の解答が出てきたことがありました．むしろ，この間違いのパターンは，教える側が，歴史的な記法についての注意を促すことを怠ったことの，殆ど当然の結果として起きる間違い，と言えるようにも思えます．

*8 ここでも，歴史的な記法の継承で，$(\sin(\theta))^2$, $(\cos(\theta))^2$ は，それぞれ，$\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ と，書かれています．



♦ figur17x.pdf

A.2　三角関数の加法定理，二倍角の公式と半角の公式

前節での三角関数の定義に，第 4 章の 4.2.3 節での，$\mathbb{R}^2$ での原点を中心とする回転の表現行列の議論を，組み合わせると，次の定理が，容易に証明できる． additiveth

定理 A.1 (三角関数の加法定理) すべての $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ に対し， P-A-0

(A-11)　$\cos(\theta+\eta) = \cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta;$ x-A-3

(A-12)　$\sin(\theta+\eta) = \sin\theta\cos\eta + \cos\theta\sin\eta$ x-A-4

が成り立つ．

証明． すべての $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\eta) \\ \sin(\theta+\eta) \end{bmatrix} = R_{\theta+\eta}\,\mathbb{e}_1^2 \underbrace{=}_{\text{*9を参照}} R_\eta R_\theta\,\mathbb{e}_1^2$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta \\ \sin\theta\cos\eta + \cos\theta\sin\eta \end{bmatrix}$$

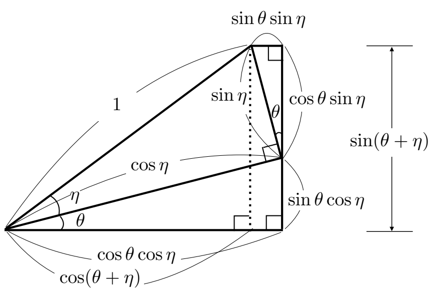
となるから，両辺の成分を，比較すると，等式 (A-11), (A-12) が得られる[*10]．

❏ (定理 A.1)

系 A.2 すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，以下が，成り立つ: P-A-1

[*9] ここでは，回転の合成と，角の和が対応している，という “事実” が用いられています[*11]．

[*10] “回転の合成” を平面幾何学的に表現すると，$\theta+\eta < \frac{\pi}{2}$ の場合には，加法定理は，右図のようにして理解することもできます:



x-A-5 $$\text{(A-13)}\quad \cos\theta = \cos(-\theta),$$

x-A-6 $$\text{(A-14)}\quad \sin\theta = -\sin(-\theta).$$

証明.

x-A-7 $$\text{(A-15)}\quad 1 \underbrace{=}_{\text{(A-5) による}} \cos 0 = \cos(\theta + (-\theta)) \underbrace{=}_{\text{(A-11) による}} \cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta),$$

x-A-8 $$\text{(A-16)}\quad 0 \underbrace{=}_{\text{(A-5) による}} \sin 0 = \sin(\theta + (-\theta)) \underbrace{=}_{\text{(A-12) による}} \sin\theta\cos(-\theta) - \cos\theta\sin(-\theta)$$

に，留意する．

(A-13): (A-15) の両端辺に，$\cos\theta$ を掛けて，移項すると，

x-A-9 $$\text{(A-17)}\quad \cos^2\theta\cos(-\theta) - \cos\theta\sin\theta\sin(-\theta) - \cos\theta = 0$$

が，得られる．一方，(A-16) の両端辺に，$\sin\theta$ を掛けて，移項すると，

x-A-10 $$\text{(A-18)}\quad \sin^2\theta\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\cos\theta\sin\theta = 0$$

が得られる．(A-17) と (A-18) の両辺を，それぞれ足すと，

$$\text{(A-19)}\quad (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos(-\theta) - \cos\theta = 0$$

が得られるが，この等式と，(A-10) から，求めている，(A-13) が，得られる．

(A-14): (A-13) を，(A-15) に代入すると，$\sin^2\theta = -\sin\theta\sin(-\theta)$ が，得られるから，$\sin\theta \neq 0$ なら， $\sin\theta = -\sin(-\theta)$ である．同様に，(A-13) を，(A-16) に代入すると，$\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin(-\theta) = 0$ が得られる．したがって，$\cos\theta \neq 0$ なら，$\sin\theta = -\sin(-\theta)$ である．

以上と，(A-9) から，$\sin\theta = -\sin(-\theta)$ が，すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことが，分かる． ❑ (系 A.2)

P-A-2 **系 A.3** すべての $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，次の等式が成り立つ．

---

definition-fact *11 “事実” と，引用符に入れて言っているのは，角の和 (角度の和ではなく，「角」の和です) の導入のやり方如何では，むしろ，それが，回転の合成である，ということが，角の和の定義になってしまうからです．これに関しては，付録 B を参照してください．

(A-20)　(cos に関する二倍角の公式)　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta,$ x-A-11

(A-21)　(sin に関する二倍角の公式)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$ x-A-12

(A-22)　(sin に関する半角の公式)　$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2},$ x-A-13

(A-23)　(cos に関する半角の公式)　$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}.$ x-A-14

証明． (A-20): $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) \underbrace{=}_{\text{(A-11) による}} \cos^2\theta - \sin^2\theta \underbrace{=}_{\text{(A-10) による}} (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta$
$= 1 - 2\sin^2\theta.$

(A-21): $\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) \underbrace{=}_{\text{(A-12) による}} \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$

(A-22): $\cos\theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) \underbrace{=}_{\text{(A-20) による}} 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ だから，
$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$ である．

(A-23): $\cos^2\dfrac{\theta}{2} \underbrace{=}_{\text{(A-10) による}} 1 - \sin^2\dfrac{\theta}{2} \underbrace{=}_{\text{(A-22) による}} 1 - \dfrac{1-\cos\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}.$ □ (系 A.3)

付録 B

実数体の導入と角度の導入

radian

「位相」という言葉を聞いたとき，何を思い浮かべるでしょうか？ Wikipedia で検索して出てくるのは phase, すなわち物理学的な状態を指す用語です．実際，最近私の大学院の授業を聞きに来てくれた物理の学生さんは，ずっと「位相 = phase」と思い込んで開いていたようです．授業の後で質問に来てくれて，誤解が判明しました．

そこまでひどい勘違いではないですが，私自身，大学に入学したときは「位相 $\subset$ 位相幾何学」と誤解していました．つまり，位相幾何学という名前から，その基礎として位相を勉強するのだろうと思ったわけです．ところが，位相幾何学，つまりトポロジーの研究対象は，多様体やその一般化になっている「良い空間」が主流で，位相空間論の難しい議論はあまり必要ではありません．

組み紐や結び目などの「ぐにゃぐにゃしたもの」を扱うトポロジーという分野があるということを高校生のときに知り， 大学に入ったらトポロジーを勉強しようと思っていたのですが，そのような思い込みのため，最初に生協で見付けて読み始めたのは位相空間論の教科書 [40] でした．集合や写像の扱いに慣れるのにはちょうど良い題材で，演習問題を考えるのもそれなりに楽しかったのですが，「ぐにゃぐにゃしたもの」が登場しないので何だか変だなあ，と感じたことを記憶しています．その次に [32] を読んで，やっとトポロジーらしいトポロジーに触れることができましたが，そこでは位相空間論はほとんど必要ありませんでした....

— 玉木 大 [66]

高校までの直観的な理解による数学を，厳密な数学の体系に組み込もうとするときに，ネックになる点が，いくつかある．

日本語では，「数学基礎論」と呼ばれることもある研究分野[*1]での研究と関連する，自然数の体系や集合に関する議論の枠組を与える理論や，その無矛盾性や，矛盾性の強さに関する議論等が，その一つであるが，前書きでも述べたように，ここでは (少なくとも，本第 I 巻では)，これについては触れないことにしている．

もう一つのネックは，有理数の体系の上に実数の体系を構築する議論と，角度に関する直観の，この実数の体系の上での厳密な扱い，である [*2]．これらの議論は，多くの場合，全く触れられないことが多く，特に，角度に関しては，問題点の指摘すらされないことも少なくない．

[*1] 日本語の「数学基礎論」は英語で mathematical logic と呼ばれる分野を指す言葉だと思われますが，「数学の基礎付け」は，現代の mathematical logic の成立の動機の一つではあったとしても，現在の mathematical logic の主要動機ではありません．アメリカ数学会の数学の分類コードの表 (MSC 2020 [39]) では，mathematical logic and foundations というカテゴリーの下に並んでいる研究分野名を見ると，数学の基礎付けへの直接的な関連を示唆するものは一握りしかありません．

[*2] 「前書き」でも述べたように，「自然数の体系や集合に関する議論の枠組を与える理論や，その無矛盾性や矛盾性の強さに関する議論」は，デデキントの „Was sind and was sollen die Zahlen“ [11] の延長線上にある研究で考察されるのに対し，「有理数の体系の上に実数の体系を構築する議論と，角度に関する直観を，この実数の体系の上で厳密に再構築する」ことは，同じデデキントの „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ [12] の延長線上に位置する事柄です．

角度については，付録 A で述べたように，単位円の円弧の長さを角度と思うことにすることで，対応ができるのだが，そのようなナレーションを素直に定式化しようとすると，円周の長さを厳密に導入することが必要となり，そのために，まず，微分や積分の理論を確立しなければならなくなるが，これを実際に実行しようしてみると，オーバーヘッドが大きくなりすぎてしまうため，そのような説明は，事実上不可能であると言わざるを得ない．また，三角関数や，極座標表示など，角度の概念を用いて導入する必要のある道具を全く使わずに，円周の長さや，円周の等分などを説明できるような微分積分の理論を，どう展開したらよいかは，すぐには見えてこない．

そこで，以下の第 B.4 節では，円周上の点のうち，円周の一回りの $\frac{m}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Q})$ の角度の体現となっていると解釈できる，円周上の点の全体と，半開区間 $[0, 2\pi)$ 上の点 (より具体的には，数 $\frac{m}{2^n}$ を，後出の同値関係 $\equiv_{rad}$ で「割って」考えたもの) の間の対応を与える写像を導入して，この写像の円周上の点全体への自然な拡張 (対応する距離の完備化への拡張) によって，角度と実数の間の対応を与える，という議論の流れで，角度の導入を行なうことにする．

まず，第 B.1 節で，代数構造を，それと両立する同値関係で割って商構造を作る，という構成法を導入する．この構成法は，近代的な数学では頻繁に用いられるものであるが，これは，次の第 B.2 節での，実数体の定義，第 B.3 節での距離空間の完備化の議論，また，その応用としての，第 B.4 節での角度の定義でも，重要な役割を果すことになる．第 B.3 節で，距離空間や，距離のリプシッツ同値性などについての必要な準備をした後で，第 B.4 節で，これらの道具を用いて角度の概念を導入する．

第 B.3 節で説明することになる事柄は，位相空間論 (topology) と呼ばれる理論の一部となるものであるが [*3]，ここでの目標は，あくまで，角度の概念

topology

*3 ここで，本書の著者が “topology” と呼んでいるものは，本付録のエピグラフとして引用した [66] の著者が「トポロジー」と呼んでいる分野とは異り，むしろ，そこで「位相空間論」と呼ばれているものに対応することに注意します．英語では，この違いを強調するために，本書で，“topology” と呼んでいるものを，“general topology” とか，“set-theoretic topology” などと呼ぶこともありますが，集合論の研究者が，“set-theoretic topology” と言ったときには，ここでの意味の “topology” や，[66] からの引用文で参照している，[40] の書名の意味での 「集合」とは，これらを含んでいるとしても，ほとんど別の，研究分野のことを指す名称になってしまうことにも，注意しておきます．

を，実数の全体の基本性質のみを用いて確立することであり，第 B.3 節での記述は，この目的のために必要となる道具を準備することに特化したものとなっている．そのため，位相空間論の入門として見たときには，多少バランスにかけるものになてしまっているかもしれない[*4]．

上での玉木 [66] からの引用文にもあるように，日本語での「位相」には，“phase” の意味と，ここでのような “topology” の意味があり，通常は，“位相 = phase” と，“位相 = topology” は，殆ど関連を持たないが，本付録 B では，“位相 = phase” を語る上で不可欠な，角度の概念を，“位相 = topology” を用いて導入する，ということが行なわれているわけである．

B.1　同値関係と商構造

equiv-rel

X を集合とするとき，R が，X 上の**二項関係** (binary relation) である，とは，$R \subseteq X^2$ となること，とする．R が X 上の二項関係のとき，$a, b \in X$ が関係 R にあるとは，$\langle a, b\rangle \in R$ となること，とする．このことを，$a\,R\,b$ とも表わす．$\langle a, b\rangle \notin R$ のとき，a, b は関係 R にない，と言い，これを $a \not R\, b$ とも表わす．

より一般的には，$n \in \mathbb{N}$ に対し，R が X **上の n-項関係** (n-ary relation) であるとは，$R \subseteq X^n$ となること，とする．明示的に n に言及せずに，単に X 上の関係と言うこともある．

R が X 上の関係で，$a_1, ..., a_n \in X$ のとき，$\langle a_1, ..., a_n\rangle \in R$ を，$R(a_1, ..., a_n)$ とも書くことにする．2 項関係では，同様の主張を，$a_1\ R\ a_2$ とも書くことにしたのだった．

ex-B-0

例 B.1　(1)　任意の集合 X に対し，$R = \{\langle a, a\rangle : a \in X\}$ は X の要素の同等性の関係である．つまり，すべての a, $b \in X$ に対し，$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a = b$ が成り立つ．簡単のために，この R を，“$=$” で表わすことにする．

(2)　$<$ を $\mathbb{R}$ 上の (通常の) 大小関係とする．$a < b$ は，例えば，(2.60) の略記と考えることができるが，$\mathbb{R}$ 上の二項関係 $R = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$

---

*4 位相空間論のスタンダードな入門書としては，ネットでも読むことのできる，[46] や，脚注*3 で，set-theoretic topology と呼んだものに，もっと近い話題を扱っている [14] などがあります．著者のおすすめは，ドイツ語ではありますが，[54] です．

は，この (性質としての) 大小関係 $<$ の集合としての実体となる: つまり，すべての $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a < b$ が成り立つ．同等性の扱いと同様に，ここでも，簡単のために，上の R を “$<$” と表わすことにする．同等性については，すべての集合に対して定義されている同等性を，集合 X に制限したものの二項関係としての表現も，$=$ と表わすことにしたのだったが，ここでは，もとの (性質としての) 関係 $a < b$ と二項関係としての $a < b$ は全く同じ実体の (一方は性質として，他方は集合 $\subseteq \mathbb{R}^2$ としての[*5]) 異る表現になっていることに注意する．

(3)　第 2 章の脚注*81 で，順序と，線形順序については述べたが，そこでの順序関係は，この節での二項関係の特別な場合である． ❑

以下に，順序と線形順序の定義を，ここでの二項関係の枠組のもとで改めて書き出しておく．

任意の集合 X に対し，二項関係 $R \subseteq X^2$ が，**順序** (ordering または partial ordering) である — **半順序**であると言うこともある — とは，

(B-1)　すべての $a \in X$ に対し，$a \not\!R\, a$ 　(**反反射律** (anti-reflexivity)) x-B-0

(B-2)　すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら $b \not\!R\, a$ 　(**反対称律** (anti-symmetry)) x-B-1

(B-3)　すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ 　(**推移律** (transitivity)) x-B-2

が成り立つことである．X 上の順序が，**線形順序** (linear ordering) である — **全順序** (total ordering) であるともいう — とは，上の (B-1), (B-2), (B-3) に加えて

(B-4)　すべての異る $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ か，$b\,R\,a$ かの，どちらかが，成り立つ x-B-3

ことである．

すべての事柄が線形に比較できるわけではない，ということは，我々の実生活における重要な哲学的な知見の一つと言えるだろうが，数学的にも，このこ

*5 ここでの $\mathbb{R}^2$ は，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ のデカルト積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のことである．

♦ 同一視もする

とは真理である．

exE-B-0 **例＋演習問題 B.2** （1） 次の集合 X 上の二項関係 R は，線形順序でない順序の例となっている:

(B-5) $X = \{\vec{t} : \vec{t}$ は分数を表わす記号列$\}$;

$R = \{\langle \vec{s}, \vec{t}\rangle : \vec{s}, \vec{t} \in X$, $\vec{s}$ は分数表現 $\vec{t}$ の約分となっている分数表記である$\}$.

（2） 次の集合 X 上の二項関係 R は，順序でなく，以下で定義することになる同値関係でもない．

(B-6) $X = \{$“ぐう”, “ちょき”,“ぱー”$\}$;

$R = \{\langle a, b\rangle \in X : b$ は a に勝つ$\}$

$= \{\langle$“ぐう”, “ぱー”$\rangle$, $\langle$“ちょき”, “ぐう”$\rangle$, $\langle$“ぱー”, “ちょき”$\rangle\}$

❏

R を集合 X の上の線形順序として，S を，空でない，X の有限な部分集合とするとき，S の要素のうち，R に関して最大 (または，最小) なものが，一意に存在する．このことは，S の要素に関する帰納法で，容易に示せる．このような S の要素を，S の**最大元** (さいだいげん， maximal element) (または，**最小元** (さいしょうげん，minimal element)) とよび，$\max_R S$ (または，$\min_R S$) で表わす．考えている線形順序 R が，何かが，文脈から明らかなときには，添字の R を落として，単に，$\max S$ (または，$\min S$) と書くことにする．

$S \subseteq X$ が有限でないときには，R が X 上の線形順序でも，R に関する S の最大元最小元が存在しないこともある．例えば，$\mathbb{N}$ の部分集合としての $\mathbb{N}$ 自身は，$\mathbb{N}$ 上の通常の大小関係 $<$ に関して最大元を持たない．

これに対し，

x-B-3-a (B-7) 任意の，空でない， $\mathbb{N}$ の部分集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ は，必ず最小元を持つ．

実は，この性質は，集合論の枠組の中で議論しているときには，$\mathbb{N}$ のいつかの基本性質を仮定すると，帰納法の原理が成立することと，同値である．

定理 B.3 $\mathbb{N}$ が，その通常の線形順序 $<$ に関して，（a） 1 は $<$ に関する $\mathbb{N}$ の最小元で，（b） すべての，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$<$ に関する，n の次の元 (つまり，$n+1 \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ で $n < m < n+1$ となる $m \in \mathbb{N}$ は存在しないようなもの) が存在する．（c） 1 以外のすべての $\mathbb{N}$ の元 n に対し，$<$ に関する，n の直前の元 $n_0 \in \mathbb{N}$ (つまり，$n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 < n$ で，$n_0 < m < n$ となるような $m \in \mathbb{N}$ は存在しないようなもの) が存在する，とき[*6]，$\mathbb{N}$ が，(B-7) を満たすことと，帰納法の原理が成立することは同値である．

証明． まず，$\mathbb{N}$ が (B-7) を満たしているとする．$P(\cdot)$ を，(自然数に関する) 性質として，$P(\cdot)$ が，

(ℵB-1) (帰納法の始め)　$P(1)$ が成り立つ;　x-B-x-0

(ℵB-2) (帰納法のステップ)　$P(n)$ なら $P(n+1)$ である　x-B-x-1

を満たすものとする．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $P(n)$ が成り立つことを示したい．これを背理法で示す．

そうでないとすると，$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)$ は成り立たない $\}$ は空集合でない．したがって，仮定から，S の最小元 n^* が存在する．(ℵB-1) により，n^* は 1 でない．したがって，(c) により，n^* の直前の元 n_0 が存在する．$n^* = n_0 + 1$ に注意する．このとき，n^* の最小性から，$P(n_0)$ となり，したがって，(ℵB-2) により $P(n_0+1)$ つまり $P(n^*)$ となるが，これは，n^* の取り方に矛盾である．

次に，$\mathbb{N}$ が帰納法の原理を満たすとして，(B-7) が成り立つことを示す．こちらも，背理法で証明する．このとき，定理 2.3 により，累積的帰納法の原理も成り立つことに注意する．

もし (B-7) が成り立たないとすると，空でない集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ で，最小元を持たないものが存在する．このとき，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$P(n)$ を $n \notin S$ となること，として，$P(\cdot)$ が，帰納法の始めと，累積的帰納法のステップを，満たすことを示す．定理 2.3 で見たように，帰納法の原理の仮定から，累積的帰納法の原理も成り立つので，このことから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成

[*6] この性質 (a), (b), (c) は，定理 2.3 と定理 2.4 で帰納法の原理と累積的帰納法の原理の同値性を証明したときに仮定した性質と同じものです (第 2 章の脚注*39 を参照してください).

り立つことが帰結できてしまうが，このことは，S が空でない，という仮定に矛盾である．

$P(\cdot)$ が帰納法の始めを満たすことは，もしそうでなければ $1 \in S$ となって，S は最小元 1 を持つことになってしまい，矛盾することからよい．

次に，$P(\cdot)$ が，累積的帰納法のステップを満たす，ことを示すために，$P(1)$, $P(2), \dots, P(n)$ が，成り立つと仮定する．このとき，もし $P(n+1)$ が，成り立たないとすると，$n+1$ は，S の最小元になってしまい，S が，最小元を持たないという仮定に矛盾である．したがって $P(n+1)$ も成り立つ．

□ (定理 B.3)

同値関係は，必ずしも等しくない対象を，ある観点から同一視する，という概念操作の祖型になっているような関係である．

集合 X 上の二項関係 R が，X 上の**同値関係** (equivalence relation) であるとは，R が，

x-B-4 (B-8)　すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$　　(**反射律** (reflexivity))

x-B-5 (B-9)　すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$b\,R\,a$
(**対称律** (symmetry))

(B-3)　すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$
(**推移律** (transitivity))

を満たすことである．

exE-B-1 **例＋演習問題 B.4** (1)　集合 X に対し，R を X 上の同等関係 “$=$” (例 B.1 (1) での R) とすると，R は同値関係である．

(2)　$X = \mathbb{Z}$ として，$k \in \mathbb{N}$ に対し，X 上の二項関係 R を，$\ell, m \in \mathbb{Z}$ に対し，

x-B-6 (B-10) $\ell\,R\,m \;:\Leftrightarrow\; |\,\ell - m\,|$ は k で割切れる，

とすることで定義する．つまり，$R = \{\langle \ell, m\rangle \in \mathbb{Z}^2 : |\,\ell - m\,|$ は k で割切れる $\}$ とする．このとき，R は，$\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．$\ell, m \in \mathbb{Z}$ に対し，$\ell\,R\,m$ は，通常 “$\ell \equiv m \pmod{k}$” と表現される．

(3) $X = \mathbb{R}$ として，$a, b \in \mathbb{R}$ に対し，X 上の二項関係 R を

(B-11)　$a\,R\,b\ :\Leftrightarrow$　ある $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$a - b = 2\pi k$ となる　x-B-6-0

として定義すると，R は，$\mathbb{R}$ 上の同値関係である．以下では，この同値関係を $\equiv_{rad}$ と表わし，$a\,R\,b$ を $a \equiv_{rad} b$ と書くことにする — (A-3) を比較参照．❑

R を集合 X 上の同値関係とするとき，$a \in X$ に対し，

(B-12)　$[\,a\,]_R = \{b \in X\ :\ b\,R\,a\}$　x-B-7

とする，$[\,a\,]_R$ は a の同値関係 R に関する**同値類** (equivalence class) とよばれる． X の要素は，R に関する同値類に分類される:

補題 B.5　R を，集合 X 上の同値関係とする．このとき，次が成り立つ．　P-B-0

（1）　すべての $a, b \in X$ に対し，$[\,a\,]_R = [\,b\,]_R$ か，$[\,a\,]_R \cap [\,b\,]_R = \emptyset$ かの，どちらか，が成り立つ．

（2）　すべての $a \in X$ に対し，$a \in [\,a\,]_R$ である．

（3）

(B-13)　$X/R = \{[\,a\,]_R\ :\ a \in X\}$　x-B-8

とすると，X/R は，互いに素な集合からなる集合族で，$\bigcup X/R = X$ である [*7]．

証明． (1): $a, b \in X$ に対し，$[\,a\,]_R \cap [\,b\,]_R \neq \emptyset$ として，$[\,a\,]_R = [\,b\,]_R$ となることを示す．$c \in [\,a\,]_R \cap [\,b\,]_R$ とすると，$c\,R\,a$ で $c\,R\,b$ である．したがって，対称律 (B-9) により，$b\,R\,c$ である．よって，推移律 (B-10) により，$b\,R\,a$ が分かる．したがって，任意の $d \in [\,b\,]_R$ に対し，同値類の定義と推移律から，$d\,R\,a$ が成り立つので，$d \in [\,a\,]_R$ である．このことから，$[\,b\,]_R \subseteq [\,a\,]_R$ が分るが，同様に $[\,a\,]_R \subseteq [\,b\,]_R$ も示せるので，$[\,a\,]_R = [\,b\,]_R$ である．

(2): $a \in X$ とすると，反射律 (B-8) により $a\,R\,a$ だから，$a \in [\,a\,]_R$ である．

(3): (1) と (2) により，よい．　❑ (補題 B.5)

[*7] 集合族の F の和集合 $\bigcup F$ については，第 2 章 の 15 ページを参照してください．

上の補題 B.5 により，X 上の同値関係 R に対し，$A \in X/R$ で，$a \in A$ なら，$[a]_R = A$ である．$a \in A$ を，A の**代表元** (representative) とよぶ．A の代表元は，必ずしも一意に決まらない，ことに注意する．

R を，集合 X 上の同値関係とするとき，$S \subseteq X$ が，X/R の**代表系** (representing system) である，とは，

x-B-8-a (B-14) すべての，互いに異る $a, b \in S$ に対し，$a \not R\, b$ (つまり，$[a]_R \neq [b]_R$ となる);

x-B-8-a-0 (B-15) すべての $c \in X$ に対し，$a \in S$ で，$a\ R\ c$ となるものが，存在する (つまり，$X/R = \{[a]_R : a \in S\}$ となる)

こと，とする．

R を，集合 X 上の同値関係とするとき，R が，$n \in \mathbb{N}$ に対する関数 $f : X^n \to X$ **と，両立する** (congruent with f) とは，

x-B-8-0 (B-16) すべての $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in X$ に対し，$a_1\ R\ b_1, \ldots, a_n\ R\ b_n$ なら，$f(a_1, \ldots, a_n)\ R\ f(b_1, \ldots, b_n)$ となる

こと，とする．

R^* を X 上の n-項関係とするとき (つまり，$R^* \subseteq X^n$ とするとき)，X 上の同値関係 R が，R^* **と両立する** (congruent with R^*)，とは，

x-B-8-1 (B-17) すべての $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in X$ に対し，$a_1\ R\ b_1, \ldots, a_n\ R\ b_n$ なら，$R^*(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^*(b_1, \ldots, b_n)$ が成り立つ

こと，とする．

P-B-1 **補題 B.6** R を，集合 X 上の同値関係とする．（1） $n \in \mathbb{N}$ に対し，R が，関数 $f : X^n \to X$ と，両立するなら，$a_1, \ldots, a_n \in X$ に対し，

x-B-9 (B-18) $f/R([a_1]_R, \ldots, [a_n]_R) := [f(a_1, \ldots, a_n)]_R$

とすることで，関数 $f/R : (X/R)^n \to X/R$ を，定義することができる．

（2） $n \in \mathbb{N}$ に対し，R^* を，X 上の n-項関係 として，R が，R^* と両立するなら，$a_1, \ldots, a_n \in X$ に対し，

(B-19) $R^*/R([a_1]_R, ..., [a_n]_R) \;:\Leftrightarrow\; R^*(a_1, ..., a_n)$ x-B-9-0

とすることで，X/R 上の n-項関係 R^*/R を，定義することができる．

証明． (1): (B-18) が，関数 f/R を，うまく定義している [*8] ことを言うには，(B-18) での $f/R([a_1]_R, ..., [a_n]_R)$ の値の定義が，同値類 $[a_1]_R, ..., [a_n]_R$ の代表元 $a_1, ..., a_n$ の選び方に依存しないことを示す必要がある．$b_1 \in [a_1]_R$,...,$b_n \in [a_n]_R$ を，任意に取るとき，$[\cdot]_R$ の定義 (と R の対称性) から，$a_1\ R\ b_1$,...,$a_n\ R\ b_n$ だが，f は，R と両立するから，$f(a_1, ..., a_n)\ R\ f(b_1, ..., b_n)$ である，したがって，補題 B.5 により，$[f(a_1, ..., a_n)]_R = [f(b_1, ..., b_n)]_R$ である．

(2): (B-19) が，n-項関係 R^*/R をうまく定義している，ことを言うには，(B-19) での，$R^*/R([a_1]_R, ..., [a_n]_R)$ の真偽の定義が，同値類 $[a_1]_R, ..., [a_n]_R$ の代表元 $a_1, ..., a_n$ の選び方に依存しないことを示す必要がある．$b_1 \in [a_1]_R$,...,$b_n \in [a_n]_R$ を，任意に取るとき，$[\cdot]_R$ の定義 (と R の対称性) から，$a_1\ R\ b_1$,...,$a_n\ R\ b_n$ だが，R^* は，R と両立するから，$R^*(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow R^*(b_1, ..., b_n)$ である． ❏ (補題 B.6)

集合とはならないような領域 (真のクラス) 上の，**同値関係**を，考察する必要が出てくることも少なくない [*9]．この場合にも，クラス二項関係 (つまり， ♦ クラス上の同値関係

---

*8 “うまく定義している” という表現は，日本語としては，あまりこなれていないかもしれませんが，これは英語では，例えば，ここでの例では，“f/R is well-defined by (B-18)” のように表現します．この，“well-defined” は日本語の数学表現でも，形容動詞 “**well-defined な**” として用いられることがあります．本書でも，「うまく定義されている」より，自然に響く (ように思える) “well-defined である” を，主に使うことにします． well-defined

Well-defined であることを確かめる必要の出てくる局面には，ここでのような場合以外でも，“$\underset{\sim\sim}{\quad}$ を ... を満たすようなものとする” という形の定義をしているときもあります．このような定義が機能するためには，性質 $\underset{\sim\sim}{\quad}$ を満たす対象が存在して，しかも，その存在が一意である必要があるからです．(7.49) での well-definedness の議論は，このような例の一つです．これに対し，“$\underset{\sim\sim}{\quad}$ を ... を満たすようなものの一つとする” という定義では，$\underset{\sim\sim}{\quad}$ を満たす対象の一意性は必要でなくなりますが，このような定義の well-definedness のためには，そのようなものが存在することが依然として必要です．

*9 集合論では，(必ずしも）集合とならないような，(数学の対象からなる) 領域は，クラスとよばれます．クラスのうち，特に，集合とならない (ことが証明されている) ものは，真のクラスとよばれます．例えば，数学の対象のすべてからなるクラス $\mathsf{V} = \{x : x = x\}$ は集合でないことが証明できます: もし，これが集合だったとすると，この集合から作ることのできる $\{x \in \mathsf{V} : x \notin x\}$ も集合でなくてはならなくなり，**ラッセルのパラドックス** (Russell’s paradox) として知られている論法により，このことから，矛盾が導かれるから

(必ずしも集合ではない集まり) $\mathcal{X}$ に対する，クラス $\mathcal{X}^2 = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathcal{X}\}$ の部分クラスとしての) R が，それの定義された領域 (真のクラス) $\mathcal{X}$ 上の同値関係であるとは，それが，$\mathcal{X}$ 上で，反射律 (B-8), 対称律 (B-9), 推移律 (B-3) を，満たすことである，とする．

class-equivalence

例えば，同等性は，すべての数学の対象に対して定義された，同値関係である．真のクラス $\mathcal{X}$ 上の同値関係 R の同値類も，上でと同じように扱かうことが可能だが，一般には，個々の同値類が真のクラスになってしまう可能性があるため，同値類の全体を，考えようとすると，クラスのクラスという，通常の数学では扱えない対象を，扱わなくてはいけなくなってしまい，商構造 $\mathcal{X}/R$ を導入することが，できなくなってしまう． これを避けるためには，スコットのトリックと呼ばれるテクニックが用いられる．これは，同値類 $[a]_R$ を考える代りに，$[a]_R$ の部分集合で，$[a]_R$ の要素で，$\in$-ランク [*10]が最小なものだけをすべて集めてできる集合で置き換える (実際これが集合となることは容易に示せる) というものである．このトリックにより，同値類の全体 (これは真のクラスになりうる) を，数学的対象として考えることができようになる．

◆ スコットを人名に加える．実は Gödel がすでにこのトリックを使っているということを書く．

これまでに，構造，または，数学的構造という用語を無定義で使ってきたが，次に，この構造という概念の特別な場合である，**代数構造** (algebraic structure) の概念の，厳密な定義を与えておくことにする．

algebraic-structure

A を空でない集合として，I, J, を添字の集合とする (I, J のどれか／すべては空集合でもよいとする)．各 $i \in I$ に対し $n_i \in \mathbb{N}$ と A 上の n-変数関数 $f_i : A^{n_i} \to A$ が対応しており，各 $j \in J$ に対し $c_j \in A$ が対応しているとき，$\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j\rangle_{i\in I, j\in J}$ という形をしたものを，**代数構造**とよぶ．I と J が有限集合のとき，例えば，$I = \overline{m}$, $J = \overline{n}$ のときには，添字付きの列の成分を全部ならべて，$\mathfrak{A} = \langle A, f_1, ..., f_m, c_1, ..., c_n\rangle$ などと書くことも多い．

$+$ と，$\cdot$ を，$\mathbb{N}^*$ 上の，通常の掛け算と，足し算，とするとき，$\mathcal{N}^* = \langle \mathbb{N}^*, +, \cdot, 0, 1\rangle$ は，この意味での代数構造と見ることができる．

2 つの代数構造 $\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j\rangle_{i\in I, j\in J}$, $\mathfrak{B} = \langle B, g_i, d_j\rangle_{i\in I, j\in J}$ が，同じ添字集合 I, J と同じ変数の数 n_i, $i \in I$ を持っているとき，$\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{B}$ の，**型**

です．すぐ後に出てくる，群の全体からなるクラスも，真のクラスの例の，一つです．

*10 ここでは，詳説する余裕はありませんが，$\in$-ランクは，すべての集合 a に付与される超限順序数で，a の集合としてのある意味での複雑さを表現する指標です．詳しくは，[19], [21], または [36] などを参照してください．

(signature) が，等しい，または，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は同じ型を持つ，という．

R を，A 上の同値関係とするとき，R が代数構造 $\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ と**両立**する (congruent with $\mathfrak{A}$)，とは，R が，すべての f_i, $i \in I$ と両立すること，とする．次は，代数構造の定義と，補題 B.6 から明らかである:

補題 B.7 $\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ を，代数構造とし，R を，A 上の同値関係で，$\mathfrak{A}$ と両立するものとする．このとき，$\mathfrak{A}/R = \langle A/R, f_i/R, [c_j]_R \rangle_{i \in I, j \in J}$ は，$\mathfrak{A}$ と同じ型の代数構造である． ❑ P-B-1-0

定理 B.8 X を，空でない集合として，$\circ : X^2 \to X$ として，$e \in X$ とする．代数構造 $G = \langle X, \circ, e \rangle$ が，群で [*11]，R が，$\circ$ と両立する，X 上の同値関係のとき，$G/R = \langle X/R, \circ/R, [\,e\,]_R \rangle$ も，群である． P-B-2

G が，アーベル群なら，G/R も，アーベル群である．

証明． G/R は，(6.29) を，満たす: 任意の a, b, $c \in X$ に対し，

$$
([a]_R \circ/R\, [b]_R) \circ/R\, [c]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [a \circ b\,]_R \circ/R\, [c]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [(a \circ b) \circ c\,]_R
$$

$$
\underbrace{=}_{G\ \text{は (6.29) を満たす}} [a \circ (b \circ c)]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [a]_R \circ/G\, [b \circ c\,]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [a]_R \circ/G\, ([b]_R \circ/R\, [c]_R)
$$

である．

G/R は (6.30) を満たす: 任意の $a \in X$ に対し，

$$
[a]_R \circ/R\, [e]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [a \circ e\,]_R \underbrace{=}_{e\ \text{は}\ G\ \text{の単位元}} [a]_R
$$

である．同様に $[e]_R \circ/R\, [a]_R = [a]_R$ である．したがって，$[e]_R$ は G/R の単位元である．

G/R は (6.31) を満たす: $a \in X$ に対し，a^{-1} を，a の，G での逆元とする．このとき，

$$
[a]_R \circ/R\, [a^{-1}]_R \underbrace{=}_{\circ/R\ \text{の定義}} [a \circ a^{-1}]_R \underbrace{=}_{\text{逆元の定義}} [e]_R
$$

[*11] 群の定義については，216 ページを参照してください．

である．同様に，$[a^{-1}]_R \circ/R\, [a]_R = [e]_R$ も言えるから，$[a^{-1}]_R$ は，$[a]_R$ の，G/R での，逆元になっている．

G が，アーベル群であるとは，任意の $a, b \in G$ に対し，$a \circ b = b \circ a$ が成り立つことだった．このとき，

$$[a]_R \circ/R\, [b]_R \underbrace{=}_{\circ/R \text{ の定義}} [a \circ b]_R \underbrace{=}_{G \text{ はアーベル群}} [b \circ a]_R \underbrace{=}_{\circ/R \text{ の定義}} [b]_R \circ/R\, [a]_R$$

となるから，G/R も，アーベル群である．　□ (定理 B.8)

次の例は，$\mathbb{R}^2$ への角度の概念の導入で，重要な役割を，果すことになるものである．次節では，$\mathbb{N}$ から出発して，$\mathbb{R}$ を，構成する方法について，検証することになるが，次の例では，$\mathbb{R}$ は，既に構成されているもの，として議論している．

Ex-B-a **例 B.9** $\equiv_{rad}$ を，(B-11) で定義された，$\mathbb{R}$ 上の同値関係とする．

（1） $\equiv_{rad}$ は，$\mathbb{R}$ 上の足し算 “$+$” と，両立する．

（2） $\mathcal{R}_{\equiv_{rad}} = \langle \mathbb{R}/\equiv_{rad},\ +/\equiv_{rad},\ [0]_{\equiv_{rad}} \rangle$ は，アーベル群である．

（3） $\equiv_{rad}$ は，$\mathbb{R}$ 上の掛け算 “$\cdot$” と，両立しない．

（4） $[\,0,\, 2\pi\,) = \{r \in \mathbb{R} : 0 \le r < 2\pi\}$ は，$\mathbb{R}/\equiv_{rad}$ の代表系である．

証明． (1): (A-4) により，よい (そこでの註も参照).

(2): $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ が，アーベル群であること (補題 B.32 を参照) と，定理 B.8 により，よい．

(3): 例えば，$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ として，$a' = \frac{1}{2}$, $b' = 1 + 2\pi$ とすると，$[a]_{\equiv_{rad}} = [a']_{\equiv_{rad}}$, $[b]_{\equiv_{rad}} = [b']_{\equiv_{rad}}$ だが，$ab = \frac{1}{2}$, $a'b' = \frac{1}{2} + \pi$ だから，$[ab]_{\equiv_{rad}} \neq [a'b']_{\equiv_{rad}}$ である．

(4): $\equiv_{rad}$ の定義から明らかである (子細は読者の演習とする).　□ (例 B.9)

$\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ と，$\mathfrak{B} = \langle B, g_i, d_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ を，同じ型の代数構造とするとき，写像 $\iota : A \to B$ が，$\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{B}$ への**埋め込み** (embedding) である，とは，

x-B-9-1 (B-20) ι は 1-1 である;

(B-21) すべての $i \in I$ と $a_1, ..., a_{n_i} \in A$ に対し，$\iota(f_i(a_1, ..., a_{n_i})) = g_i(\iota(a_1), ..., \iota(a_{n_i}))$ である； x-B-9-2

(B-22) すべての $j \in J$ に対し，$\iota(c_j) = d_j$ である； x-B-9-3

が，成り立つこと，とする．ι が，構造 $\mathfrak{A}$ から構造 $\mathfrak{B}$ への埋め込みであるとき，このことを，$\iota : \mathfrak{A} \overset{\subseteq}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ と表わす．(B-21) での性質は，“ι は f_i を保存する” と表現されることもある．

$\mathfrak{A}$ から，$\mathfrak{B}$ への，埋め込み ι が，存在するときには，各 $a \in A$ と，$\iota(a) \in B$ とを，同一視して，$A \subseteq B$ と考えることにする，ということがよく行なわれる．この同一視が，妥当なものになっていることは，(B-21) により，この同一視で，各 $i \in I$ に対し，g_i は，f_i の拡張になること，また，(B-22) により，各 $j \in J$ に対し，$d_j = c_j$ となること，から了解することができるだろう．

特に，このことから，

$$\mathfrak{B} \restriction (\iota''A) = \langle \iota''A, g_i \restriction (\iota''A)^{n_i}, d_j \rangle_{i \in I, j \in J}$$

とすると，$\mathfrak{B} \restriction (\iota''A)$ は，$\mathfrak{B}$ と同じ型の代数構造となる．このように，ある g_i, $i \in I$ で閉じており，すべての d_j, $j \in J$ を含んでいるような $C \subseteq B$ に対し，

(B-23) $\mathfrak{B} \restriction C := \langle C, g_i \restriction C^{n_i}, d_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ x-B-9-4

の形で表わせる構造を，$\mathfrak{B}$ の**部分構造** (substructure) とよぶ．$\mathfrak{C}$ が，$\mathfrak{B}$ の部分構造であることを，部分集合の記号を乱用して，$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ と表わすことにする．$\iota : \mathfrak{A} \overset{\subseteq}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ のとき，($\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ として) $\mathfrak{B} \restriction \iota''A \subseteq \mathfrak{B}$ である．

写像 $\iota : A \to B$ が，$\mathfrak{A} = \langle A, f_i, c_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ の，$\mathfrak{B} = \langle B, g_i, d_j \rangle_{i \in I, j \in J}$ への埋め込みで，ι が，B への上射であるとき，ι は，$\mathfrak{A}$ から，$\mathfrak{B}$ への**同型写像** (isomorphism) であるといい，このことを，$\iota : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ と表わす． 代数構造 $\mathfrak{A}$ から，代数構造 $\mathfrak{B}$ への，このような同型写像が存在するとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は**同型である** (isomorphic)，といい，この事実を，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ で表わす． $\iota : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ かつ $\iota' : \mathfrak{B} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{C}$ なら，$\iota' \circ \iota : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{C}$ である．$\iota : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ なら，$\iota^{-1} : \mathfrak{B} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{A}$ となる，ことも容易に示せる．代数構造の同型[*12]が，反射律と対称律を満た isomorphism

*12 多少まぎらわしい用語の使い方になってしまっていますが，2 つの代数構造が同型なら，それらの型は同じですが，逆は成り立たないことに注意してください．

すことは明らかなので (対称律は，同型写像の逆写像も同型写像であることから従う)，$\mathcal{A} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}$ は代数構造 $\}$ とすると，$\equiv$ は，クラス $\mathcal{A}$ 上のクラス同値関係となることが分かる ($\mathcal{A}$ が真のスラスとなることは容易に示せる)．

2 つの代数構造 $\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{B}$ が，同型である，ということは，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は，代数構造として同一視できる，ということを意味する．実際，

x-B-9-4-0 (B-24) 同型な代数構造 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ は，それらの代数的性質で，区別することはできない[*13]．

例えば，$\mathfrak{A}$ が，アーベル群で $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ なら $\mathfrak{B}$ も，アーベル群である．

♦ チェックここから

Ex-B-a-a **例 B.10** $\equiv_{rad}$ を，(B-11) で定義した同値関係として，$\mathcal{R}_{\equiv_{rad}}$ を，例 B.9 で定義した構造とする．このとき，

（1） $+_{rad} : ([\,0,\, 2\pi\,))^2 \to [\,0,\, 2\pi\,)$ を，

x-B-9-0-0 (B-25) $$a +_{rad} b := \begin{cases} a+b, & a+b \in [\,0,\, 2\pi\,) \text{ のとき;} \\ a+b-2\pi, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．このとき，

x-B-9-0-1 (B-26) $$i_{rad} : [\,0,\, 2\pi\,) \to \mathbb{R}/\equiv_{rad};\quad a \;\mapsto\; [a]_{\equiv_{rad}}$$

とすると，

x-B-9-0-2 (B-27) $$\mathcal{R}_{rad} := \langle [\,0,\, 2\pi\,), +_{rad}, 0 \rangle$$

として，$i_{rad} : \mathcal{R}_{rad} \overset{\cong}{\to} \mathcal{R}_{\equiv_{rad}}$ である．

（2） 上の (1) と，例 B.9, (2), および，(B-24) により，$\mathcal{R}_{rad}$ はアーベル群で，

[*13] このことは，自明に思えますが，きちんと証明しようとすると，“代数的性質” の定義をしなくてはならなくなるので，それほど簡単なことではありません．異る同型な構造は，要素の集合論的性質では区別できることが多いので，この “代数的性質” の定義は避けて通るわけにはいきません．一番一般的な定義としては，高階の無限論理で表現できる性質，というようなものになると思いますが，ここではこれ以上はこの問題には踏み込まないことにします．なお (B-24) は，後述する，一階の構造の同型に対しても，同様に成り立ちます．

(B-28)　$-_{rad}:[\,0,\,2\pi\,)\to[\,0,\,2\pi\,);\ \ a\ \mapsto\ 2\pi-a$ x-B-9-0-3

が，$\mathcal{R}_{rad}$ の逆元の演算となる．

証明． $\equiv_{rad}$ と $+/\equiv_{rad}$ の定義から，明らかである (子細は読者の演習とする)． □ (例 B.10)

ι が，$\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{B}$ への埋め込みのときには，$\mathfrak{A}=\langle A,...\rangle$ として，$\iota:\mathfrak{A}\overset{\cong}{\to}\mathfrak{B}\restriction(\iota''A)$ である．$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への埋め込み ι が存在するとき，$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{B}$ の部分構造と看做す，というのは，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}\restriction(\iota''A)$ を ι の与える対応で同一視する，ということである．

埋め込みの，次のような特別な場合も，後で重要になる: $\mathfrak{A}_0=\langle A_0,...\rangle$, $\mathfrak{A}=\langle A,...\rangle$ と，$\mathfrak{B}=\langle B,...\rangle$ を，同じ型の代数構造で，$\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{B}$ となるものとする．このとき，$\iota:A\to B$ が，$\mathfrak{A}$ の，$\mathfrak{B}$ への，$\mathfrak{A}_0$ **上の埋め込み** (embedding of $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ over $\mathfrak{A}_0$) であるとは，$\iota:\mathfrak{A}\overset{\subseteq}{\to}\mathfrak{B}$ で，$\iota\restriction A_0=id_{A_0}$ となること，とする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[rr, "\iota"] & & \mathfrak{B} \\
& \mathfrak{A}_0 \arrow[ul, phantom, "\subseteq" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] &
\end{tikzcd}
$$

♦ figur-app-01.pdf

このときには，ι で，$\mathfrak{A}$ を，$\mathfrak{B}\restriction\iota''A$ と同一視するとき，$\mathfrak{A}_0$ はこの同一視で固定されるから，この同一視で，$\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ と看做すことができることになる．

$\iota:A\to B$ が，$\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{B}$ への $\mathfrak{A}_0$ 上の埋め込みで，B への上射になっているときには，ι は，$\mathfrak{A}$ **から** $\mathfrak{B}$ **への** $\mathfrak{A}_0$ **上の同型写像** (isomorphism from $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{B}$ over $\mathfrak{A}_0$) であるという．このような同型写像があるときには，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は，$\mathfrak{A}_0$ **上で同型**であるという．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}_0$ 上で同型のときには，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は，ただ同型であるだけでなく，$\mathfrak{A}_0$ を同様に拡張するものになっている．

$\langle A,...\rangle$ を代数構造とするとき，A は，この代数構造の**台集合** (underlying set) と呼ばれる．構造 $\langle A,...\rangle$ に新しい名前を与えずに，その台集合 (の名前) A で，この構造を表わすことにしてしまうことがよくある．このようなときには，厳密に取ると，ナンセンスなものとなっている，$A=\langle A,...\rangle$ という等式を書いて，“構造 $\langle A,...\rangle$ を，A で表わすことにする” という主張を表現することにする．例えば，“$\mathbb{N}=\langle\mathbb{N},+,\cdot,1\rangle$” は，“$\mathbb{N}$ で，構造 $\langle\mathbb{N},+,\cdot,1\rangle$ も表わすこ A=A

とにする” という表明である．同じ台集合を持つ，異なる構造を考えることも少なくないので，このような表明は，(段落や章をまたがない) 局所的な宣言にすぎないことが多い．

$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ が，代数的構造のとき，$\mathfrak{A}$ の台集合 A 上の関係 $R_1, ..., R_k$ を加えて得られる構造 $\tilde{\mathfrak{A}} = \langle A, ..., R_1, ..., R_k\rangle$ を考察することがある．このように，一般化された構造を，**一階の構造** (first-order structure) とよぶ[*14]．一階の構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ の代数構造の部分が，台集合のみからなる場合も許す．例えば，集合 X と X 上の二項関係 R からなる $\langle X, R\rangle$ も，一階の構造である．

first-order

◆ 位相空間については第 II 巻で触れる！

$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ と，$\mathfrak{B} = \langle B, ...\rangle$ を，同じ型の一階の構造とするとき (つまり代数構造の部分が同じ型で，付け加えられた関係たちの間にも対応がつき，それぞれの対応する関係の変数の数も互いに等しいとき)，$\iota : A \to B$ が，$\mathfrak{A}$ の，$\mathfrak{B}$ への**埋め込み** (embedding) であるとは，ι が，$\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{B}$ の代数構造に関する埋め込みとなっており，$\mathfrak{A}$ の各関係 $R^{\mathfrak{A}}$ と，対応する $\mathfrak{B}$ の関係 $R^{\mathfrak{B}}$ に対し，これらの関係が，n-項関係として，すべての $a_1, ..., a_n \in A$ について，

x-B-9-5

$$\text{(B-29)}\quad R^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) \;\Leftrightarrow\; R^{\mathfrak{B}}(\iota(a_1), ..., \iota(a_n))$$

を満たすこと，とする．性質 (B-29) は，“ι は R を保存する” と表現されることもある．

代数構造でのときと同様に，ι が，一階の構造 $\mathfrak{A}$ の，一階の構造 $\mathfrak{B}$ への埋め込みであることを，$\iota : \mathfrak{A} \overset{\subseteq}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ で表わす．

代数構造でのときと同様に，一階の構造の $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ の，一階の構造 $\mathfrak{B}$ への埋め込み ι があるとき，A の各元 a と，$\iota''A$ の元 $\iota(a)$ を，同一視して，これにより，$\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{B} \restriction (\iota''A)$ ($\mathfrak{B}$ の代数構造や関係を $\iota''A$ に制限して得られる一階の構造) を，同一視することが，頻繁に行なわれる．特に，$A \subseteq B$

*14 スターウォーズでは，“First Order” はとても強い悪の帝国ですが，ここでの “first-order” は，“higher-order でない，できるかぎり弱く，集合論的な構成要素を含まない”，というニュアンスを持つ用語です．本書のテーマである線型空間は，スカラー倍を各スカラーに関する一項演算と看倣すことで，ぎりぎり (無限個の演算を持つ) 一階の構造と考えることもできますが (265 ページの脚注を参照してください)，後に出てくる距離空間 (台集合から構造の外にある実数の全体への関数が構造の要素として必要になる) や，第 II 巻で触れるとになる位相空間 (台集合の冪集合の部分集合 (解集合の全体) が，構造の要素として必要になる) など，一階の構造ではない構造も，数学的対象として扱かう必要が出てくることもあります．

で，$\iota = id_A$ のとき，$\mathfrak{A}$ (つまり，$\mathfrak{B} \restriction A$) は，$\mathfrak{B}$ の，**部分構造** (substructure) であるという．ここでも記号を乱用して，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の部分構造であることを，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ と表わす．

後に，実数体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ から出発して構成したときに，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ を順序体としての構造と見て，そこで定義される埋め込みで，$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ と見做すことになるが，これも，ここで述べたような同一視による議論である．

一階の構造の埋め込み $\iota : \mathfrak{A} \overset{\subseteq}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ が，A の，B への上射にもなっているとき，ι は，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ の**同型写像** (isomorphism) であるといい，これを $\iota : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathfrak{B}$ と表わす．一階の構造 $\mathfrak{A}$ から，一階の構造 $\mathfrak{B}$ への，このような同型写像が，存在するとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は，**同型である** (isomorphic)，といい，この事実を，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ で表わす．

一階の構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が共通の部分構造 $\mathfrak{A}_0$ を持つとき，$\mathfrak{A}$ の，$\mathfrak{B}$ への，$\mathfrak{A}_0$ 上の埋め込み，$\mathfrak{A}$ から，$\mathfrak{B}$ への，$\mathfrak{A}_0$ 上の同型写像などの概念も，代数構造のときと同様に定義する．

代数構造のときと同様に，一階の構造の間に同型写像が存在する，という関係は，一階の構造たちの間の同値関係となっている [*15] (演習!)．

例 B.11　(1)　$<$ を，通常の数の間の大小関係として，一階の構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$，$\mathcal{N}^* = \langle \mathbb{N}^*, < \rangle$ を考える．$id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ と見ると，$id_{\mathbb{N}}$ は $\mathcal{N}$ の $\mathcal{N}^*$ への埋め込みで (つまり，$id_{\mathbb{N}} : \mathcal{N} \overset{\subseteq}{\Rightarrow} \mathcal{N}^*$ である)，$\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}^*$ の部分構造である (つまり，$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^*$ である)．$s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}; n \mapsto n + 1$ とすると，，s は $\mathcal{N}^*$ から $\mathcal{N}$ への同型写像である (つまり，$s : \mathcal{N}^* \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathcal{N}$ である)．したがって，$\mathcal{N}^* \cong \mathcal{N}$ である． Ex-B-a-0

(2)　$+$ を，数の和を与える通常の演算とする．$\mathcal{N}_+ = \langle \mathbb{N}, + \rangle, \mathcal{N}_+^* = \langle \mathbb{N}^*, + \rangle$ とする．このとき，$\mathcal{N}_+ \subseteq \mathcal{N}_+^*$ であるが，$\mathcal{N}_+$ と $\mathcal{N}_+^*$ は同型ではない: $\mathcal{N}_+^*$ では，すべての $b \in \mathcal{N}^*$ に対して $a + b = b$ となるような要素を持つ (0 はそのようなものになっている) が，$\mathcal{N}$ では，そのような性質を持つ要素は存在しない ((B-24) を参照)．

[*15] ここでも，与えられた型の代数構造や，一階の構造の全体は真のクラスになっているので，この同値関係も，360 ページで述べたような意味での，クラス同値関係です．

B.2　実数体の導入

continuum

自然数の全体 $\mathbb{N}$ と，$\mathbb{N}$ の上の，数の足し算と，掛け算 $+, \cdot$，および，掛け算に関する単位元となっている 1 からなる代数構造 $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 1 \rangle$ が，既に与えられているとして，これから出発して実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ とその上の四則演算からなる代数構造を構成する．

第 2.1 節で定義したように，ここでも，$\mathbb{N}$ に 0 を要素として加えた集合を，$\mathbb{N}^*$ と表わすことにする．

x-B-10

$$\text{(B-30)}\quad \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

である．ここで 0 は具体的な対象としては何でもよいが，$\mathbb{N}$ の要素でないものである必要がある．これは，すべての集合 X に対し，X に属さない対象が存在することが証明できる[*16]ので，よい．

$\mathbb{N}$ の足し算と掛け算，$+, \cdot$ は，すべての $n \in \mathbb{N}^*$ に対し，

x-B-11

$$\text{(B-31)}\quad n + 0 = 0 + n := n, \qquad n \cdot 0 = 0 \cdot n := 0$$

と定義することで，$\mathbb{N}^*$ に自然に拡張できる[*17]．

$m, n \in \mathbb{N}^*$ に対し，

x-B-11-0

$$\text{(B-32)}\quad m < n \;\;:\Leftrightarrow\;\; k \in \mathbb{N} \text{ で，} \;\; m + k = n \text{ となるものが存在する}$$

とすると，$<$ は $\mathbb{N}$ 上の $<$ を拡張する $\mathbb{N}^*$ 上の線形順序となる (演習)．$m < n$ のときには，$n = m + k$ となる $k \in \mathbb{N}$ は一意に決まるが (演習)，この k を，$n - m$ と表わすことにする．

[*16] この証明は読者の演習とします．ヒント: スタンダードな証明方法は，ラッセルのパラドックスのアイデアを用いるものです．⟦ ある集合 Ω に対し，$a \notin \Omega$ となる a が存在しない，として矛盾を導く．Ω を用いると，集合 $\Psi = \{a \in \Omega \,:\, a \notin a$ が成り立つ $\}$ が定義できる．Ω に関する仮定から，$\Psi \in \Omega$ である．

したがって，もし $\Psi \notin \Psi$ とすると，Ψ の定義により，$\Psi \in \Psi$ となってしまい矛盾である．他方，$\Psi \in \Psi$ だったとすると，Ψ の定義から，$\Psi \notin \Psi$ となってしまい，再び矛盾である．⟧

◆ 付録にこれと「任意の集合に対し，それと素な集合をもうひとつの集合と bjiective に取れる」などの証明をまとめる．

[*17] ここで “自然に” と言っているのは，$\mathbb{N}^*$ に拡張された足し算と掛け算が，$\mathbb{N}$ でのものに対応する結合律，分配律，可換性 ((2.41)～(2.49) で述べたものに対応する法則) を満たすことを含んでいます．これが成り立つことのチェックは読者の演習とします．

次に,

(B-33) $\mathbb{Z} := \{\langle i, n\rangle : (i = 0$ かつ $n \in \mathbb{N})$ または $(i = 1$ かつ $n \in \mathbb{N}^*)\}$ x-B-12

$$= \{0\} \times \mathbb{N} \,\dot{\cup}\, \{1\} \times \mathbb{N}^*$$

とする．対応 $\mathbb{N}^* \ni n \mapsto \langle 1, n\rangle \in \mathbb{Z}$ により，$\{\langle 1, n\rangle : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{Z}$ を，$\mathbb{N}^*$ のコピーと思い，$n \in \mathbb{N}$ に対する $\langle 0, n\rangle$ を，負の数 “$-n$” だと思うことにして，(この意図された解釈に適合するように) $\mathbb{Z}$ 上の演算 $+, \cdot$ を，$\langle m, i\rangle$, $\langle n, j\rangle \in \mathbb{Z}$ に対し，以下のようにして定義する [*18]:

(B-34) x-B-13
$$\langle i, m\rangle + \langle j, n\rangle := \begin{cases} \langle i, m+n\rangle, & i = j \text{ のとき} \\ \langle i, m-n\rangle, & i \neq j \text{ で } m > n \text{ のとき;} \\ \langle j, n-m\rangle, & i \neq j \text{ で } n > m \text{ のとき;} \\ \langle 1, 0\rangle, & i \neq j \text{ で } n = m \text{ のとき} \end{cases}$$

(B-35) x-B-14
$$\langle i, m\rangle \cdot \langle j, n\rangle := \begin{cases} \langle 1, m\cdot n\rangle, & i = j \text{ のとき;} \\ \langle 0, m\cdot n\rangle, & i \neq j,\ m \neq 0,\ n \neq 0 \text{ のとき;} \\ \langle 1, 0\rangle, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

補題 B.12 $i_{\mathbb{N}^*} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z};\ n \mapsto \langle 1, n\rangle$ は，代数構造 $\langle \mathbb{N}^*, +, \cdot, 0, 1\rangle$ の，代数構造 $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\rangle$ への埋め込みである． P-B-2-0

証明． $i_{\mathbb{N}^*}$ が，1-1 であることは，$i_{\mathbb{N}^*}$ の定義から明らか．$i_{\mathbb{N}^*}(m+n) = i_{\mathbb{N}^*}(m) + i_{\mathbb{N}^*}(n)$, $i_{\mathbb{N}^*}(m \cdot n) = i_{\mathbb{N}^*}(m) \cdot i_{\mathbb{N}^*}(n)$, $i_{\mathbb{N}^*}(0) = \langle 1, 0\rangle$, $i_{\mathbb{N}^*}(1) = \langle 1, 1\rangle$ となることは，(B-34), (B-35) から明らかである． □ (補題 B.12)

以下では，$\mathbb{N}^*$ の各要素 n を，$i_{\mathbb{N}^*}{}''\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ の要素 $i_{\mathbb{N}^*}(n) = \langle 1, n\rangle$ と同一視して，$\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ と考えることにする．特に，この同一視で，$\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle \in \mathbb{Z}$ を，それぞれ，0, 1 と書くことにする．

$-1 := \langle 0, 1\rangle$ とし，$a \in \mathbb{Z}$ に対し，$-a := -1 \cdot a$ とする．

[*18] $\mathbb{N}^*$ では，引き算は，演算として $\mathbb{N}^*$ の要素の組の全体に定義されてるわけではないのですが (例えば，$2-3$ に対応する自然数は，存在しません), $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$n + k = m$ となる $k \in \mathbb{N}^*$ が存在すれば，そのような k は一意に決まるので，以下では，これを $m - n$ と表わしています．また，n と m に対して，このような k が存在して $k \neq 0$ のとき，$n < m$ とすることで，$\mathbb{N}$ に通常の大小関係が導入できます．

$\mathbb{Z}$ での演算 $+, \cdot$ は，$\mathbb{N}$ での $+, \cdot$ の計算規則を継承するものとなっており，その意味でも，$\mathbb{N}$ での対応する演算を，自然に拡張するものになっている．

体の公理 (第 2 章 の (2.41)～(2.49)) から逆数の演算に関する性質を除いたもの (以下の (B-36)～(B-44)) を満たす代数構造を，**環** (かん, ring) と呼ぶことにすると，

P-B-3 **補題 B.13** 代数構造 $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ は，環である．つまり，任意の a, b, $c \in \mathbb{Z}$ に対し，次が成り立つ [*19]:

x-B-14-0 (B-36) $(a+b)+c = a+(b+c)$, (加法の結合律)

x-B-14-1 (B-37) $0+a = a+0 = 0$, (加法の単位元)

x-B-14-2 (B-38) $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (加法の逆元)

x-B-14-3 (B-39) $a+b = b+a$ (加法の可換律)

x-B-14-4 (B-40) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (乗法の結合律)

x-B-14-4-0 (B-41) $1\cdot a = a\cdot 1 = a$ (乗法の単位元)

x-B-14-5 (B-42) $a\cdot b = b\cdot a$ (乗法の可換律)

x-B-14-6 (B-43) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (左分配律)

x-B-14-7 (B-44) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (右分配律)

証明． どの性質も，我々が数の計算に関する学習を通じて直観的に理解していることだが，これらの計算則が，ここで定義した $\mathbb{Z}$ の加法と乗法の演算で成り立っていることは，(B-34), (B-35) に戻って，必要なら場合分けを行なって，(以下の例でのような) 場合ごとに，該当する等式が成り立つことを証明することで，示す必要がある．ここでは，(B-36) の証明の要点のみを示し，残りは読者の演習とする．

(B-36) の証明のために，a, b, $c \in \mathbb{Z}$ を任意にとり，$a = \langle i_a, m_a\rangle$, $b =$

[*19] 以下では，$\mathbb{Z}$ で，$+$ と $\cdot$ の間に通常の (小学校で習う算数の意味での) 暗黙の演算の優先順序が想定されているものとしています．例えば，$a\cdot b + a\cdot c$ は，$((a\cdot b)+a)\cdot c$ のことではなく，$(a\cdot b)+(a\cdot c)$ のことです．これは，後で定義される $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ での足し算と掛け算を組み合わせた計算でも同様とします．また，これも文字式に関する，中学高校での数学での慣習と同様に，文字式の計算では，掛け算の演算記号 $\cdot$ を省略して，(B-43) の式を，$a(b+c) = ab+ac$ とも書くことにします．

$\langle i_b, m_b \rangle$, $c = \langle i_c, m_c \rangle$ とする．場合分けにより，どの場合でも，a, b, c に対し，(B-36) の等式が成り立つことを示す．

ここでの場合分けでの，場合の一つは，

(B-45)　$i_a = 0$, $i_b = 1$, $i_c = 0$, かつ，$m_a < m_b < m_c$ 　x-B-14-8

となるときである．このときには，

$$(a+b)+c \underbrace{=}_{\text{(B-34) と仮定 (B-45) による}} \langle 1, m_b - m_a \rangle + \langle 0, m_c \rangle$$

$$\underbrace{=}_{\text{(B-34) と仮定 (B-45) による}} \langle 0, m_c - (m_b - m_a) \rangle \underbrace{=}_{\mathbb{N}^* \text{ での計算}} \langle 0, m_c + m_a - m_b) \rangle,$$

$$a+(b+c) \underbrace{=}_{\text{(B-34) と仮定 (B-45) による}} \langle 0, m_a \rangle + \langle 0, m_c - m_b \rangle \underbrace{=}_{\text{(B-34) と仮定 (B-45) による}} \langle 0, m_a + m_c - m_b \rangle$$

だから，$(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立つ．他の場合も，同様に示せる．

□ (補題 B.13)

上の条件 (B-36)〜(B-39) は，第 6.1 節で導入された用語を用いると，“$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ は，アーベル群である”，と言い換えることができる．(B-40)〜(B-42) は，$\langle \mathbb{Z}, \cdot, 1 \rangle$ が，**単位元を持つ可換な半群** (commutative semigroup with the unit) である，と表現される．“$\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ が環である” というのは，これらの性質に加えて，$\mathbb{Z}$ の加法と乗法が，分配則 (B-43), (B-44) で結びつけられている，ということである．

♦ 第 6.1 節で群や半群，アーベル群可換な半群等の用語を導入する!

上の基本性質の枚挙は，冗長なものとなっている．例えば，加法の可換性 (B-39) の下では，単位元の性質 (B-37) のためは，$0 + a = 0$ を言えば十分である[*20]．

上で与えた $\mathbb{Z}$ の構成は恣意的に見えるかもしれないが，$\mathbb{Z}$ は，次の補題の意味で，$\mathbb{N}$ を拡張する環のうち最小のものとなっている．

---

*20 「冗長」という表現の否定的なコノーテーションから，冗長な公理系は良くない，と短絡的に考えてしまいがちかもしれませんが，実は，ここでの環の公理でのように，あえて冗長な記述を選択する方が分りやすい，という場合も少なくありません．また，ここでの環の公理が，足し算に対する群の公理系を含んでいる，というように，部分体系が公理系の部分に対応する，という利点が生じる可能性もあります．

P-B-3-0 **補題 B.14** $R = \langle R, +_R, -_R, \cdot_R, 0, 1\rangle$ を，環で，$\mathbb{N}^* = \langle \mathbb{N}^*, +, \cdot, 0, 1\rangle$ が $\langle R, +_R, \cdot_R, 0, 1\rangle$ の部分構造になっているようなものとする．このとき，$\mathbb{Z}$ の R への $\mathbb{N}^*$ 上の埋め込みが存在する．

証明． $\langle i, m\rangle \in \mathbb{Z}$ に対し，

x-B-14-9 (B-46) $$\iota(\langle i, m\rangle) := \begin{cases} m, & i = 1 \text{ のとき;} \\ -_R m, & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

として $\iota : \mathbb{Z} \to R$ を定義すると，ι は，環 $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ の 環 $R = \langle R, +_R, -_R, \cdot_R, 0, 1\rangle$ への埋め込みとなる (演習)．$\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ の同一視の仕方と，ι の定義 (B-46) から，$\iota \restriction \mathbb{N}^* = id^*_{\mathbb{N}}$ である． □ (補題 B.14)

$\mathbb{N}^*$ 上の線形順序 $<$ は，$\mathbb{Z}$ 上の線形順序 $<$ に自然に拡張できる:
$\langle i, m\rangle$, $\langle i', m'\rangle \in \mathbb{Z}$ に対し，

x-B-14-10 (B-47) $$\langle i, m\rangle < \langle i', m'\rangle \;:\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} i = i' = 0 \text{ かつ，} \quad m' < m;\ \text{または，} \\ i = i' = 1 \text{ かつ，} \quad m < m';\ \text{または，} \\ i = 0 \text{ かつ，} \quad i' = 1 \end{array}$$

として，$\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $<$ を定義すると，次が成り立つ．

Exer-B-a **演習問題 B.15** （1） (B-47) の $<$ は，$\mathbb{N}^*$ 上の標準的な順序 $<$ を拡張する，$\mathbb{Z}$ 上の線形順序である．

（2） (B-47) の $<$ は，環としての $\mathbb{Z}$ の上の四則演算と共存する，つまり，任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対し，

x-B-14-11 (B-48) $a < b$ なら，$a + c < b + c$ である．

x-B-14-12 (B-49) $0 < a$, $0 < b$ なら，$0 < a \cdot b$ である

が成り立つ．

（3） (B-48) から，次の性質が導ける:

x-B-14-13 (B-50) $a < b$ なら，$-b < -a$ である．

（4） $\mathbb{Z}$ 上の線形順序で，$\mathbb{Z}$ 上の四則演算と共存するものは，(B-47) の $<$ に限る．

ヒント． (1): $<$ が $\mathbb{N}^*$ 上の標準的な順序を拡張することは，定義から明らかである．

(2): (B-48) と (B-49) は，演算 $+, \cdot$ と，順序 $<$ の定義での場合分けに沿った場合分けで，示せる．

(3): (B-48) を適用して，両辺に $-(a+b)$ を足せばよい．

(4): $\sqsubset$ を $\mathbb{Z}$ 上の全順序で，(B-48) と，(B-49) (に対応する性質) を満たすものとする．$0 \sqsubset 1$ である．もしそうでないなら，$0 \neq 1$ により，$1 \sqsubset 0$ でなくてはならないが，(B-48) により，両辺に -1 を足して $0 \sqsubset -1$ となる．したがって，(B-49) により，$0 \sqsubset (-1)\cdot(-1) = 1$ となってしまい，矛盾である．この不等式の両辺に 1 と -1 を順次足してゆくことで，

$$\cdots \sqsubset -3 \sqsubset -2 \sqsubset -1 \sqsubset 0 \sqsubset 1 \sqsubset 2 \sqsubset 3 \sqsubset \cdots$$

が得られる．したがって，$\sqsubset = <$ である． ❏ (演習問題 B.15)

$K = \langle K, +, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1\rangle$ が体 (54 ページ を参照) のときには，$\langle K, +, -(\cdot), \cdot, 0, 1\rangle$ は環である．一方，$\mathbb{Z}$ は，環だが，体ではない (つまり逆数の関数を導入して体にすることはできない)． 例えば，$2 \in \mathbb{Z}$ の逆数は，(2.47) により，方程式 $2x = 1$ の解でなければならないが，$\mathbb{Z}$ の範囲では，この方程式に $\mathbb{Z}$ の範囲では解が存在しないことは，明らかである．

有理数体は，整数の全体のなす環を拡張する体のうち，最小のもの，として導入される (補題 B.20, (2) を参照)．有理数体 $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ の，整数の全体 $\mathbb{Z}$ からの構成では，商構造の構成法が，積極的に必要となる．この構成のために，まず，

(B-51) $\mathcal{Q} := \{\langle k, m\rangle \,:\, k \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N}\}\ (= \mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ x-B-15

とする． $\mathcal{Q}$ の要素 $\langle k, m\rangle$ を分数 $\frac{k}{m}$ の表現だと考える．この解釈にそうように，$\mathcal{Q}$ 上に，分数の足し算と掛け算と反数の計算

$$\frac{k}{m} + \frac{k'}{m'} = \frac{m'\cdot k + m\cdot k'}{m\cdot m'},$$
$$\frac{k}{m} \cdot \frac{k'}{m'} = \frac{k\cdot k'}{m\cdot m'},$$
$$-\frac{k}{m} = \frac{-k}{m}$$

に対応する，演算 $+_{\mathcal{Q}}$, $\cdot_{\mathcal{Q}}$ を，$\langle k,m\rangle$, $\langle k',m'\rangle\in\mathcal{Q}$ に対して，

x-B-16 (B-52) $\langle k,m\rangle +_{\mathcal{Q}} \langle k',m'\rangle := \langle m'\cdot k + m\cdot k',\ m\cdot m'\rangle,$

x-B-17 (B-53) $\langle k,m\rangle \cdot_{\mathcal{Q}} \langle k',m'\rangle := \langle k\cdot k',\ m\cdot m'\rangle,$

x-B-17-0 (B-54) $-_{\mathcal{Q}}\langle k,m\rangle := \langle -k,m\rangle$

として定義する．$\mathcal{Q}$ 上に，分数の同等性に対応する同値関係 $\sim_{\mathcal{Q}}$ を，

x-B-18 (B-55) $\langle k,m\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k',m'\rangle \;:\Leftrightarrow\; m'k = mk'$

で導入する．実際，

P-B-4 **補題 B.16** $\sim_{\mathcal{Q}}$ は，$\mathcal{Q}$ 上の同値関係である．

証明． $\sim_{\mathcal{Q}}$ が，反射律 (B-8) と対称律 (B-9) を満たすことは明らかである．

$\sim_{\mathcal{Q}}$ が推移律 (B-3) を満たすことを示すために，$\langle k,m\rangle$, $\langle k',m'\rangle$, $\langle k'',m''\rangle\in\mathcal{Q}$ に対し，

x-B-18-a (B-56) $\langle k,m\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k',m'\rangle \;\;(\Leftrightarrow\;\; km' = mk'),$

x-B-18-a-0 (B-57) $\langle k',m'\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k'',m''\rangle \;\;(\Leftrightarrow\;\; k'm'' = m'k'')$

とする．このとき，

$$m\cdot k''\cdot m' \underbrace{=}_{\text{(B-57)}} m\cdot k'\cdot m'' \underbrace{=}_{\text{(B-56)}} k\cdot m'\cdot m''$$

だから，$mk'' = km''$ である．つまり，$\langle k,m\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k'',m''\rangle$ が成り立つ．

□ (補題 B.16)

P-B-5 **補題 B.17** 同値関係 $\sim_{\mathcal{Q}}$ は，$\mathcal{Q}$ 上の演算 $+_{\mathcal{Q}}$, $\cdot_{\mathcal{Q}}$, $-_{\mathcal{Q}}$ のすべてと両立する．

証明． $\langle k,m\rangle$, $\langle k',m'\rangle$, $\langle \ell,n\rangle$, $\langle \ell',n'\rangle\in\mathcal{Q}$ で，

x-B-18-0 (B-58) $\langle k,m\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k',m'\rangle \;\;(\Leftrightarrow\;\; k\cdot m' = k'\cdot m),$

x-B-18-1 (B-59) $\langle \ell,n\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle \ell',n'\rangle \;\;(\Leftrightarrow\;\; \ell\cdot n' = \ell'\cdot n)$

とする．

(B-60) $\langle k, m\rangle +_{\mathcal{Q}} \langle \ell, n\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k', m'\rangle +_{\mathcal{Q}} \langle \ell', n'\rangle$, x-B-19

(B-61) $\langle k, m\rangle \cdot_{\mathcal{Q}} \langle \ell, n\rangle \sim_{\mathcal{Q}} \langle k', m'\rangle \cdot_{\mathcal{Q}} \langle \ell', n'\rangle$ x-B-20

(B-62) $-_{\mathcal{Q}}\langle k, m\rangle = -_{\mathcal{Q}}\langle k', m'\rangle$ x-B-20-0

が示したいことである．

(B-60) については，(B-52) により，

$$\langle k, m\rangle +_{\mathcal{Q}} \langle \ell, n\rangle = \langle k\cdot n + \ell\cdot m,\ m\cdot n\rangle,$$
$$\langle k', m'\rangle +_{\mathcal{Q}} \langle \ell', n'\rangle = \langle k'\cdot n' + \ell'\cdot m',\ m'\cdot n'\rangle$$

だから，

$$(k\cdot n + \ell\cdot m)\cdot m'\cdot n' = k\cdot n\cdot m'\cdot n' + \ell\cdot m\cdot m'\cdot n'$$
$$\underbrace{=}_{\text{(B-58),(B-59) による}} k'\cdot n\cdot m\cdot n' + \ell'\cdot m\cdot m'\cdot n = (k'\cdot n' + \ell'\cdot m')\cdot m\cdot n$$

となり，このことと，$+_{\mathcal{Q}}$ の定義 (B-52) から，(B-60) が成り立つことが，分かる．

(B-61), (B-62) についても同様に示せる．　□ (補題 B.17)

補題 B.16 と補題 B.17 (および，補題 B.7) により，代数構造

(B-63) $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ x-B-21
$$:= \langle \mathcal{Q}/{\sim_{\mathcal{Q}}},\ +_{\mathcal{Q}}/{\sim_{\mathcal{Q}}},\ -_{\mathcal{Q}}/{\sim_{\mathcal{Q}}},\ \cdot_{\mathcal{Q}}/{\sim_{\mathcal{Q}}},\ [\langle 0, 1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}},\ [\langle 1, 1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}\rangle$$

を考えることができる[*21]．

補題 B.18 写像 $i_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q};\ m \mapsto [\langle m, 1\rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$ は，代数構造 $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ の，$\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ への埋め込みである． P-B-6

証明． $m, m' \in \mathbb{Z}$, $m \neq m'$ なら，$m\cdot 1 \neq m'\cdot 1$ だから，$[\langle m, 1\rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}} \neq [\langle m', 1\rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$ である．したがって，$i_{\mathbb{Z}}$ は 1-1 であることが分かる．

$m, m' \in \mathbb{Z}$ とすると，

[*21] "$-$" は，ここでは，2 つの数の差を取る二項演算ではなく，数の反数を返す演算として導入されていることに注意します．2 つの数の差 $a - b$ は，反数を取る演算と和の演算との組合せ，つまり，"$a + (-b)$" として実現できます．

$$i_{\mathbb{Z}}(m+m') \underbrace{=}_{i_{\mathbb{Z}}\text{ の定義}} [\langle m+m',1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}} \underbrace{=}_{+_{\mathcal{Q}}/\sim_{\mathcal{Q}}\text{ の定義}} [\langle m,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}} +_{\mathcal{Q}} / \sim_{\mathcal{Q}} [\langle m',1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$$
$$\underbrace{=}_{i_{\mathbb{Z}}\text{ の定義}} i_{\mathbb{Z}}(m) +_{\mathcal{Q}} / \sim_{\mathcal{Q}} i_{\mathbb{Z}}(m')$$

である．

$i_{\mathbb{Z}}(m \cdot m') = i_{\mathbb{Z}}(m) \cdot_{\mathcal{Q}} / \sim_{\mathcal{Q}} i_{\mathbb{Z}}(m')$ と，$i_{\mathbb{Z}}(-m) = -_{\mathcal{Q}}/\sim_{\mathcal{Q}}(i_{\mathbb{Z}}(m))$ も，同様に示せる．

$i_{\mathbb{Z}}(0) = [\langle 0,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$, $i_{\mathbb{Z}}(1) = [\langle 1,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ も $i_{\mathbb{Z}}$ の定義から成りたつ．

□ (補題 B.18)

$\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ のときと同様に，上の埋め込み $i_{\mathbb{Z}}$ による同一視で，$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ と考えることにする． $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ と見たときには，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の拡張で，体となるようなもののうち最小のもの，として特徴付けることができる．まず，次の補題を示す．

P-B-6-0 **補題 B.19** $q \in \mathbb{Q}$ で $q = [\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ とするとき，

$$q = 0 \text{ (つまり } q = [\langle 0,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}) \iff k = 0$$

が成り立つ．

証明． $k = 0$ なら，$m \cdot 0 = 0 = k \cdot 1$ だから，$\sim_{\mathcal{Q}}$ の定義 (B-55) から，$q = [\langle 0,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ である．$k \neq 0$ なら，$k \cdot 1 \neq 0 = m \cdot 0$ だから，$\sim_{\mathcal{Q}}$ の定義 (B-55) から，$q \neq [\langle 0,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ である． □ (補題 B.19)

$q \in \mathbb{Q}$, $q = [\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ で $q \neq 0$ となるものに対し [*22]，

x-B-22 (B-64) $$q^{-1} := \begin{cases} [\langle m,k\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}, & k \geq 0 \text{ のとき;} \\ [\langle -m,-k\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}, & k < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

この定義が q の代表元 $\langle k,m\rangle$ に依存しないことは，$\sim_{\mathbb{Q}}$ の定義から容易に示せる．脚注*22 により，$q^{-1} \in \mathbb{Q}$ である．また，$0^{-1} = 0$ とする [*23]．

---

fn-B-0 *22 補題 B.19 により，$q \neq 0$ は，$k \neq 0$ と同値になることに注意します．

dummy-value *23 通常の代数の議論では，$\cdot^{-1}$ は，0 では未定義ですが，我々の代数構造の定義では，構造に含まれる関数は台集合の全域で定義されるものとしていたので，これに対応するめに，ここでは，ダミーの値を，$0^{-1} = 0$ として定義しています．

補題 B.20 （1） $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1 \rangle$ は体である[*24]．つまり，$K = \mathbb{Q}$ は (2.41) ∼ (2.49) を満たす． P-B-7

（2） $\mathbb{Q}$ は，$\mathbb{Z}$ を拡張する体のうち最小のものである．つまり，任意の $\mathbb{Z}$ を拡張する体 K に対し，$\mathbb{Q}$ は，$\mathbb{Z}$ 上 K に埋め込める．

証明． (1): $\mathbb{Q}$ が (2.41) と (2.47) を満たすことを見る．他の性質も同様に示せる．

$q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$ で，$q_1 = [\langle k_1, m_1 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}}$, $q_2 = [\langle k_2, m_2 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}}$, $q_3 = [\langle k_3, m_3 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}}$ とする．このとき，$+$ (つまり $+_\mathcal{Q}/\sim_\mathcal{Q}$) の定義から，

$$
\begin{aligned}
(q_1 + q_2) + q_3 &= [\langle m_2 \cdot k_1 + m_1 \cdot k_2,\ \ m_1 \cdot m_2 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} + q_3 \\
&= [\langle m_3 \cdot (m_2 \cdot k_1 + m_1 \cdot k_2) + m_1 \cdot m_2 \cdot k_3,\ \ m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} \\
&= [\langle m_2 \cdot m_3 \cdot k_1 + m_1 \cdot (m_3 \cdot k_2 + m_2 \cdot k_3),\ \ m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} \\
&= q_1 + [\langle m_3 \cdot k_2 + m_2 \cdot k_3,\ \ m_2 \cdot m_3 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} = q_1 + (q_2 + q_3)
\end{aligned}
$$

である．したがって，$\mathbb{Q}$ で (2.41) が成り立つことが示せた．

次に，$\mathbb{Q}$ が (2.47) を満たすことを示すために，$q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ とする．このとき，$q = [\langle k, m \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}}$ とすると，補題 B.19 により，$k \neq 0$ である．$k < 0$ の場合を考える ($k > 0$ の場合も以下と同様に，しかも，以下より簡単に示せる)．この場合には，(B-64) により，$q^{-1} = [\langle -m, -k \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}}$ である．したがって，$\cdot_\mathcal{Q}$ の定義 (B-53) と，$\sim_\mathcal{Q}$ の定義 (B-55) により，

$$
q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = [\langle k \cdot (-m),\ \ m \cdot (-k) \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} = [\langle 1, 1 \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} = 1
$$

である．

(2): $K = \langle K,\ +_K,\ -_K(\cdot),\ \cdot_K,\ (\cdot)_K^{-1},\ 0,\ 1 \rangle$ を，$\mathbb{Z}$ を拡張する体とする (つまり，K は，体で，

(B-65) $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z},\ +,\ -\cdot,\ 0,\ 1 \rangle$ は，$\langle K,\ +_K,\ -_K(\cdot),\ \cdot_K,\ 0,\ 1 \rangle$ の部分構造になっている， x-B-22-0

とする)．$[\langle k, m \rangle]_{\sim_\mathcal{Q}} \in \mathbb{Q}$ に対し，

[*24] この，“$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1 \rangle$” という，言葉どおりに取ると矛盾している記法については，第 B.1 節の最後 (365 ページ) を参照してください．

x-B-23 (B-66) $\iota([\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}) := k \cdot_K (m)_K^{-1}$

として，$\iota : \mathbb{Q} \to K$ を定義すると，ι は，$\mathbb{Q}$ の K への埋め込みとなる．

ι が，うまく定義されていて，1-1 になることは，$q,\, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，$q = [\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$, $q' = [\langle k',m'\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ として，

$$[\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}} \neq [\langle k',m'\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\sim_{\mathcal{Q}}\text{ の定義 (B-55)}} k\cdot m' \neq k'\cdot m \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(B-65)}} k \cdot_K m' \neq k' \cdot_K m$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{K\text{ は体だから}} k \cdot_K (m)_K^{-1} \neq k' \cdot_K (m')_K^{-1}$$

となることからよい．ι が $\mathbb{Q}$ の演算を保存することは，容易に示せる (演習)．

ι の定義 (B-66) から，$k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\iota(k) \underbrace{=}_{\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\text{ の } i_{\mathbb{Z}}\text{ での同一視}} \iota([\langle k,1\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}) \underbrace{=}_{\iota\text{ の定義 (B-66)}} k \cdot_K (1)_K^{-1} \underbrace{=}_{K\text{ は体}} k$$

だから，$\iota \restriction \mathbb{Z} = id_{\mathbb{Z}}$ である．　□ (補題 B.20)

$q,\, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，$q = [\langle k,m\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$, $q' = [\langle k',m'\rangle]_{\sim_{\mathcal{Q}}}$ として，$\mathbb{Q}$ 上の二項関係 $<$ を，

x-B-23-0 (B-67) $q < q' \;:\Leftrightarrow\; m'k < mk'$

で定義する．ただし，定義の右辺の “$<$” は (B-47) で定義した $\mathbb{Z}$ 上の線形順序である．次が成り立つ:

Exer-B-a-0 **演習問題 B.21** （1） $<$ は，well-defined な，$\mathbb{Z}$ 上の (B-47) で定義された線形順序 $<$ を拡張する，$\mathbb{Q}$ 上の線形順序である．

（2） $\mathbb{Q}$ 上の線形順序 $<$ は，体 $\mathbb{Q}$ の四則演算と共存する．

（3） $\mathbb{Q}$ 上の四則演算と共存する線形順序は，ここで定義した $<$ に限る．

ヒント．　□ (演習問題 B.21)

◆ 拡張版に証明の概略を入れる．

$\mathbb{Q}$ から出発して，実数体を構成する標準的な方法は，2 つある．その一つは，デデキントの切断を用いるもので ([12], または，[9] に収録の，その日本語訳を参照)，もう一つは，以下で述べる，カントルによる，コーシー列を用い

るものである．

次の第 B.3 節で導入されることになる用語を用いると，デテキントの実数の構成が，$\mathbb{Q}$ の線形順序の完備化であるのに対し，カントルの実数の構成は，距離から導入される位相の完備化である．

$\mathbb{R}_0$ をデテキントの構成法で導入された実数体として，$\mathbb{R}_1$ をカントルの構成法で導入した実数体とすると，$\mathbb{R}_0$ と $\mathbb{R}_1$ は，$\mathbb{Q}$ 上で同型になる (系 B.55)．したがって，どちらの方法で実数体を導入しても，実質的には，同じ実数体が導入されることになる．ここで，カントルの導入法の方を用いているのは，第 B.4 節での角度の概念の導入の見通しのよい記述を与えるために，次の節で，カントルの実数体の構成法の一般化を考察する必要があり，その説明の伏線にするためである．

$\mathbb{Q}$ の要素の列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，**コーシー列** (Cauchy series) である，とは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ を (十分に大きく) 取ると[*25]，すべての $n_0, n_1 \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し[*26]，$|\, q_{n_0} - q_{n_1} \,| < \frac{1}{m}$ となること，とする[*27]．コーシー列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，有理数の列であることを強調する必要があるときには，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，**有理数のコーシー列** (Cauchy sequence of rational numbers) である，と言うことにする[*28]．

有理数の列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，ある数 g **に収束する** (converges to g)，または，g が，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の**極限** (limit) である，とは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ を (十分に大きく) 取ると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

[*25] カッコに入れた「十分に大きく」は，論理的には冗長だが，意図している直観的な内容としては，そのようなものである，という種類の情報です．意図した内容が汲み取れる人にとっては，これは本当に冗長に感じられるかもしれないけれど，初めて読む人にとっては，主張の意味を正確に理解するための助けになるかもしれない，という種類の但書きになっています．以下では，“十分に大きく” はいちいち書かないことにしますが，この数を表わすために，大文字の N を選んでいるのは，この “十分に大きく” という気分の示唆のためです．

[*26] $N \in \mathbb{N}$ に対し，$\overline{N}$ で，集合 $\{1, ..., N\}$ を表わすのだったので，“$n_0, n_1 \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$” は，“$n_0\ n_1 \in \mathbb{N}$ かつ，$n_0, n_1 > N$” ということです．これは，複文に対応する構文がうまく扱えないことのある日本語では，条件を 1 つの式にまとめることができて，便利な書き方になっていると思いますが，このような集合算を表に出した記法は，他では，用いられることが多くないかもしれません．

[*27] ここでの，絶対値の演算，$|\cdot|$ は，$\mathbb{Q}$ 上の，四則演算と共存する ((B-67) で定義された) 線形順序 $<$ により，(2.61) で定義されるものです．

[*28] コーシー列という名称は，ここでのような数列の収束の厳密な定義等を導入して，解析学の厳密化に貢献した，フランスの数学者／物理学者コーシー (Augustin-Louis Cauchy, 1789(寛政元年)〜1857(安政 4 年)) にちなみます．

$|\,q_n - g\,| < \frac{1}{m}$ となることである．有理数の列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，g に収束するとき，このことを，$g = \lim_{n\to\infty} q_n$ と表わすことにする．実際，ある有理数の列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，ある $g \in \mathbb{Q}$ に収束するとき，この g は，一意に定まる:

P-B-8 **補題 B.22** $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を有理数の列として，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，$q = \lim_{n\to\infty} q_n$ となっている，とする．このとき，任意の $q' \in \mathbb{Q} \setminus \{q\}$ に対し，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，q' に収束しない．

証明． $q' \in \mathbb{Q} \setminus \{q\}$ で，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，q' にも収束すると仮定して，矛盾を示す．$m \in \mathbb{N}$ を，

x-B-25 (B-68) $\frac{2}{m} < |\,q - q'\,|$

となるようなものとする．$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，q に収束するから，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\,q - q_n\,| < \frac{1}{m}$ となるものがある．同様に，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，q' にも収束するから，$N' \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\,q' - q_n\,| < \frac{1}{m}$ となるものがある．

$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{\max\{N, N'\}}$ とすると，

x-B-26 (B-69) $|\,q - q'\,| = |\,(q - q_n) - (q' - q_n)\,| \leq |\,q - q_n\,| + |\,q' - q_n\,| < \frac{2}{m}$

となるが[*29]，これは (B-68) に矛盾である． □ (補題 B.22)

Ex-B-0 **例 + 演習問題 B.23** $q_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ を，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$q_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

として定義すると，数列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，コーシー列で，$0 = \lim_{n\to\infty} q_n$ である． □

任意の有理数の列 $\vec{q} = \langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，$\vec{q}$ が，ある有理数 q に収束するなら，$\vec{q}$ は，コーシー列である [*30]．この意味で，コーシー列は，“ある数に収束すべき列” である．しかし，$\mathbb{Q}$ では，収束先のないコーシー列が，(無限に) 存在する:

---

*29 ここでは，絶対値の基本性質，(2.63) と (2.64) が，用いられています．

*30 後で，$\mathbb{R}$ に対する同様の主張を，補題 B.34 として証明しますが，これと同じ証明が，$\mathbb{Q}$ の要素の列に対しても，有効です．

例 B.24 $n \in \mathbb{N}$ に対し，q_n を小数点以下 n 桁までの $\sqrt{2}$ の計算値とするとき [*31]，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，コーシー列である：任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$10^N > m$ となるような $N \in \mathbb{N}$ を取ると，すべての $n_0, n_1 \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_{n_1} - q_{n_0} \,| < \frac{1}{10^N} < \frac{1}{m}$ である．

Ex-B-1

しかし，有理数で，この数列がそれに収束するようなものは存在しない．もし，そのようなものが存在するとすると，$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ となってしまい，矛盾である [*32]． ❏

◆ ℝ での四則演算の Cauchy continuity を示す．(スミ see 補題 B.37)

$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が有理数のコーシー列のとき，これがある有理数に収束するか如何にかかわらず，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，

(B-70) $\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q$:⇔ $q' \in \mathbb{Q}$ で $q' < q$ となるものが存在して，ある $N \in \mathbb{N}$ を (十分に大きく) 取ると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n \leq q'$ となる； x-B-26-0

(B-71) $\lim_{n\to\infty} q_n >_{\mathcal{R}} q$:⇔ $q' \in \mathbb{Q}$ で $q' > q$ となるものが存在して，ある $N \in \mathbb{N}$ を (十分に大きく) 取ると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n \geq q'$ となる x-B-26-1

と書くことにする．“$\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q$” と “$\lim_{n\to\infty} q_n >_{\mathcal{R}} q$” は，それぞれ，“$q >_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q_n$”, “$q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q_n$” とも書くことにする．

有理数のコーシー列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の各々に対して，それが収束しているような数を導入して，その全体が，$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -(\cdot), \cdot, (\cdot)^{-1}, 0, 1 \rangle$ を拡張するような体となるようにし，これを $\mathbb{R}$ とする，というのが以下の実数体の構成のあらましであるが，そのことを，各コーシー列それ自身を，そのコーシー列の収束する数と見做すことで実現する．ただし，異なるコーシー列が同じ数に収束する可能性があるため，コーシー列の全体を，この可能性による同値関係で

[*31] $\sqrt{2}$ という数が “存在する” かどうかとは独立に，「$\sqrt{2}$ の小数以下 n 桁までの計算値」は，具体的に計算できる分数として，存在することに注意してください．因みに，例えば，1.4142135 は，$\frac{14142135}{10000000}$ という分数としても表現できるので，有理数です．より一般的には，すべての有限桁の小数は，有理数です．

[*32] ここでも，“$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ となってしまい，矛盾である” と書くと，まだ，これから，その存在の保証を確立しようとしている “$\sqrt{2}$” に対する主張のようになってしまい，循環が生じてしまっているようにも見えますが，この見かけの循環は，ここでの主張を，“2 乗すると 2 となるような数が $\mathbb{Q}$ に含まれることになってしまい，このことから，(たとえばユークリッドの証明により) 矛盾が導かれる” と読みなおすことで，解消することができます．

同一視する必要が出てくる．例えば，有理数に収束することが分っているコーシー列のうちでは，次のような例を，挙げることができる:

Ex-B-2 **例 B.25** $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n = 1 + \frac{1}{2n}$, $q'_n = 1 + \frac{1}{2n+1}$, $q''_n = 1 - \frac{1}{n}$ とする，このとき，$\vec{q} = \langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\vec{q}\,' = \langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\vec{q}\,'' = \langle q''_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ とすると，$\vec{q}, \vec{q}\,', \vec{q}\,''$ は互いに異なるが，$\vec{q}, \vec{q}\,', \vec{q}\,''$ は，　すべて 1 に収束する．❏

以上を踏まえて，

x-B-27 (B-72) $\mathcal{R} := \{\vec{q} : \vec{q} = \langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は有理数のコーシー列 $\}$

として，$\mathcal{R}$ 上の二項関係 $\sim_{\mathcal{R}}$ を，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle, \langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathcal{R}$ に対し，

x-B-28 (B-73) $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle \ \sim_{\mathcal{R}} \ \langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle \ :\Leftrightarrow$
すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ を (十分に大きく) 取ると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q'_n \,| < \frac{1}{m}$ となるものが存在する

として定義する．

P-B-9 **補題 B.26** $\sim_{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ 上の同値関係である．

証明． $\sim_{\mathcal{R}}$ が，反射律 (B-8) と対称律 (B-9) を満たすことは，$\sim_{\mathcal{R}}$ の定義から明らかである (対称律については，絶対値の定義 (2.61) から，$|\, q_n - q'_n \,| = |\, q'_n - q_n \,|$ となることに留意する)．

$\sim_{\mathcal{R}}$ が推移律 (B-3) を満たすことを示す．$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle q''_n : n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathcal{R}$ で，

x-B-29 (B-74) $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$; かつ，

x-B-30 (B-75) $\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q''_n : n \in \mathbb{N} \rangle$

とする．$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q''_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，示したいことである．

(B-74) と (B-75) により，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N', N'' \in \mathbb{N}$ で，

x-B-31 (B-76) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, q_n - q'_n \,| < \frac{1}{2m}$;

x-B-32 (B-77) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，$|\, q'_n - q''_n \,| < \frac{1}{2m}$

となるものが取れる[*33]．$N = \max\{N', N''\}$ とすると，(B-76) と (B-77) により，

♦ $\max\{\ldots\}$ の定義をどこかでする．

(B-78)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q'_n \,| < \frac{1}{2m}$ かつ $|\, q'_n - q''_n \,| < \frac{1}{2m}$ x-B-33

が成り立つ．したがって，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

(B-79)　$|\, q_n - q''_n \,| = |\, (q_n - q'_n) + (q'_n - q''_n) \,| \underbrace{<}_{(2.64)\text{ による}} |\, q_n - q'_n \,| + |\, q'_n - q''_n \,| \underbrace{\leq}_{(B\text{-}78)} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$ x-B-33-a

となる．このことから，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q''_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ である．　□ (補題 B.26)

次の補題は，有用である:

補題 B.27 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathcal{R}$ として，無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n = q'_n$ が成り立つなら，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ である． P-B-9-a

証明． $m \in \mathbb{N}$ に対し，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ がコーシー列であることから，N, $N' \in \mathbb{N}$ で，

(B-80)　すべての n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q_{n'} \,| < \frac{1}{2m}$; x-B-33-a-0

(B-81)　すべての n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, q'_n - q'_{n'} \,| < \frac{1}{2m}$ x-B-33-a-1

となるものが取れる．$N'' = \max\{N, N'\}$ とすると，仮定から $n^* \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ で，(B-82)： $q_{n^*} = q'_{n^*}$ となるものが取れる[*34]．任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し， x-B-33-a-2

♦ “従う” という（ugly な）表現の説明を最初に出てきたところでする．

*33 ここでのような，証明の細部を作るときには，ここで出てきた “$\frac{1}{2m}$” は，これより後の議論の都合で採用されているので，これが，例えば，なぜ $\frac{1}{2m}$ で十分で $\frac{1}{3m}$ でなくていいのか，あるいは，単に $\frac{1}{m}$ としたのではだめなのかは，証明の先を書き上げるまでは (あるいは証明の全体を頭の中で組み立ててみるまでは) 分らないことです．この証明の場合，少し先の，(B-79) を考えて，そこから戻って (B-76) と (B-77) の式を調節した結果，$\frac{1}{2m}$ が採用されています．したがって，そのような証明を読む側も，ここで出てきた $\frac{1}{2m}$ が，何で $\frac{1}{2m}$ なのか，という疑問はとりあえず置いておいて，先まで読んで全体を見てみることが必要になります．

*34 これは，$q_n = q'_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限個ある，という仮定と，$\overline{N''}$ が有限である，という事実から従います．

$$|\,q_n - q'_n\,| \underbrace{=}_{(\text{B-82})} |\,q_n - q_{n^*} + q'_{n^*} - q'_n\,| \le |\,q_{n^*} - q_n\,| + |\,q'_{n^*} - q'_n\,|$$

$$\underbrace{<}_{(\text{B-80}),\ (\text{B-81})\ \text{による}} \tfrac{1}{2m} + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{1}{m}$$

となる．m は任意だったから，このことから，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が従う．　□ (補題 B.27)

次も有用な技術的補題である．

P-B-9-0 **補題 B.28** $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$, $q \in \mathbb{Q}$ とする．

x-B-33-0 (1) (B-83): $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ なら，

(i) $\lim_{n\to\infty} q_n = q \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} q'_n = q$；

(ii) $\lim_{n\to\infty} q_n >_{\mathcal{R}} q \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} q'_n >_{\mathcal{R}} q$；

(iii) $\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} q'_n <_{\mathcal{R}} q$

が成り立つ[*35]．

x-B-33-0-0 (2) (B-84): $\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$ なら [*36]，

(α) $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ で，$\lim_{n\to\infty} q_n >_{\mathcal{R}} q$ となるものが存在するか，または，

(β) $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ で，$\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q$ となるものが存在する．

証明． (1),(i): “$\Rightarrow$” を示す．“$\Leftarrow$” は，前提条件 (B-83) の対称性から，同じ証明で示せる．

x-B-33-1 (B-85): $lim_{n\to\infty} q_n = q$ を仮定する．この仮定と，(B-83) により，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，N, $N' \in \mathbb{N}$ で，

x-B-33-2 (B-86) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\,q_n - q\,| < \frac{1}{2m}$,

x-B-33-3 (B-87) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\,q_n - q'_n\,| < \frac{1}{2m}$

[*35] 記号，"$>_{\mathcal{R}}$", “$<_{\mathcal{R}}$” については，(B-70), (B-71) を参照してください．(B-70), (B-71) の前後でも既に注意したように，ここでの段階では，“$\lim_{n\to\infty} q_n$” は，必ずしも，対応する対象を持つわけではない，ということに注意してください．

[*36] “$\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$” は，ここでは，“$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$” の否定，つまり，“$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，どの $\mathbb{Q}$ の元にも収束しない，または，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，0 と異なる $\mathbb{Q}$ の元に収束する”，という意味です．

となるものが取れる．

$N'' = \max\{N, N'\}$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，

$$|\, q'_n - q \,| = |\, q_n + q'_n - q_n - q \,| \underbrace{=}_{(2.41)\text{ と }(2.44)\text{ による}} |\, (q_n - q) + (q'_n - q_n) \,|$$

$$\underbrace{\leq}_{(2.64)\text{ による}} |\, q_n - q \,| + |\, q'_n - q_n \,| \underbrace{<}_{(\text{B-86}),(\text{B-87})\text{ による}} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

が成り立つ．したがって，$\lim_{n\to\infty} q'_n = q$ である．

(1),(ii): ここでも，前提条件の対称性から，“$\Rightarrow$” のみを示せば十分である．

(B-88)： $\lim_{n\to\infty} q_n >_{\mathcal{R}} q$ 　を仮定する．このとき，定義 (B-71) により， x-B-33-4
$q' \in \mathbb{Q}$, $q' > q$ で，十分に大きな $N \in \mathbb{N}$ に対し，

(B-89)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n \geq q'$ が成り立つ x-B-33-5

ようにできる．$m \in \mathbb{N}$ を，(B-90)： $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}(q' - q)$ 　となるように取ると， x-B-33-6
(B-83) により，$N' \in \mathbb{N}$ で，

(B-91)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, q_n - q'_n \,| < \frac{1}{m}$ x-B-33-7

となるようなものが取れる．

$N'' = \max\{N, N'\}$ として，(B-92)： $q'' = q' - \frac{1}{m}$ とする． x-B-33-7-a

(B-93)　$q'' = q' - \frac{1}{m} \underbrace{>}_{(\text{B-90})} q' - \frac{1}{2}(q' - q) = \frac{1}{2}q' + \frac{1}{2}q \underbrace{>}_{q' > q\text{ による}} \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q = q$ x-B-33-7-a-0

である．すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，

$$q'_n \underbrace{\geq}_{(2.67)\text{ による}} q_n - |\, q_n - q'_n \,| \underbrace{>}_{(\text{B-91})\text{ による}} q_n - \frac{1}{m} \underbrace{>}_{(\text{B-89})\text{ による}} q' - \frac{1}{m} \underbrace{=}_{(\text{B-92})} q'' \underbrace{>}_{(\text{B-93})} q$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} q'_n >_{\mathcal{R}} q$ である．

(1),(iii): (1),(ii) と同様に示せる．

(2): $\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$ とする．これは “$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$” の否定だから，

(B-94)　ある $m \in \mathbb{N}$ に対して，どんな $N \in \mathbb{N}$ に対しても，$n^* \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，
$|\, q_{n^*} \,| > \frac{1}{m}$ となるものが存在する x-B-33-8

ということである．

m を (B-94) でのようなものとして，$N \in \mathbb{N}$ を，

x-B-33-9 (B-95) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ なら，$|\, q_n - q_{n'} \,| < \frac{1}{2m}$

となるようなものとする．このような N が，取れることは，$\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle$ が，コーシー列であることからよい．(B-94) を，この N に適用すると，ある $n^* \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，$|\, q_{n^*} \,| > \frac{1}{m}$ となるものが存在する．$q_{n^*} > \frac{1}{m} > 0$ または，$q_{n^*} < -\frac{1}{m} < 0$ である．

x-B-33-10 (B-96)：$q_{n^*} > \frac{1}{m} > 0$　の場合には，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$q_n \underbrace{\geq}_{(2.67)} q_{n^*} - |\, q_n - q_{n^*} \,| \underbrace{>}_{(\text{B-95})} q_{n^*} - \frac{1}{2m} \underbrace{>}_{(\text{B-96})} \frac{1}{2m}$$

となるから，例えば，$q = \frac{1}{4m}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} q_n > q > 0$ である．

$q_{n^*} < -\frac{1}{m} < 0$ の場合には，同様に，$q < 0$ で $\lim_{n\to\infty} q_n < q$ となるものが取れることが，示せる．　□ (補題 B.28)

$\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle, \langle q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathcal{R}$ に対し，

x-B-34 (B-97) $\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle +_{\mathcal{R}} \langle q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle := \langle q_n + q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle$

x-B-35 (B-98) $\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle := \langle q_n \cdot q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle$

x-B-36 (B-99) $-_{\mathcal{R}} \langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle := \langle -q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle$

x-B-37 (B-100) $(\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle)_{\mathcal{R}}^{-1} := \langle q^*_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle$

ただし，$\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$ のときには，

$$q^*_n = \begin{cases} \frac{1}{q_n}, & q_n \neq 0 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とし，$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ のときには，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q^*_n = 0$ とする [*37]

として演算 $+_{\mathcal{R}}$，$\cdot_{\mathcal{R}}$，$-_{\mathcal{R}}(\cdot)$，$(\cdot)_{\mathcal{R}}^{-1}$ を定義する．

P-B-10 **補題 B.29** $\langle q_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle, \langle q'_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathcal{R}$ とするとき，以下が成り立つ:

---

*37 定義の最後の語句での選択は，脚注*23 で設定した，ダミーの値に合せるためです．

（1） $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$.

（2） $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$.

（3） $-_{\mathcal{R}}\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$.

（4） $(\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)^{-1}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$.

証明． (1): $\langle q''_n : n \in \mathbb{N}\rangle := \langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ とする．$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，コーシー列だから，$m \in \mathbb{N}$ に対し，N, $N' \in \mathbb{N}$ で，

(B-101) すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q_{n'} \,| \leq \frac{1}{2m}$; x-B-38

(B-102) すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, q'_n - q'_{n'} \,| \leq \frac{1}{2m}$; x-B-39

となるようなものが，取れる．$N'' = \max\{N, N'\}$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，

$$|\, q''_n - q''_{n'} \,| = |\, (q_n + q'_n) - (q_{n'} + q'_{n'}) \,| \underbrace{\leq}_{(2.66)} |\, q_n - q_{n'} \,| + |\, q'_n - q'_{n'} \,|$$

$$\underbrace{\leq}_{(\text{B-101}),\ (\text{B-102})\ \text{による}} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

が成り立つ[*38]．したがって，$\langle q''_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ である．

(2), (3) も同様に示せる．

(4): $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ として，$\langle q^*_n : n \in \mathbb{N}\rangle = (\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)^{-1}_{\mathcal{R}}$ とする．

$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ なら，(B-100) により，$(\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)^{-1}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$ は明らかである．

$\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$ とする．このとき，補題 B.28, (2) により，$N_0 \in \mathbb{N}$ を十分に大きく取ると，$q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ に対し，すべての $n \in \mathbb{N}\setminus\overline{N_0}$ で，(α) $q_n > q > 0$ または，(β) $q_n < q < 0$ が成り立つ．(α) が成り立つことを，仮定する（(β) が成り立つ場合にも，同様に証明できる）．

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，

[*38] N と N' を選んで，$N'' = \max\{N, N''\}$ を，取る，という論法は，これまでにも何回か用いられていますが，以下では，このような論法による議論の流れが明らかな場合には，議論の細部の記述を省略して，直接 N'' に対応する数をとっていることもあります． fn-B-1

x-B-39-0 (B-103) $\frac{1}{q^2 m^*} < \frac{1}{m}$

となるような，$m^* \in \mathbb{N}$ を，取る．$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，コーシー列だから，$N \in \mathbb{N} \setminus \overline{N_0}$ で，

x-B-40 (B-104) すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q_{n'} \,| < \frac{1}{m^*}$ となる，

ようなものが，取れる．

このとき，$n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$|\, q_n^* - q_{n'}^* \,| \underbrace{=}_{(\text{B-100})\ \text{による}} |\, \frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n'}} \,| = |\, \frac{q_{n'} - q_n}{q_n q_{n'}} \,| \underbrace{<}_{(\alpha)\ \text{と}\ (\text{B-104})\ \text{による}} \frac{1}{q^2}\frac{1}{m^*} \underbrace{<}_{(\text{B-103})\ \text{による}} \frac{1}{m}$$

が成り立つ．したがって，$(\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1} \in \mathcal{R}$ である． □ (補題 B.29)

P-B-11 **補題 B.30** 同値関係 $\sim_{\mathcal{R}}$ は，$+_{\mathcal{R}}$, $-_{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\cdot_{\mathcal{R}}$, $(\cdot)_{\mathcal{R}}^{-1}$ と両立する．

証明． $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle r'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ で，

x-B-41 (B-105) $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle r'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$

とする．このとき，

(a) $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle \ \sim_{\mathcal{R}}\ \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle r'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$,

(b) $-_{\mathcal{R}}\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \ \sim_{\mathcal{R}}\ -_{\mathcal{R}}\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$,

(c) $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle \ \sim_{\mathcal{R}}\ \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle r'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$,

(d) $(\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1} \ \sim_{\mathcal{R}}\ (\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1}$

となることが，示したいことである．以下で (a) と (d) を示す．他のものは，同様に示せる．

(a): (B-105) により，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

x-B-42 (B-106) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q'_n \,| < \frac{1}{2m}$,

x-B-43 (B-107) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, r_n - r'_n \,| < \frac{1}{2m}$

となるものが，取れる (脚注*38 を参照)．

$$\langle s_n : n \in \mathbb{N}\rangle := \langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle,$$
$$\langle s'_n : n \in \mathbb{N}\rangle := \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle +_{\mathcal{R}} \langle r'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$$

とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$\begin{aligned} |\, s_n - s'_n \,| &\underbrace{=}_{+_{\mathcal{R}}\ \text{の定義}} |\, (q_n + r_n) - (q'_n + r'_n) \,| \leq |\, q_n - q'_n \,| + |\, r_n - r'_n \,| \\ &\underbrace{<}_{\text{(B-106),(B-107)}} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

である．したがって，$\langle s_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle s'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ である．

(d): $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ で，

(B-108)　$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$　x-B-43-0

として，

(B-109)　$\langle s_n : n \in \mathbb{N}\rangle := (\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1},$　x-B-44

(B-110)　$\langle s'_n : n \in \mathbb{N}\rangle := (\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1}$　x-B-45

とする．$\langle s_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle s'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，示したいことである．

$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ なら，補題 B.28, (1) (i) により，$\lim_{n\to\infty} q'_n = 0$ でもあるので，$(\cdot)_{\mathcal{R}}^{-1}$ の定義 (B-100) により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$s_n = s'_n = 0$ となり，$\langle s_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle s'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は自明に成り立つ．

$\lim_{n\to\infty} q_n \neq 0$ とする．このときには，補題 B.28, (2) の (α) か，(β) かの，どちらかが成り立つ．以下では，(α) が成り立つと仮定する ((β) が成り立つ場合も同様に議論できる)．補題 B.28, (1), (ii) により，$\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ も，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ でと同じ $q > 0$ に対し，(α) を満たす．したがって，この q に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

(B-111)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n, q'_n > q > 0$　x-B-46

となるものが，取れる．

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，m^* を，(B-112)：$\frac{1}{q^2 m^*} < \frac{1}{m}$ となるように取ると，(B-108) により，$N' \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，(B-113)：　x-B-47 x-B-48 $|\,q'_n - q_n\,| < \frac{1}{m^*}$　となるものが，取れるが，　$N'' = \max\{N, N'\}$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，

$$|\,s_n - s'_n\,| \underbrace{=}_{\text{(B-109),(B-110),(B-111),(B-100) による}} \left|\,\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q'_n}\,\right| = \frac{|\,q'_n - q_n\,|}{|\,q_n q'_n\,|} \underbrace{<}_{\text{(B-111),(B-113) による}} \frac{1}{q^2 m^*} \underbrace{<}_{\text{(B-112) による}} \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\langle s_n \,:\, n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \langle s'_n \,:\, n \in \mathbb{N}\rangle$ である． □ (補題 B.30)

$\sim_{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ 上の同値関係だった (補題 B.26)．そこで，

x-B-49 (B-114) $\mathbb{R} := \mathcal{R}/ \sim_{\mathcal{R}}$

とする．補題 B.30 により，構造

$$\langle \mathcal{R}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, +_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, -_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, \cdot_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, (\cdot)^{-1}_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}}, [\,\vec{0}\,]_{\sim_{\mathcal{R}}}, [\,\vec{1}\,]_{\sim_{\mathcal{R}}}\rangle$$

を考えることができる．ただし，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，$\vec{q}$ で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $q_n = q$ としたときの数列 $\langle q_n \,:\, n \in \mathbb{N}\rangle$ を表わすことにする．特に，$\vec{0}$ は，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n = 0$ としたときの $\langle q_n \,:\, n \in \mathbb{N}\rangle$ のことで，$\vec{1}$ は，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n = 1$ としたときの $\langle q_n \,:\, n \in \mathbb{N}\rangle$ のことである．すべての $q \in \mathbb{Q}$ に対し，$\vec{q}$ はコーシー列であることに注意する．

ここで，

x-B-49-0 (B-115) $i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R};\quad q \mapsto [\,\vec{q}\,]_{\sim_{\mathcal{R}}}$

として，

x-B-50 (B-116) $\langle \mathbb{R},\, +,\, -,\, \cdot,\, (\cdot)^{-1},\, 0,\, 1\rangle$
$:= \langle \mathcal{R}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, +_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, -_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, \cdot_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}},\, (\cdot)^{-1}_{\mathcal{R}}/{\sim_{\mathcal{R}}}, [\,\vec{0}\,]_{\sim_{\mathcal{R}}}, [\,\vec{1}\,]_{\sim_{\mathcal{R}}}\rangle$

とする．この構造も $\mathbb{R}$ で表わすことにする．

以下で，直ぐに示すように，$i_{\mathbb{Q}}$ は，構造 $\mathbb{Q}$ の，構造 $\mathbb{R}$ への埋め込みになる．そこで，$i_{\mathbb{Q}}$ により，$\mathbb{Q}$ を，$\mathbb{R}$ の部分構造と同一視するとき，この $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R},\, +,\, -,\, \cdot,\, (\cdot)^{-1},\, 0,\, 1\rangle$ が，実数体の持つべき性質を，すべて満たすことを，以下で示す．

P-B-12 **補題 B.31** $i_{\mathbb{Q}}$ は，構造 $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q},\, +,\, -,\, \cdot,\, (\cdot)^{-1},\, 0,\, 1\rangle$ の，構造

$\mathbb{R} = \langle \mathbb{R},\, +,\, -,\, \cdot,\, (\cdot)^{-1},\, 0,\, 1\rangle$ への埋め込みである．

証明． $i_{\mathbb{Q}}$ が 1-1 であることは，$i_{\mathbb{Q}}$ と $\sim_{\mathcal{R}}$ の定義から，明らかある．

$i_{\mathbb{Q}}$ が，四則演算を保存することも，明らかである．例えば，$i_{\mathbb{Q}}$ が，加法を保存することは，$q, q' \in \mathbb{Q}$ として，$q'' = q + q'$ とすると，

$$i_{\mathbb{Q}}(q+q') = [\vec{q}\,'']_{\sim_{\mathcal{R}}} \underbrace{=}_{+_{\mathcal{R}}\text{ の定義 (B-97) による}} [\vec{q} +_{\mathcal{R}} \vec{q}\,']_{\sim_{\mathcal{R}}} \underbrace{=}_{\mathbb{R}\text{ での }+\text{ の定義 (B-116) による}} [\vec{q}]_{\sim_{\mathcal{R}}} +_{\mathcal{R}} [\vec{q}\,']_{\sim_{\mathcal{R}}}$$
$$\underbrace{=}_{i_{\mathbb{Q}}\text{ の定義 (B-115) による}} i_{\mathbb{Q}}(q) + i_{\mathbb{Q}}(q')$$

となることからよい． □ (補題 B.31)

補題 B.32 $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R},\, +,\, -,\, \cdot,\, (\cdot)^{-1},\, 0,\, 1\rangle$ は，体である． P-B-13

証明． $\mathcal{R}$ での各演算が，コーシー列の成分ごとの，$\mathbb{Q}$ での対応する演算で定義されていることから，明らかである．

例えば，$\mathbb{R}$ が，和と積の分配律 (2.49) を満たすことは，$r_1,\, r_2,\, r_3 \in \mathbb{R}$ を $r_1 = [\langle q_n^1 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r_2 = [\langle q_n^2 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r_3 = [\langle q_n^3 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ となるものとすると，

$$r_1(r_2+r_3) \underbrace{=}_{\mathbb{R}\text{ での演算の定義 (B-116) による}} [\langle q_n^1(q_n^2+q_n^3) : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$$
$$\underbrace{=}_{\mathbb{Q}\text{ での分配律 (補題 B-116) による}} [\langle q_n^1 q_n^2 + q_n^1 q_n^3 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \underbrace{=}_{\mathbb{R}\text{ での演算の定義 (B-116) による}} r_1 r_2 + r_1 r_3$$

となること，等により示せる．

$\mathbb{R}$ が，逆数の性質 (2.47) を満たすことを見るには，$r \in \mathbb{R}$ を $r = [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r \neq 0$ (つまり，$[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \neq [\vec{0}]_{\sim_{\mathcal{R}}}$) とすると，補題 B.28, (2) により，$N \in \mathbb{N}$ で，

(B-117) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n \neq 0$ となる x-B-50-0

ものが，取れるから，$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle := (\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle)_{\mathcal{R}}^{-1}$ とすると，$(\cdot)_{\mathcal{R}}^{-1}$ の定義 (B-100) により，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$r_n = (q_n)^{-1}$ となる．したがって，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ も，$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle \cdot_{\mathcal{R}} \langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$

も，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，n-成分は，1 となる，このことと，補題 B.27 から，$rr^{-1} = r^{-1}r = 1$ が，分かる．　□ (補題 B.32)

$r, r' \in \mathbb{R}$ で，$r = [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r' = [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ となるものに対し，

x-B-51 (B-118) $r < r'$ $:\Leftrightarrow$ $q \in \mathbb{Q}$ で，$\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q'_n$ となるものが存在する

とする．上の定義が well-defined であること (つまり，r と r' の代表元の選び方に依存しないこと) は，補題 B.28, (1),(ii), (iii) により，よい．

P-B-14 **補題 B.33** （1） (B-118) で定義した，$\mathbb{R}$ 上の二項関係 $<$ は，$\mathbb{R}$ 上の線形順序である．

（2） $<$ は，$\mathbb{Q}$ 上の $<$ を拡張する (つまり，$i_{\mathbb{Q}}$ は $<$ を保存する)．

（3） $<$ は，$\mathbb{R}$ の演算と共存する．つまり，(2.57) と (2.58) に対応する性質が成り立つ．

（4） $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ で，有限個を除くすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n \le q'_n$ が成り立つなら[*39]，$[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \le [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ である．

（5） $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle, \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ で，$[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ なら[*40]，有限個を除くすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n < q'_n$ である．

（6） $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ で，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q$ (または，$q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q_n$) なら，$[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < i_{\mathbb{Q}}(q)$ (または，$i_{\mathbb{Q}}(q) < [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$) である．

証明． (1): $<$ が，$\mathbb{R}$ 上の半順序となることは，容易に示せる (演習!)．

$<$ が，$\mathbb{R}$ 上の線形順序であることを示すために，$r = [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r' = [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \in \mathbb{R}$ で $r \ne r'$ となるものを，取る．

このとき，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \not\sim_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ だから，(B-73) により，ある $m \in \mathbb{N}$ で，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対し，

[*39] この条件は，ある $N \in \mathbb{N}$ に対し，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，$q_n \le q_{n'}$ が成り立つ，と言い換えることができることに注意します．

[*40] (4) と (5) での "$\le$" と "$<$" の違いは実質的です．例えば，例 B.25 を参照してください．

(B-119)　$n^* \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，$|\, q_{n^*} - q'_{n^*} \,| > \frac{1}{m}$ となるものが存在する　x-B-52

ようなものが，取れる．$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，コーシー列だから，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

(B-120)　$|\, q_n - q_{n'} \,|, |\, q'_n - q'_{n'} \,| < \frac{1}{3m}$　x-B-53

となるものがある．この N に対し，(B-119) の条件を満たす $n^* \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ を，取る．(B-119) により，$q_{n^*} > q'_{n^*}$ か，$q_{n^*} < q'_{n^*}$ の，どちらかが成り立つが，例えば，$q_{n^*} < q'_{n^*}$ とすると，(B-119) と (B-120) により，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

(B-121)　$q_n < q_{n^*} + \frac{1}{3m} < q'_{n^*} - \frac{1}{3m} < q'_n$　x-B-54

となるから，$q = \frac{q_{n^*} + q'_{n^*}}{2}$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n < q < q'_n$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q'_n\\ &(\underbrace{\Leftrightarrow}_{<\,\text{の定義 (B-118) による}} r = [\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q'_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} = r')\end{aligned}$$

である．同様に，$q_{n^*} > q'_{n^*}$ とすると，$r > r'$ が示せる．

(2): q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < q_2$ とする．このとき，$q_3 = \frac{q_1+q_2}{2}$ とすると，$q_1 < q_3 < q_2$ だから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q^1_n := q_1$, $q^2_n := q_2$ とすると，$\vec{q}_1 = \langle q^1_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\vec{q}_2 = \langle q^2_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ で，

$$\lim_{n\to\infty} q^1_n <_{\mathcal{R}} q_3 <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q^2_n$$

である．したがって，$<$ の定義 (B-118) により，

$$i_{\mathbb{Q}}(q_1) = [\vec{q}_1]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\vec{q}_2]_{\sim_{\mathcal{R}}} = i_{\mathbb{Q}}(q_2)$$

である．

(3): $\mathbb{R}$ 上の線形順序 $<$ が，(2.57), (2.58) を満たすことを示す．まず，(2.57) を示すために，$r_1 = [\langle q^1_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r_2 = [\langle q^2_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r_3 = [\langle q^3_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \in \mathbb{R}$ で，$r_1 < r_2$ とする．$r_1 + r_3 < r_2 + r_3$ が，示したいことである．

$q \in \mathbb{Q}$ を，$\lim_{n\to\infty} q_n^1 <_{\mathcal{R}} q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q_n^2$ となるものとすると，q', $q'' \in \mathbb{Q}$, $q' < q < q''$ と，$N \in \mathbb{N}$ で，

x-B-54-0 (B-122) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し $q_n^1 < q' < q'' < q_n^2$ となる

ようなものが，取れる．$d := q'' - q'$ とする．

$m \in \mathbb{N}$ を，$\frac{1}{m} < \frac{d}{3}$ となるように取る．$\langle q_n^3 : n \in \mathbb{N}\rangle$ はコーシー列だから，$N' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，

x-B-55 (B-123) すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, q_n^3 - q_{n'}^3 \,| < \frac{1}{m}$ となる

ようなものが，取れる．

$r = q_{N+1}^3$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，

$$q_n^1 + q_n^3 < q_n^1 + r + \tfrac{1}{m} < q' + r + \tfrac{1}{m} < q'' + r - \tfrac{1}{m} < q_n^2 + r - \tfrac{1}{m} < q_n^2 + q_n^3$$

となる．したがって，$r_1 + r_3 < r_2 + r_3$ である．

$<$ が，(2.58) を満たすことを示すために，$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = [\langle q_n^1 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$, $r_2 = [\langle q_n^2 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ を，$[\vec{0}]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q_n^1 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}, [\langle q_n^2 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ となるものとする．

このとき，$<$ の定義 (B-118) により，$q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q < q_n^1, q_n^2$ となるものが，取れる．すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$0 < q \cdot q < q_n^1 \cdot q_n^2$ だから，

$$[\vec{0}]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q_n^1 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \cdot [\langle q_n^2 : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$$

つまり，$0 < r_1 \cdot r_2$ である．

(4): $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ を，ある $N \in \mathbb{N}$ に対し，

x-B-55-0 (B-124) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n \le q'_n$ が成り立つ

ようなものとする．もし，$[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \le [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ でなければ，(1) により，$[\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ だが，これは，ある $q \in \mathbb{Q}$ に対し $\lim_{n\to\infty} q'_n < q < \lim_{n\to\infty} q_n$ となることだったから，(B-124) に矛盾である．

(5): $[\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < [\langle q'_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ なら，$\mathbb{R}$ での $<$ の定義 (B-118)

により，$\langle q_n : n\in\mathbb{N}\rangle <_{\mathcal{R}} q <_{\mathcal{R}} \langle q'_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ となる $q\in\mathbb{Q}$ が存在するから，$<_{\mathcal{R}}$ の定義 (B-70), (B-71) により，$N\in\mathbb{N}$ で，すべての $n\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，$q_n < q < q'_n$ となるものが，取れるので，よい．

(6): $\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q$ とすると，$<_{\mathcal{R}}$ の定義 (B-70) から，$q'\in\mathbb{Q}$ で，$q' < q$ で，十分に大きな，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対し，$q_n < q'$ となるようなものが，取れる．$q'' := \frac{q+q'}{2}$ として，$q''' := \frac{3}{4}q + \frac{1}{4}q'$ とすると，q' は，$\lim_{n\to\infty} q_n <_{\mathcal{R}} q''$ の例証となり，$\vec{q} := \langle q^*_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ (ただし，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対し，$q^*_n = q$ とする) として，q''' は，$q'' <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q^*_n = i_{\mathbb{Q}}(q)$ の例証になるから，$[\langle q_n : n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} < i_{\mathcal{Q}}(q)$ である．

$q <_{\mathcal{R}} \lim_{n\to\infty} q_n$ の場合にも，同様の議論で，$i_{\mathcal{Q}}(q) < [\langle q_n : n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ が結論できる． □ (補題 B.33)

補題 B.33, (3) により，実数の絶対値 $|\cdot| : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，上での $<$ に関して，(2.61) で定義すると，$|\cdot|$ は，(2.63), (2.64), (2.66), (2.67) etc. を満たす．

実数列 $\langle r_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ が，コーシー列である，ということを，有理数列のときと同様に定義する．つまり:

$\langle r_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ が，**実数のコーシー列** (Cauchy sequence of real numbers) であるとは，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対し，$r_n\in\mathbb{R}$ で，

(B-125) 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ が存在して，すべての $n, n'\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，$|\, r_n - r_{n'}\,| < \frac{1}{m}$ となる　x-B-57

こと，とする．

実数の列 $\langle r_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ が，**実数** $r\in\mathbb{R}$ **に，収束する** (converges to r) — 実数 r が，列 $\langle r_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ の**極限** (limit) であるともいう — とは，

(B-126) すべての $m\in\mathbb{N}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ で，すべての $n\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，$|\, r_n - r\,| < \frac{1}{m}$ となるようなものが，存在する　x-B-58

こと，とする．$\langle r_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ が，r に収束するとき，これを $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ と表わす．

次は，容易に示せる [*41]:

[*41] 補題 B.34 は，コーシー列が，“ある値に収束すべき列” であることを示しています．例 B.24 でのように，$\mathbb{Q}$ では，ある値に収束すべき列で，どの値にも収束しないものが出てくるの

P-B-14-0 **補題 B.34** (B-126) の意味で，ある実数に収束する実数の列は，すべてコーシー列である．

証明． $r_n, r \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ で，$\lim_{n\to\infty} r_n = r$ とする．このとき，任意の m に対し，$N \in \mathbb{N}$ を，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\,r_n - r\,| < \frac{1}{2m}$ となるものとすれば，すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
|\,r_n - r_{n'}\,| &= |\,(r_n - r) - (r_{n'} - r)\,| \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.33,(3) と (2.66) による}} |\,r_n - r\,| + |\,r_{n'} - r\,| \\
&< \tfrac{1}{2m} + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{1}{m}
\end{aligned}
$$

である． □ (補題 B.34)

$\mathbb{R}$ は，コーシー列に関して，**完備** (complete) である [*42]:

P-B-15 **定理 B.35** すべての，実数のコーシー列 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，実数 r で，$\lim_{n\to\infty} r_n = r$ となるものが，存在する．

この証明のために，まず，次の補題を証明する:

P-B-16 **補題 B.36** (1) 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対し，有理数 $q \in \mathbb{Q}$ で，$|\,r - q\,| < \frac{1}{m}$ となるものが存在する．

(2) $r, s \in \mathbb{R}, r < s$ なら，$m \in \mathbb{N}$ で，$r < r + \frac{1}{m} < s - \frac{1}{m} < s$ となるものが存在する．特に，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し，$0 \leq s$ で $s < \frac{1}{m}$ がすべての $m \in \mathbb{N}$ に対し成り立つなら，$s = 0$ である．

(3) $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ として，$r = [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_\mathcal{R}}$ とするとき，($\mathbb{R}$ で) $|\,r\,| = [\langle |\,q_n\,| : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_\mathcal{R}}$ が成り立つ．

(4) $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ として，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を $\mathbb{R}$ の要素の列と見るとき (つまり $\langle i_\mathbb{Q}(q_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ と同一視したとき)，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，$\mathbb{R}$ でのコーシー列で，$\lim_{n\to\infty} q_n = [\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_\mathcal{R}}$ である．ただし，

で，この意味で，$\mathbb{Q}$ は，“完備” でないのに対し，以下の定理 B.35 で見るように，$\mathbb{R}$ は完備である，というのが，ここで導入した数の体系としての $\mathbb{R}$ の，正当化となっています．

[*42] $\mathbb{R}$ が完備とは，次の定理の主張のように，すべての $\mathbb{R}$ のコーシー列が，ある実数に収束することです．完備性の，より一般的な定義と，それに関する議論については，次の節を参照してください．

$\lim_{n\to\infty} q_n$ は，($\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ と同一視しているところの) $\mathbb{R}$ でのコーシー列 $\langle i_{\mathbb{Q}}(q_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ の $\mathbb{R}$ での極限である．

特に，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} q_n = q$ のとき，$q_n, q \in \mathbb{R}$ と見たときに，$\mathbb{R}$ でも $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ が成り立つ．

(5)　$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{R}$ とするとき，$r \in \mathbb{R}$ として，($\mathbb{R}$ で) $r \leq q_n$ (または，$q_n \leq r$) が，有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除く，すべての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つなら，$r \leq \lim_{n\to\infty} q_n$ (または，$\lim_{n\to\infty} q_n \leq r$) が成り立つ ($\lim_{n\to\infty} q_n \in \mathbb{R}$ が存在することは，(4) により，よい)．

証明． (1): $r \in \mathbb{Q}$ なら，$q = r$ とすればよい．$r \notin \mathbb{Q}$ とする．

($\mathbb{R}$ で) $-\frac{1}{m} < 0 < \frac{1}{m}$ が成り立つ (補題 B.33, (2) による)．$<$ は $\mathbb{R}$ の四則演算と共存するから (補題 B.33, (3) による)，この不等式の各辺に r を足して，

$$(\text{B-127})\quad r - \tfrac{1}{m} < r < r + \tfrac{1}{m}$$ x-B-59

である．特に $r - \frac{1}{m} < r + \frac{1}{m}$ だから，$<$ の定義 (B-118) と補題 B.33, (6) により，$r - \frac{1}{m} < q < r + \frac{1}{m}$ となる $q \in \mathbb{Q}$ が存在する．この q に対し $|\,r - q\,| < \frac{1}{m}$ が成り立つ (演習．ヒント: $r < q$ と $q < r$ の場合に分けて示す)．

(2): $r < s$ なら，$<$ が $\mathbb{R}$ の四則演算と共存すること (補題 B.33, (3)) から，$0 < s - r$ となるので，$<$ の定義 (B-118) と補題 B.33, (6) により，$0 < q < s - r$ を満たす $q \in \mathbb{Q}$ が，取れる．($\mathbb{Q}$ で) $m \in \mathbb{N}$ を $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2}q$ となるようなものとすると，$0 < \frac{1}{m} < (s - r) - \frac{1}{m} < s - r$ となるから，各辺に r を足すと，(補題 B.33, (3) により) $r < r + \frac{1}{m} < s - \frac{1}{m} < s$ が得られる．

後半の主張については，$0 \leq s$ で，$s \leq \frac{1}{m}$ が，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し成り立つとする．このとき，もし $0 < s$ なら，上から，$0 < 0 + \frac{1}{m} < s$ となるものが存在してしまうが，$0 + \frac{1}{m} = \frac{1}{m}$ だから，これは仮定に矛盾である．したがって，$s = 0$ である．

(3): 補題 B.33, (1) により，$r < 0$ か，$r = 0$ か，$0 < r$ かの，どれかが成り立つ．$r = 0$ なら，$\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle \sim_{\mathcal{R}} \vec{0}$ だから，$\sim_{\mathcal{R}}$ の定義 (B-73) から，$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ である．したがって，$\lim_{n\to\infty} |\,q_n\,| = 0$ だから，$|\,r\,| = 0 = [\langle |\,q_n\,| : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ である．

$r > 0$ なら，絶対値の定義 (2.61) により，$|\,r\,| = r$ だが，$\mathbb{R}$ での $>$ の定義から，十分に大きな $N \in \mathbb{N}$ を取ると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n > 0$ となる．

したがって，補題 B.27 により，$[\langle|\, q_n\,| \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} = [\langle q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} = r$ となるので，$|\, r\,| = [\langle|\, q_n\,| \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ が成り立つ．

$r<0$ なら，絶対値の定義 (2.61) により，$|\, r\,| = -r$ だから，

$$|\, r\,| = -r \underbrace{=}_{\mathbb{R}\text{ での演算 }-(\cdot)\text{ の定義}} [\langle -q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \underbrace{=}_{\text{上と同様の議論}} [\langle|\, q_n\,| \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$$

である．

(4): $\langle i_{\mathbb{Q}}(q_n) \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle$ が，$\mathbb{R}$ でのコーシー列になることは，$i_{\mathbb{Q}}$ が，四則演算を保存する (補題 B.31 — したがって，絶対値も保存する) ことから，よい．

$r = [\langle q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ として，$r = \lim_{n\to\infty} i_{\mathbb{Q}}(q_n)$ を示す．

$m\in\mathbb{N}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ を，すべての $n, n'\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，$|\, q_n - q_{n'}\,| < \frac{1}{m}$ となるようなものとすると，すべての $n^*\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，

$$|\, i_{\mathbb{Q}}(q_{n^*}) - r\,| \underbrace{=}_{(3)\text{ による}} [\langle|\, q_{n^*} - q_n\,| \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.33,(4) と } n^*\text{ の選び方による}} \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} i_{\mathbb{Q}}(q_n) = r$ である．

(5): $r = q_n$ が無限個の $n\in\mathbb{N}$ に対して成り立つなら，$r\in\mathbb{Q}$ (つまり，$r\in i_{\mathbb{Q}}{''}\mathbb{Q}$) で，このとき，$r = i_{\mathbb{Q}}(q^*)$ とすると，$r = i_{\mathbb{Q}}(q^*) \underbrace{=}_{\text{補題 B.27 による}} [\langle q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ である．

$r = q_n$ の成り立つ $n\in\mathbb{N}$ が，有限個の場合には，(それらの有限個の q_n を置き換えて— 補題 B.27 を参照) 一般性を失なうことなく，

x-B-59-a　(B-128)　$r < q_n$ が，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して，成り立つ

としてよい．もし $r \not< \lim_{n\to\infty} q_n$ だったとすると，補題 B.33, (1) と上の (4) により，$[\langle q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} = \lim_{n\to\infty} q_n < r$ となる．したがって，$\mathbb{R}$ での $<$ の定義 (B-118) から，$q\in\mathbb{Q}$ で，

x-B-59-a-0　(B-129)　$\langle q_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle <_{\mathcal{R}} q <_{\mathcal{R}} \langle q^*_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle$

となるものが，取れる．ただし，$\langle q^*_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle$ は，$\langle q^*_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle\in\mathcal{R}$ で，$[\langle q^*_n \,:\, n\in\mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}} = r$ となるものとする．したがって，十分に大きな $N\in\mathbb{N}$ を，取ると，

(B-130) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$q_n < q < q_n^*$ が成り立つ． x-B-59-a-1

しかし，q_n^* の定義から，これは (B-128) に矛盾である． □ (補題 B.36)

定理 B.35 の証明． $\langle r_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を実数のコーシー列とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n \in \mathbb{Q}$ を，(B-131)： $|\, r_n - q_n \,| < \frac{1}{n}$ となるように取る．このようなものが，取れることは，補題 B.36, (1) により，よい． ♦ 検読ここから 21.01.16(土 18:05(JST)) x-B-59-b

♦ Claim という用語について説明する．

Claim B.35.1 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，有理数のコーシー列である． Cl-B-16-0

⊢ $m \in \mathbb{N}$ とする．$\langle r_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，コーシー列だから，$N \in \mathbb{N}$ で，

(B-132) すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, r_n - r_{n'} \,| < \frac{1}{3m}$ となる x-B-60

ものが，取れる．(B-133)： $N' = \max\{N, 3m\}$ とすると，すべての n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し， x-B-61

$$
\begin{aligned}
|\, q_n - q_{n'} \,| &= |\, (q_n - r_n) + (r_n - q_{n'}) \,| \underbrace{\le}_{(2.64)\text{ による}} |\, r_n - q_n \,| + |\, r_n - q_{n'} \,| \\
&= |\, r_n - q_n \,| + |\, r_n - r_{n'} + r_{n'} - q_{n'} \,| \\
&\underbrace{\le}_{(2.64)\text{ による}} |\, r_n - q_n \,| + |\, r_n - r_{n'} \,| + |\, r_{n'} - q_{n'} \,| \underbrace{<}_{(B\text{-}131),(B\text{-}132),(B\text{-}133)\text{ による}} \frac{1}{3m} + \overbrace{\frac{1}{3m}}^{>\frac{1}{3n}} + \frac{1}{3m} = \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

である．m は任意だったから，このことから，$\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ がコーシー列であることが，従う． ⊣ (Claim B.35.1)

上の Claim から，実数 (B-134)： $r := [\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle]_{\sim_{\mathcal{R}}}$ が，取れる．次の Claim により，証明が完了する： x-B-62

Claim B.35.2 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ である． Cl-B-16-1

⊢ $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ となることを，$\mathbb{R}$ での極限の定義 (B-126) に戻って示す．このために，$m \in \mathbb{N}$ とする．補題 B.36, (4) により，$r = \lim_{n\to\infty} q_n$ だから (ここでは，q_n と $i_{\mathbb{Q}}(q_n)$ を同一視していて，“$\lim_{n\to\infty} q_n$” は $\mathbb{R}$ の意味での極限です．ここで $\mathbb{R}$ での極限の記号を $\mathbb{Q}$ での極限の記号と区別しなくてよいことは，補題 B.36, (4) により保証されていることに，注意します．)，$N \in \mathbb{N}$ で，

x-B-63 (ℵB-3)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, r - q_n \,| < \frac{1}{3m}$ となる

ものが，取れる．

$\langle r_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，コーシー列だから，$N' \in \mathbb{N}$ で，

x-B-64 (ℵB-4)　すべての $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N'}$ に対し，$|\, r_n - r_{n'} \,| < \frac{1}{3m}$ となる

ものが，取れる．

$q_n, n \in \mathbb{N}$ のとり方 (B-131) から，

x-B-65 (ℵB-5)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{3m}$ に対し，$|\, r_n - q_n \,| < \frac{1}{3m}$

となる．

以上から，$N' = \max\{N, N', 3m\}$ として，$n^* = N'' + 1$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N''}$ に対し，

$$|\, r_n - r \,| = |\, r_n - r_{n^*} + r_{n^*} - q_{n^*} + q_{n^*} - r \,| \underbrace{\leq}_{(2.64)\text{ による}} |\, r_n - r_{n^*} \,| + |\, r_{n^*} - q_{n^*} \,| + |\, q_{n^*} - r \,| \underbrace{<}_{(\aleph\text{B-4}), (\aleph\text{B-5}), (\aleph\text{B-3})\text{ による}} \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} = \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} r_n = r$ である．　⊣ (Claim B.35.2)

□ (定理 B.35)

次の補題は，以下の第 B.3 節で必要になる．

P-B-17 **補題 B.37** $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を，実数のコーシー列とする．このとき，

x-B-66 (1)　(B-135)：無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_n \leq y_n$ が成り立つなら，$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$ である．

(2)　$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\langle x_n + y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle x_n \cdot y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ も，$\langle \alpha \cdot y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ も，実数のコーシー列で，

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)$;

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(\alpha\, y_n) = \alpha(\lim_{n\to\infty} y_n)$

が成り立つ．

証明． (1): 定理 B.35 により，(B-136)：　$r := \lim_{n\to\infty} x_n$, および，　x-B-67
(B-137)：　$s := \lim_{n\to\infty} y_n$　は存在する．　x-B-68

$r \leq s$ でないとして矛盾を示す．このときには，補題 B.33, (1) により，$r > s$ である．したがって，補題 B.36, (2) により，$m \in \mathbb{N}$ で，

(B-138)　$r > r - \frac{1}{m} > s + \frac{1}{m} > s$　x-B-68-0

となるものが存在する．(B-136), (B-137) により，$N \in \mathbb{N}$ で，

(B-139)　すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, r - x_n \,| < \frac{1}{m}$, $|\, s - y_n \,| < \frac{1}{m}$　x-B-69

となるものが存在する．したがって，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，
$x_n \underbrace{>}_{(\text{B-138}) \text{ による}} r - \frac{1}{m} > s + \frac{1}{m} > y_n$ となる．しかし，仮定 (B-135) から，$n_0 \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，$x_{n_0} \leq y_{n_0}$ となるものが存在するから，これは，矛盾である．

(2) (a): 極限の定義と，補題 B.34 により，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n - (x_k + y_k) \,| < \frac{1}{m}$ となるものの存在が，示せればよい．

$N \in \mathbb{N}$ を，すべての $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, (\lim_{n\to\infty} x_n) - x_k \,| < \frac{1}{2m}$, かつ，$|\, (\lim_{n\to\infty} y_n) - y_k \,| < \frac{1}{2m}$ となるものとすると，

$$|\, \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n - (x_k + y_k) \,| \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.33,(3) と (2.64) による}} |\, \lim_{n\to\infty} x_n - x_k \,| + |\, \lim_{n\to\infty} y_n - y_k \,| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

である．

(b): (a) と同様に証明できる (ただし，N の選び方は，多少，厄介なものになる)．

$m \in \mathbb{N}$ を，任意に取る．

N_0 を，すべての $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{N_0}$ に対し，

(ℵB-6)　$|\, \lim_{n\to\infty} y_n - y_k \,| < |\, \lim_{n\to\infty} y_n \,| + 1$　x-B-69-a

となるように取る．

$m_1 \in \mathbb{N}$ を，

x-B-69-1 $$(\aleph\text{B-7})\quad \max\left\{ |\lim_{n\to\infty} x_n|, |\lim_{n\to\infty} y_n| + 1 \right\} \cdot \frac{1}{m_1} < \frac{1}{2m}$$

となるようにとり，$N_1 \in \mathbb{N}$ を，すべての $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{N_1}$ に対し，

x-B-69-2 $$(\aleph\text{B-8})\quad |\lim_{n\to\infty} x_n - x_k|, |\lim_{n\to\infty} y_n - y_k| < \frac{1}{m_1}$$

となるように取る．

$N = \max\{N_0, N_1\}$ とするとき，すべての $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&|\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n - x_k \cdot y_k| = |\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \\
&\qquad - (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot y_k + (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot y_k - x_k \cdot y_k| \\
&\underbrace{\leq}_{\text{補題 B.33,(3) と (2.64)}} |\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n - (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot y_k| \\
&\qquad + |(\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot y_k - x_k \cdot y_k| \\
&\underbrace{=}_{\text{補題 B.33,(3) と (2.63)}} \underbrace{|\lim_{n\to\infty} x_n| \cdot \underbrace{|\lim_{n\to\infty} y_n - y_k|}_{< \frac{1}{m_1},\ (\aleph\text{B-8}) \text{ による}}}_{< \frac{1}{2m};\ (\aleph\text{B-7}) \text{ による}} + \underbrace{\underbrace{|\lim_{n\to\infty} x_n - x_k|}_{< \frac{1}{m_1},\ (\aleph\text{B-8}) \text{ による}} \cdot |y_k|}_{< \frac{1}{2m};\ (\aleph\text{B-6}), (\aleph\text{B-7}) \text{ による}} \\
&< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

である．

(c): は (b) の特別な場合 (すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_n = \alpha$ となる場合) と考えることができる．　□ (補題 B.37)

上で導入した $\mathbb{R}$ 上に，中学校や高校では，直観的な説明のみで導入されていた，$\mathbb{R}$ に関連する初等的な数学が，厳密に再構築できることになる．ここでは，そのようなもののうち，以下で必要となる，平方根の扱いについて，見てみることにする．

x-B-88-0 $$(\text{B-140})\quad \mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$$

とする．$\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{<0}$ も同様に定義する．

P-B-23-0 **定理 B.38** (1)　すべての $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，$s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ で，$s^2 = r$ とな

るものが存在する．つまり，すべての $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，$\sqrt{r}$ が存在する．

（2） 関数

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0};\ \ r\ \mapsto\ \sqrt{r}$$

は，関数

$$g\ \left(= (\cdot)^2 \restriction \mathbb{R}_{\geq 0}\right) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0};\ \ r\ \mapsto\ r^2$$

の逆関数で，g は (したがって，$\sqrt{\cdot}$ も)，$\langle \mathbb{R}_{\geq 0}, < \rangle$ から $\langle \mathbb{R}_{\geq 0}, < \rangle$ 自身への同型写像である [*43]．特に，このことから，g も，$\sqrt{\cdot}$ も，真の増加関数である [*44]．

証明． (1): $k_0 \in \mathbb{N}^*$ を，

(B-141)　$(k_0)^2 \leq r < (k_0 + 1)^2$ となるものとする． x-B-88-1

このような k_0 が，存在して，一意に決まることは，$\mathbb{N}^*$ が $\mathbb{R}$ で共終であること (つまり，すべての実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し，$r < n$ となる $n \in \mathbb{N}^*$ が存在すること) [*45]，$n \leq n^2$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つこと，および，任意の，自然数の集合が，$\mathbb{N}$ 上の (標準的な) 線形順序 $<$ に関する最小元を持つこと，から言える．

♦ 自然数の集合は最小元を持つこと，この事実が帰納法の原理と同値になること，を最小元を定義したところで注意する．

次に，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$k_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ を，

(B-142)　$\left(\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell} k_\ell\right)^2 \leq r < \left(\left(\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell} k_\ell\right) + 10^{-n}\right)^2$ x-B-88-2

となるように帰納的に取る．各 k_ℓ が一意に決まることも，上と同様に言える．

数列

$$\vec{s}_0 := \langle \textstyle\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell} k_\ell\ :\ n \in \mathbb{N} \rangle,$$

[*43] 構造 $\mathfrak{A}$ から，$\mathfrak{A}$ 自身への同型写像は，**自己同型写像** (automorphism) と呼ばれます．

[*44] 線形順序 $\langle X, <_X \rangle, Y, <_Y$ に対して，$f : X \to Y$ が，**増加関数** (increasing function) である，とは，任意の $a, b \in X$ に対し，$a <_X b$ なら，$f(a) \leq_Y f(b)$ (つまり，$f(a) <_Y f(b)$ または，$f(a) = f(b)$) が，成り立つことです．f が，**真の増加関数** (strictly increasing function) である，とは，f は増加関数で単射であること，(つまり，任意の $a, b \in X$ に対し，$a <_X b$ なら，$f(a) <_Y f(b)$ が成り立つこと) です．

[*45] 実数のこの性質は，$\mathbb{R}$ は，**アルキメデスの性質** (Archimedean property) を持つ，と表現されることもあります．

♦ アルキメデスを人名表に加える！

$$\vec{s}_1 := \langle\left(\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell\right) + 10^{-n} \ : \ n \in \mathbb{N}\rangle$$

は $\mathbb{Q}$ のコーシー列となる．したがって，$s_0 = \lim_{n\to\infty}(\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell)$, $s_1 = \lim_{n\to\infty}((\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell) + 10^{-n})$ となる s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$ が，取れるが，$\vec{s}_0 \sim_{\mathcal{R}} \vec{s}_1$ により，$0 \le s_0 = s_1$ である．

一方，

$$(s_0)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}(\textstyle\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell)\right)^2 \underbrace{=}_{\text{補題 B.37,(2)}} \lim_{n\to\infty}(\textstyle\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell)^2$$

$$\underbrace{\le r \le}_{\text{(B-142) と補題 B.37, (1) による}} \lim_{n\to\infty}((\textstyle\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell) + 10^{-n})^2$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 B.37,(2)}} \left(\lim_{n\to\infty}((\textstyle\sum_{\ell=0}^{n} 10^{-\ell}k_\ell) + 10^{-n})\right)^2 = (s_1)^2$$

だから，$(s_0)^2 = r$ である．

(2): $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $0 \le r_1 < r_2$ とすると，$d = r_2 - r_1$ として，$d > 0$ だから，

x-B-88-3 (B-143) $$g(r_1) = (r_1)^2 < (r_1)^2 + 2(r_1)d + d^2 = (r_1 + d)^2 = (r_2)^2 = g(r_2)$$

である．したがって，g は，真に増加である．

$0 \le r_1 \not< r_2$ なら，$<$ が，線形順序であることから，$r_2 \le r_1$ だから，(B-143) により，$g(r_2) \le g(r_1)$ となり，したがって，$g(r_1) \not< g(r_2)$ である．したがって，g は，$<$ を保存する（つまり，$<$ に対して，(B-29) に対応する性質が成り立つ）．

特に，このことから，g は，単射だが，(1) により，g が上射であることも，分るので，$g : \langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle \xrightarrow{\cong} \langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle$ である（つまり，g は $\langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle$ から $\langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle$ 自身への自己同型写像である）．

$\sqrt{\cdot}$ の定義[*46]と，g が，全単射であることから，$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ は，well-defined で，g の逆関数である．したがって，$\sqrt{\cdot} : \langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle \xrightarrow{\cong} \langle\mathbb{R}_{\ge 0}, <\rangle$ である．　□ (定理 B.38)

$\mathbb{R}$ の完備性 (定理 B.35) は，微分積分学[*47] では，次の定理の形で，用いら

[*46] 既に，(1) の主張の記述の中で，隠伏的に書いたように，実数 $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ に対し，$\sqrt{r}$ は，$s^2 = r$ となる負でない実数 s（つまり $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$）です．

[*47] 大学の初学年に習う「微分積分」は，英語では “calculus” と呼ばれます．「微分積分学」は，

れることが多い．

実数の列 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，**上昇列** (increasing sequence) であるとは，すべての $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2$ に対し，$r_{n_1} \leq r_{n_2}$ が，成り立つことである．$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，**下降列** (decreasing sequence) であるとは，すべての n_1, $n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2$ に対し，$r_{n_1} \geq r_{n_2}$ が，成り立つことである．

実数の列 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，**上に有界** (bounded from above) であるとは，ある実数 $r^* \in \mathbb{R}$ で，$r_n < r^*$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つようなものが，存在することである．このような r^* は，$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の**上界** (upper bound) (の 1 つ) とよばれる．

実数の列 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，**下に有界** (bounded from below) であるとは，ある実数 $r^* \in \mathbb{R}$ で，$r_n > r^*$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つようなものが，存在することである．ここでのような r^* は，$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の**下界** (lower bound) (の 1 つ) とよばれる．

定理 B.39 （1） すべての，上に有界な実数の上昇列 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，極限 $\lim_{n\to\infty} r_n$ を持つ． P-B-23-0-0

（2） すべての，下に有界な実数の下列降 $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，極限 $\lim_{n\to\infty} r_n$ を持つ．

証明． (1) を示す．(2) は全く同様に示せる．

$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を実数の上昇列として，r^* を，その上界 (の 1 つ) とする．定理 B.35 により，$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，コーシー列であることが示せれば，十分である．背理法で議論する: $\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，コーシー列でなかったとして，矛盾を示す．

$\langle r_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，コーシー列でなければ， $m^* \in \mathbb{N}$ で，

(B-144) すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して，$n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ で，$|r_{n_1} - r_{n_2}| \geq \frac{1}{m^*}$ となるものが存在する x-B-88-3-0

多分，この calculus に対応する日本語として導入されたものと思われますが，これに対して，ドイツ語の „Analysis“ や，フランス語の «analyse» に対応する，「解析学」という用語が，使われることもあります．「解析学」の範囲は，通常「微分積分」より広く，複素関数に関する理論や，本書の第 III 巻で見ることになる，関数解析の理論なども含むものと理解されることもあります．

◆ 第 III 巻で量子力学との関連で関数解析に触れる．

ようなものが，取れる [*48]．$k^* \in \mathbb{N}$ を，

x-B-88-3-1 (B-145) $r_1 + k^* \frac{1}{m^*} > r^*$

となるように取る．

自然数の上昇列 $i_1 < i_2 < \cdots i_{k^*} < i_{k^*+1}$ を，

x-B-88-3-2 (B-146) $i_1 = 1$;

x-B-88-3-3 (B-147) $j \in \overline{k^*}$ に対し，$i_j < \ell < i_{j+1}$ で，$|\, r_\ell - r_{i_{j+1}} \,| \geq \frac{1}{m^*}$ となるものが存在する

となるように取る．(B-147) を満たすような i_{j+1} が，常に取れることは，(B-144) により，よい．$\langle r_n \,:\, n \in \mathbb{N} \rangle$ が，上昇列であることと，(B-147) から，すべての $j \in \overline{k^* + 1}$ に対し，$r_{n_j} \geq r_1 + \frac{j-1}{m^*}$ となることが，分るが，このことと，(B-145) から，$r_{n_{k^*+1}} > r^*$ となってしまう．これは，r^* の選び方に矛盾である．　□ (定理 B.39)

♦ Scan_2020-12-26–0.05-B - X.pdf

集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が，**上に有界**である (bounded from above) とは，ある $r \in \mathbb{R}$ で，$X \cap (r, \infty) = \emptyset$ となるものが存在することとする．これは，ある $r \in \mathbb{R}$ で，すべての $s \in X$ に対し，$s \leq r$ となるものが存在することである．このような r のことを，X の**上界** (upper bound) (の 1 つ) という．$r \in \mathbb{R}$ が，X の上界で，$r \leq r'$ なら，r' も，X の上界だから，X の上界は，存在すれば (つまり X が上に有界なら)，無限に存在する．X の上界のうち最小のものが存在するとき，これを X の**上限** (supremum) とよび，$\sup(X)$ で表わす．r_0 が X の上限であるとは，

x-B-88-3-4 (B-148) r_0 は X の上界で，すべての X の上界 r に対し $r_0 \leq r$ が成り立つ

ことである．実際 X の上限は存在すれば一意に存在する: r と r' を X の上限とすると，(B-148) により，$r \leq r$ で，$r' \leq r$ だから，$r = r'$ である．

X が最大元 M を持てば，$M = \sup(X)$ で，このときには $\sup(X) \in X$ となるが，たとえば $X = (-\infty, 1)$ とすれば，$\sup(X) = 1$ だが，$1 \notin X$ である．

同様に，$X \subseteq \mathbb{R}$ が**下に有界** (bounded from below) とは，ある $r \in \mathbb{R}$ で，

[*48] この主張は，$\langle r_n \,:\, n \in \mathbb{N} \rangle$ が，コーシー列であることを定義する性質の，論理的な否定です．

$X \cap (-\infty, r) = \emptyset$ となるものが存在することとする．このような r を，X の**下界** (lower bound) (の１つ) とよぶ．X の下界のうち最大のものが存在するとき，それを，X の**下限** (infimum) とよぶ．上限のときと同様に，下限は，存在すれば一意である．X の下限が存在するとき，それを，$\inf(X)$ で表わす．X の最小元 m が存在すれば，$m = \inf(X)$ で，$\inf(X) \in X$ となる．しかし，$\inf(X) \notin X$ の場合もありえる．

補題 B.40　(１)　$X \subseteq \mathbb{R}$ が上に有界なら，$\sup(X)$ が，存在する． P-B-23-0-1

(２)　$X \subseteq \mathbb{R}$ が下に有界なら，$\inf(X)$ が，存在する．

証明． (1) を示す．(2) は同様に示せる．$X \subseteq \mathbb{R}$ を上に有界とする．$r \in \mathbb{R}$ を X の上界 (の１つ) として，X の上界の下降列 $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots$ を以下のように構成する．

$r_1 := r$ とする．

$k \in \mathbb{N}$ に対して r_k が既に定まったとき，

$$r_{k+1} := \begin{cases} r_k, & r_k \text{ が } X \text{ の上限のとき;} \\ r_k - \frac{1}{n_k}, & n_k \in \mathbb{N} \text{ が, } {}_k - \frac{1}{n_k} \text{ が } X \text{ の上界となる最小の} \\ & \text{自然数のとき} \end{cases}$$

とする．このとき，定理 B.39, (2) により，数列 $\langle r_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ は，ある実数に収束する．$r := \lim_{k\to\infty} r_k$ とすると，この r は X の上限となる (演習!)．

□ (補題 B.40)

B.3　距離空間と完備化

集合 X に対し，$d : X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が X 上の**距離** (distance, または，metric) であるとは，d が，すべての x, y, $z \in X$ に対し， completion

(B-149)　$d(x, y) = d(y, x)$; x-B-71

(B-150)　$d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$; x-B-72

(B-151)　(三角不等式)　$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ x-B-73

を満たすことである．(B-149)〜(B-151) は，**距離の公理** (metric axioms) と

よばれる．$d : X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が，距離の公理を満たすとき，$\langle X, d\rangle$ は，**距離空間** (metric space) であるという．

Ex-B-3 **例 B.41** $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \langle x, y\rangle \mapsto |\, y - x\,|$ とすると[*49]，$\langle \mathbb{R}, d\rangle$ は距離空間である．

証明． すべての $x,\ y \in \mathbb{R}$ に対し，$d(x, y) \geq 0$ となることは，上の d の定義と，(2.62) により，よい．

(i)　d は，(B-149) を満たす:　脚注*49 により，よい．

(ii)　d は，(B-150) を満たす: $d(x, y) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{d\text{ の定義}} |\, y - x\,| = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2.55)\text{ と，} |\cdot|\text{ の定義 }(2.61)} x = y$

により，よい．

(iii)　d は，(B-151) を満たす: $d(x, y) \underbrace{=}_{d\text{ の定義}} |\, y - x\,| = |\,(y - z) - (x - z)\,|$

$\underbrace{\leq}_{(2.66)} |\, y - z\,| + |\, x - z\,| \underbrace{=}_{d\text{ の定義と，上の }(i)} d(x, z) + d(z, y)$ により，よい．

□ (例 B.41)

Ex-B-3-a **例 B.42** $n \in \mathbb{N}$ に対し，$: (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R} :\ \langle \mathbb{a}, \mathbb{b}\rangle \mapsto \|\,\mathbb{b} - \mathbb{a}\,\|$ とする (4.27) と，d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離である (補題 4.11 を参照)． □

Ex-B-3-0 **例 B.43** $\mathcal{R}_{rad} = \langle [\,0,\ 2\pi\,), +_{rad}, 0\rangle$ を，例 B.10 の (B-27) での構造とする．

$r,\ s \in [\,0,\ 2\pi\,)$ に対し，

x-B-88-4 (B-152)　$d_{rad}(r, s) := \min\{|\, r - s\,|,\ 2\pi - |\, r - s\,|\}$

とすると，d_{rad} は，$[\,0,\ 2\pi\,)$ 上の距離である．

証明． d_{rad} が，0 より大きいか等しい値を取ることと，(B-149), (B-150) を，満たすことは，定義 (B-152) から明らかだから，三角不等式，つまり，すべての $r,\ s,\ t \in [\,0,\ 2\pi\,)$ に対し，

---

distance-on-R *49 絶対値の定義と，演習問題 2.20, (2) と，(2.54) により，この距離の定義は，$|\, x - y\,|$ としても同じものになることに注意します．

(B-153)　$d_{rad}(r,s) \leq d_{rad}(r,t) + d_{rad}(t,s)$ x-B-88-5

が，成り立つことを，示せばよい．(必要なら，r と s を入れ換えることで) 一般性を失なうことなく，$0 \leq r < s < 2\pi$ としてよい．

$s - r < \pi$, かつ，$r \leq t \leq s$ なら，$t - r < \pi$, $s - t < \pi$ だから，

$$d_{rad}(r,s) = s - r = (t-r) + (s-t) = d_{rad}(r,t) + d_{rad}(t,s)$$

となり，不等式 (B-153) は成り立つ．

$s - r < \pi$, $r \leq s \leq t$ で，$t - r < \pi$ なら，

$$d_{rad}(r,s) = s - r < (t-r) + (s-t) = d_{rad}(r,t) + d_{rad}(t,s)$$

となり，この場合にも，不等式 (B-153) は，成り立つ．

$s - r < \pi$, $r \leq s \leq t$, $t - s < \pi$ で，$t - r \geq \pi$ なら，

$$\begin{aligned} &d_{rad}(r,s) = s - r < 2\pi - (s-r) = 2\pi - (t-r) + (t-s) \\ &= d_{rad}(r,t) + d_{rad}(t,s) \end{aligned}$$

となるので，この場合にも，不等式 (B-153) は成り立つ．

$s - r < \pi$, $r \leq s \leq t$ で，$t - s > \pi$ (したがって $t - r > \pi$) のときには，

$$\begin{aligned} &d_{rad}(r,s) = s - r = \overbrace{-2\pi + (t-r)}^{<0} + 2\pi - (t-s) \\ &< \underbrace{2\pi - (t-r)}_{>0} + 2\pi - (t-s) = d_{rad}(r,t) + d_{rad}(t,s) \end{aligned}$$

となるので，この場合にも，不等式 (B-153) は成り立つ．

他の場合にも，不等式 (B-153) が成り立つことは，同様に示せる (演習 !).

□ (例 B.43)

次は，距離の定義から，明らかである．

補題 B.44 d が，X 上の距離で，$Y \subseteq X$ なら，$d \restriction Y^2$ は，Y 上の距離である． P-B-18

□

距離空間 $X = \langle X, d\rangle$ と，$Y \subseteq X$ に対し，$d' = d \restriction Y^2$ として，$Y = \langle Y, d'\rangle$ と見るとき，Y を，X の**部分空間** (subspace) とよぶ．

Ex-B-4 **例 B.45** $d : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q};\ \langle q_1, q_2 \rangle \mapsto |\, q_2 - q_1 \,|$ とすると，$\langle \mathbb{Q}, d \rangle$ は，例 B.41 の $\langle \mathbb{R}, d \rangle$ の部分空間である． ❏

$\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を, 距離空間 $X = \langle X, d \rangle$ の点列とするとき [*50]，$\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，（X **の）コーシー列**であるとは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

x-B-74 (B-154) すべての $n,\, n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$d(x_n, x_{n'}) < \frac{1}{m}$ となる

ようなものが存在すること，とする．

定義から明らかなように，例 B.41, 例 B.45 での距離で，距離空間 $\mathbb{R}$, または，$\mathbb{Q}$ を，考えるとき，$\mathbb{R}$, または，$\mathbb{Q}$ での，第 B.2 節の意味でのコーシー列は，上の意味の，距離空間 $\mathbb{R}$, または， $\mathbb{Q}$ でのコーシー列と一致する．

$\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を，距離空間 $X = \langle X, d \rangle$ での点列とするとき，$x \in X$ が，この列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の**極限** (limit) である — $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が，x に，**収束する** (converge) ともいう — とは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

x-B-75 (B-155) すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$d(x_n, x) < \frac{1}{m}$ となる

ものが存在すること，とする．

ここでも，例 B.41, 例 B.45 での距離で，距離空間 $\mathbb{R}$, または，$\mathbb{Q}$ を考えるとき，それらの距離空間の要素の列 (X の点列) の極限の概念は，第 B.2 節の意味での列の極限の概念と，一致する．

距離空間 X の，ある要素に収束する点列が，コーシー列であることは，補題 B.34 と同様に証明できる (演習!)．

次は，補題 B.22 と同様に証明できる:

P-B-19 **補題 B.46** $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を，距離空間 X のコーシー列とするとき，$\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の極限は，高々 1 つしか存在しない．

証明． x と y が共に $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の極限とするとき，$x = y$ となることを示す．このためには，(B-150) により，$d(x, y) = 0$ であることが示せればよ

[*50] $X = \langle X, d \rangle$ という，厳密に取ると矛盾している記法は，365 ページで述べた，代数構造での，類似の記法と同様の意味で用いられています．距離空間の要素は，点と呼ばれることもあります．そのような言葉使いの文脈で，“X の点列” は，“X の要素の列” と，同じ意味です．

い．もし，そうでないとすると，$d(x,y) \geq 0$ と，(B-150) により，$d(x,y) > 0$ だから，$m \in \mathbb{N}$ で

(B-156)　$\frac{1}{m} < d(x,y)$　x-B-75-0

となるものが，取れる (補題 B.36, (2))．x も，y も，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の極限だから，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

(B-157)　$d(x, x_n) < \frac{1}{2m}$，かつ，$d(y, x_n) < \frac{1}{2m}$　となる　x-B-76

ものが，取れる．$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$d(x,y) \underbrace{\leq}_{\text{(B-151) による}} d(x,x_n) + d(x_n,y) \underbrace{<}_{\text{(B-157) による}} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

となるが，$<$ は $\mathbb{R}$ 上の線形順序だから，これは，(B-156) に矛盾である．

❏ (補題 B.46)

$x \in X$ が，距離空間 X のコーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の，1 つの極限であるとき，上の補題から，x は，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の唯一の極限であるが，この事実を，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ と表わす．特に，この極限が，距離 d に関するものであることを，強調する必要があるときには，$x = \lim^d_{n\to\infty} x_n$ と書くことにする．　lim-hat-d

$X = \langle X, d\rangle$ を距離空間とするとき，$Y \subseteq X$ が，X で，**稠密** (dense) である，とは，すべての $x \in X$ と $m \in \mathbb{N}$ に対し，x を中心とする半径 $\frac{1}{m}$ の**開球** (open ball)

(B-158)　$B_{\frac{1}{m}}(x) := \{y \in X : d(x,y) < \frac{1}{m}\}$　x-B-77

が，Y と交わる (つまり，$B_{\frac{1}{m}}(x) \cap Y \neq \emptyset$ となる) こと，とする．

例＋演習問題 B.47 $\mathbb{R}$ を，例 B.41 の意味での距離空間と見るとき，$\mathbb{Q}$ も，$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ も，$\mathbb{R}$ で稠密である．　ExExerc-B-0　❏

距離空間 $X = \langle X, d\rangle$ が，**完備** (complete) である，とは，任意の X のコーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ となる $x \in X$ が存在すること，とする．

例 B.48 $\langle \mathbb{R}, d\rangle$ は，完備だが，$\langle \mathbb{Q}, d\rangle$ は，完備でない．　Ex-B-5

証明． 定理 B.35 により，$\langle \mathbb{R}, d\rangle$ は，完備である．一方，例えば，例 B.24 により，$\langle \mathbb{Q}, d\rangle$ は，完備でない． □ (例 B.48)

$X = \langle X, d\rangle$ を，距離空間として，$Y \subseteq X$ が，X の**閉集合** (closed set) である，とは，すべての Y の要素を成分とする X のコーシー列 $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，$x \in X$ が，$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の極限なら，常に $x \in Y$ となること，とする [*51]．

P-B-19-0 **補題 B.49** $X = \langle X, d\rangle$ を，距離空間として，$Y \subseteq X$ とする．このとき，

（1）

x-B-77-0 (B-159) $Y^* = \{x \in X : x$ は，Y の要素を成分とする，X のコーシー列の極限である $\}$

とすると，$Y \subseteq Y^*$，かつ，Y は，Y^* で稠密で [*52]，Y^* は，X の閉集合となる．

（2） $Y^*, Y^{**} \subseteq X$ を，共に X の閉集合で，$Y \subseteq Y^*, Y^{**}$ で，Y は，Y^* でも，Y^{**} でも，稠密な部分集合となっているとき，$Y^* = Y^{**}$ である．

（3） $X = \langle X, d\rangle$ を，完備な距離空間として，$Y \subseteq X$ とするとき，

$Y = \langle Y, d \restriction Y^2\rangle$ は，完備な距離空間である
$\Leftrightarrow$ Y は，X の閉集合である

が成り立つ．

証明． (1): $Y \subseteq Y^*$ である: $y \in Y$ に対し，$y_n := y$, $n \in \mathbb{N}$ とすると，$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ はコーシー列で，極限の定義から，$\lim_{n\to\infty} y_n = y$ だから，$y \in Y^*$ である．

Y は，Y^* で稠密である: $y^* \in Y^*$ として，$m \in \mathbb{N}$ とする．Y^* の定義から，y^* は，Y の要素を成分とする，ある，X のコーシー列 $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の極限となっている．$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ はコーシー列だから，$N \in \mathbb{N}$ で，すべて

---

*51 ここでは，このような x の存在を主張しているわけではないことに，注意します．

*52 $Y^* \subseteq X$ なので，補題 B.44 により，$\langle Y^*, d \restriction (Y^*)^2\rangle$ は距離空間になります．Y が，Y^* で，稠密というのは，距離空間 $Y^* = \langle Y^*, d \restriction (Y^*)^2\rangle$ で，Y が，稠密である，ということです．

の $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$d(y_n, y^*) < \frac{1}{m}$ となるようなものが，取れる．特に，$B_{\frac{1}{m}}(y^*) \cap Y \neq \emptyset$ である．

Y^* は，X の閉集合である：$\langle y^*_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，Y^* の要素からなる X のコーシー列として，ある $x \in X$ に対し，$x = \lim_{n\to\infty} y^*_n$ となっている，とする．このとき，$x \in Y^*$ が示せればよい．Y の要素の列 $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，$d(y^*_n, y_n) < \frac{1}{n}$ となるように取る．このような列が，取れることは，既に示したように，Y が，Y^* で稠密であることからよい[*53]．Claim B.35.1, Claim B.35.2, と同様に，$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，X のコーシー列となり，$\lim_{n\to\infty} y_n = x$ となることが示せるので，Y^* の定義から，$x \in Y^*$ である．

(2): 主張の，Y^* と，Y^{**} に対する対称性から，$Y^* \subseteq Y^{**}$ が示せればよい．$y^* \in Y^*$ として，$y^* \in Y^{**}$ を示す．Y は Y^* で稠密だから，(1) の証明でと同様に，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$d(y^*, y_n) < \frac{1}{n}$ となる Y の要素を成分とする列 $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，取れる[*54]．$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ はコーシー列となり，$\lim_{n\to\infty} y_n = y^*$ となることが，ここでも，Claim B.35.1, Claim B.35.2, と同様にして示せる．したがって，$y_n \in Y^{**}$, $n \in \mathbb{N}$ で，Y^{**} が，閉集合であることから，$y^* \in Y^{**}$ である．

[*53] 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$d(y^*_n, y_n) < \frac{1}{n}$ を，満たすような $y_n \in Y$ が取れることは，Y が，Y^* で稠密であること，から分りますが，そのような $y_n \in Y$ を，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，一度に，取ることができることを，一般の場合に対して保証するためには，**可算選択公理** (Axiom of Countable Choice) と呼ばれる，**選択公理** (Axiom of Choice) を弱めた，公理が必要になります．一方，前節での，定理 B.35 での有理数列の同様の構成では，$\mathbb{Q}$ が，整列できる— 特に，$\mathbb{Q}$ を，$\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ と枚挙できる (つまり $\mathbb{Q}$ は**可算** (countable) である) — ことから，該当する $\mathbb{Q}$ の要素たちのうち，常に，この整列順序で最小のものを，取ることにすることで，選択公理を用いずに，$\mathbb{R}$ の完備性の証明が行えます．

countable-choice

ここで，選択公理とは，空集合を，要素として含まない，任意の集合 (族) $\mathcal{F}$ に対し，$f : \mathcal{F} \to \bigcup\mathcal{F}$ で，$f(A) \in A$ が，すべての $A \in \mathcal{F}$ に対し成り立つもの (このような f を $\mathcal{F}$ の選択関数とよびます) が存在する，という主張です．これに対し，可算選択公理は，選択公理での $\mathcal{F}$ を，可算なものに限ったときに，選択関数の存在を保証する公理です．可算選択公理は，任意の空集合と異る集合の列 $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，列 $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$a_n \in A_n$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つようなものが存在する，という主張と見ることもできます．上で $\mathbb{Q}$ の可算性から，選択公理なしの議論が可能である，と言ったときには，上の選択公理の定義との対応では，$\bigcup\mathcal{F}$ の可算性がそのことから導かれる，ということに相当する状況が生じていたからなのですが，可算選択公理では，$\mathcal{F}$ は可算ですが，$\bigcup\mathcal{F}$ は，必ずしも可算であるとは仮定していません．選択公理に関連しては，第 II 巻で，より詳しく論じることになります．

♦ 第 II 巻で，基底の存在に関連して選択公理について述べる．

[*54] ここでも，一般の場合に対しては，可算選択公理が必要になります．

(3): $X = \langle X, d\rangle$ を，完備な距離空間とすると，(X の部分空間としての) Y の任意のコーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，X のコーシー列でもあるから，X が完備により，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ となる $x \in X$ が存在する．Y は閉集合だから，$x \in Y$ で，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ は Y でも成り立っている．$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，任意の Y のコーシー列だったから，このことから，Y が，完備であることが，分かる．

逆に，Y が，完備だとすると，Y の任意のコーシー列は，ある Y の要素に収束するから，特に，Y は，X の閉集合である．　□ (補題 B.49)

Ex-B-6 **例 B.50** d で，(4.27) で定義された $\mathbb{R}^2$ 上の距離をあらわすことにする．$\mathbb{R}^2$ の原点から距離が 1 の点の全体の集合 (**単位円** (unit circle)) $\{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbb{a}, \mathbb{0}) = 1\}$ $(= \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{a}\| = 1\}$ を，C と表わすことにしたのだった ((A-2) を参照) が，C は $\mathbb{R}^2$ の閉部分集合となる (後出の補題 B.79 の証明を参照)．$\langle \mathbb{R}^2, d\rangle$ は完備だから (定理 B.66)，補題 B.49 により，C も $d \restriction \mathsf{C}^2$ に関し完備である．

以下の定理 B.51 で示すように，$\mathbb{R}$ の，$\mathbb{Q}$ からの構成と，類似の構成が，任意の距離空間に対しても実行できる．

P-B-20 **定理 B.51** $X = \langle X, d\rangle$ を，任意の距離空間とするとき，完備な距離空間 $\langle Y, d'\rangle$ で，

x-B-78 (B-160) $X \subseteq Y$;

x-B-79 (B-161) $d \subseteq d'$ (つまり，d' は，d を拡張する関数である);

x-B-80 (B-162) X は，Y で (d' に関して) 稠密である

ようなものが存在する．

証明． 前節での，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ からの構成を，模倣する．

x-B-80-0 (B-163) $\mathcal{Y} := \{\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle : \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は X のコーシー列である $\}$

とする．

Claim B.51.1 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{Y}$, $\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\vec{y} = \langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，$\langle d(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列である． Cl-B-20-1

$\vdash$　任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$\text{(B-164)}\quad d(x_n, x_{n'}),\ d(y_n, y_{n'}) < \tfrac{1}{2m}$$ x-B-80-1

となるものが，取れる．

$n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，三角不等式 (B-151) により，$d(x_{n'}, y_n) \leq d(y_n, y_{n'}) + d(x_{n'}, y_{n'})$ である．したがって，補題 B.33, (3) により，$d(x_{n'}, y_n) - d(y_n, y_{n'}) \leq d(x_{n'}, y_{n'})$ である．よって，演習問題 2.21, (3) により，

$$\text{(B-165)}\quad -(d(x_{n'}, y_n) - d(y_n, y_{n'})) \geq -d(x_{n'}, y_{n'})$$ x-B-80-2

である．

一般性を失なうことなく $d(x_n, y_n) \geq d(x_{n'}, y_{n'})$ としてよいから，

$$\begin{aligned}
|\, d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})\,| &= d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})\\
&\underbrace{\leq}_{\text{三角不等式 (B-151) と，(B-165) による}} d(x_n, x_{n'}) + d(x_{n'}, y_n) - (d(x_{n'}, y_n) - d(y_n, y_{n'}))\\
&= d(x_n, x_{n'}) + d(y_n, y_{n'}) < \tfrac{1}{2m} + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{1}{m}
\end{aligned}$$

である．

m は任意だったから，このことから，$\langle d(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，$\mathbb{R}$ のコーシー列であることが分った． $\dashv$ (Claim B.51.1)

次の Claim は，定義 (B-167) のモティベージョンを与えるものにはなっているが，以下の証明には必要ない．しかし，この Claim の主張している事実は，後で何回か参照することにもなるので，その証明も見ておくことにする:

Claim B.51.2 $\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ と，$\vec{y} = \langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を X のコーシー列とするとき，x, $y \in X$ で，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ なら，$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ である． Cl-B-20-1-0

$\vdash$　$\mathbb{R}$ の完備性 (定理 B.35) と Claim B.51.1 により，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ は存在することに注意する．すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての

$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$|\, d(x,y) - d(x_n, y_n)\,| < \frac{1}{m}$ が成り立つ，ようなものが存在することが示せればよい．

$m \in \mathbb{N}$ を，任意に取るとき，x と y の定義から，$N \in \mathbb{N}$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

x-B-80-2-0 (B-166) $|\, x_n - x\,|, |\, y_n - y\,| < \frac{1}{2m}$

となるものが，取れる．

このような N に対して，$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ を任意に取ると，

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\underbrace{\le}_{\text{三角不等式 (B-151)}} d(x_n, x) + d(x, y_n) \overbrace{\le}^{\text{三角不等式 (B-151)}} \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{1}{2m}} + d(x,y) + \underbrace{d(y, y_n)}_{< \frac{1}{2m}} \\ &< d(x,y) + \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, y) &\underbrace{\le}_{\text{三角不等式 (B-151)}} d(x, x_n) + d(x_n, y) \overbrace{\le}^{\text{三角不等式 (B-151)}} \underbrace{d(x, x_n)}_{< \frac{1}{2m}} + d(x_n, y_n) + \underbrace{d(y_n, y)}_{< \frac{1}{2m}} \\ &< d(x_n, y_n) + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

により，$|\, d(x,y) - d(x_n, y_n)\,| < \frac{1}{m}$ である． ⊣ (Claim B.51.2)

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{Y}$, $\vec{x} = \langle x_n \,:\, n \in \mathbb{N} \rangle$, $\vec{y} = \langle y_n \,:\, n \in \mathbb{N} \rangle$ に対し，

x-B-80-3 (B-167) $d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}, \vec{y}) := \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$

とする．Claim B.51.1 により，これは well-defined となっていることに注意する．

Cl-B-19-0 **Claim B.51.3** $d_{\mathcal{Y}}$ は，(B-150) 以外の距離の公理をすべて満たす．

⊢ $d_{\mathcal{Y}}$ が 0 と等しいか大きい値を取ることは，$d_{\mathcal{Y}}$ の定義 (B-167) と，補題 B.37, (1) により，よい．

$d_{\mathcal{Y}}$ は (B-149) を満たす: $d_{\mathcal{Y}}$ の定義 (B-167) と，d が (B-149) を満たすことからよい．

$d_{\mathcal{Y}}$ は 三角不等式 (B-151) を満たす: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{Y}$ に対し，

$\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\vec{y} = \langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\vec{z} = \langle z_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ とすると,

$$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) \underbrace{=}_{d_{\mathcal{Y}}\text{ の定義による}} \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \overbrace{\leq}^{d\text{ が三角不等式を満たすことと，補題 B.37, (1) による}} \lim_{n\to\infty}\Big(d(x_n,z_n)+d(z_n,y_n)\Big)$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 B.37, (2), (a) による}} \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n,y_n) = d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{z}) + d_{\mathcal{Y}}(\vec{z},\vec{y})$$

である. ⊣ (Claim B.51.3)

ここで，$\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{Y}$ に対し,

(B-168) $\vec{x} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{y} \ :\Leftrightarrow\ d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ x-B-80-4

とする.

Claim B.51.4 二項関係 $\sim_{\mathcal{Y}}$ は，$\mathcal{Y}$ 上の同値関係である. Cl-B-20-2

⊢　二項関係 $\sim_{\mathcal{Y}}$ が，反射律 (B-8) を満たすことは，$\vec{x} \in \mathcal{Y}$ で，$\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ とするとき.

$$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n,x_n)}_{=0} = 0;$$

となることから，よい.

二項関係 $\sim_{\mathcal{Y}}$ が，対称律 (B-9) を満たすことは，$\sim_{\mathcal{Y}}$ の定義と，$d_{\mathcal{Y}}$ が，(B-149) を満たすこと (Claim B.51.3) からよい.

$d_{\mathcal{Y}}$ が，0 より大きいか等しい値を取ることと，三角不等式を満たすこと (Claim B.51.3) から，$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{Y}$ に対し，$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ かつ $d_{\mathcal{Y}}(\vec{y},\vec{z}) = 0$ なら，$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{z}) = 0$ となる．つまり，$\vec{x} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{y}$ かつ，$\vec{y} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{z}$ なら，$\vec{x} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{z}$ である．よって，二項関係 $\sim_{\mathcal{Y}}$ は，推移律 (B-3) も満たす. ⊣ (Claim B.51.4)

(B-169) $Y = \mathcal{Y}/\sim_{\mathcal{Y}}$ x-B-80-5

として，$d' : Y^2 \to \mathbb{R}$ を，$[\vec{x}]_{\sim_{\mathcal{Y}}}, [\vec{y}]_{\sim_{\mathcal{Y}}} \in Y$ に対し,

(B-170) $d'([\vec{x}]_{\sim_{\mathcal{Y}}}, [\vec{y}]_{\sim_{\mathcal{Y}}}) := d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y})$ x-B-80-6

で定義する.

Cl-B-21 **Claim B.51.5** d' は，well-defined である．

$\vdash$ $\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{y}, \vec{y}\,' \in \mathcal{Y}$ で，

x-B-80-7 (B-171) $\vec{x} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{x}\,', \quad \vec{y} \sim_{\mathcal{Y}} \vec{y}\,'$

とするとき，$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) = d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}\,')$ となることが示せればよい．

$$\text{(B-172)} \quad d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) \underbrace{\le}_{d_{\mathcal{Y}}\text{ は三角不等式を満たす (Claim B.51.3)}} \overbrace{d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{x}\,')}^{=0;\ \text{(B-171) による}} + d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y})$$

$$= d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}) \underbrace{\le}_{d_{\mathcal{Y}}\text{ は三角不等式を満たす (Claim B.51.3)}} d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}\,') + \overbrace{d_{\mathcal{Y}}(\vec{y}\,',\vec{y})}^{=0;\ \text{(B-171) による}} = d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}\,')$$

である．$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) \ge d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}\,')$ も同様に示せる．したがって，$d_{\mathcal{Y}}(\vec{x},\vec{y}) = d_{\mathcal{Y}}(\vec{x}\,',\vec{y}\,')$ である． $\dashv$ (Claim B.51.5)

Cl-B-20-3 **Claim B.51.6** （1） d' は，Y 上の距離である．

（2） $\langle Y, d'\rangle$ は，完備な距離空間である．

$\vdash$ (1): d' が，常に 0 より大きいか等しい値をとり，(B-149), (B-151) を，満たすことは，d' の定義 (B-170) と，Claim B.51.3 により，よい．

d' が，(B-150) を満たすことは，d' の定義 (B-170) と，$\sim_{\mathcal{Y}}$ の定義 (B-168) により，よい．

(2): $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，Y の d' に関するコーシー列とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\langle x^n_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ を，X のコーシー列で，$y_n = [\langle x^n_k : k \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{Y}}}$ となるもの，とする [*55]．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$N_n \in \mathbb{N}$ を，すべての $k, k' \in \mathbb{N}\setminus\overline{N_n}$ に対し，$d(x^n_k, x^n_{k'}) < \frac{1}{n}$ となるものとし，$x_n = x^n_{N_n+1}$ とする．

このとき，定理 B.35 の証明でと同様の議論により，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，X のコーシー列となり，$[\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_{\mathcal{Y}}}$ は，$\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の d' に関する極限であることが示せる． $\dashv$ (Claim B.51.6)

*55 ここでも，可算選択公理が用いられていることに，注意します．

前節での，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ からの構成のときと同様に，$x \in X$ に対して，$\vec{x}$ で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n := x$ としたときの，X の要素の列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を表わすことにする．$\vec{x} \in \mathcal{Y}$ である．

(B-173) $i_X : X \to Y;\ x \mapsto [\vec{x}\,]_{\sim_\mathcal{Y}}$ x-B-80-8

とする．

Claim B.51.7 （1） i_X は，$\langle X, d\rangle$ の，$\langle Y, d'\rangle$ への，**等長埋め込み** (isometric embedding) である．つまり，任意の x, $y \in X$ に対し，$d(x,y) = d'(i_X(x), i_X(y))$ が，成り立つ． Cl-B-22

（2） $i_X{}''X$ は，距離 d' に関する，Y の稠密な部分集合である．

$\vdash$ (1): x, $y \in X$ に対し，$\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, $\vec{y} = \langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ とすると，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n = x$, $y_n = y$ だから，$d'(i_X(x), i_X(y)) = d'([\vec{x}\,]_{\sim_\mathcal{Y}}, [\vec{y}\,]_{\sim_\mathcal{Y}}) = d_\mathcal{Y}(\vec{x}, \vec{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$ である．

(2): $y \in Y$ として，$y = [\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle]_{\sim_\mathcal{Y}}$ とすると，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ を，すべての $n, n' \in \mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，$d(y_n, y_{n'}) < \frac{1}{m+1}$ となるものとすると，$x := y_{N+1}$ として，$d'(i_X(x), y) = \lim_{n\to\infty} d(y_{N+1}, y_n) \le \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}$ である． $\dashv$ (Claim B.51.7)

上の Claim B.51.7, (1) により，i_X で同一視して，$X \subseteq Y$ と見るとき，Claim B.51.6, (2) と，Claim B.51.7, (1) により，$\langle Y, d'\rangle$ は，求めるようなものになっている． □ (定理 B.51)

距離空間 $X = \langle X, d\rangle$ に対し，定理 B.51 でのような，完備な距離空間 $Y = \langle Y, d'\rangle$ を，$\langle X, d\rangle$ の**完備化** (completion) とよぶ．つまり，距離空間 $Y = \langle Y, d'\rangle$ が，距離空間 $X = \langle X, d\rangle$ の完備化である，とは，

(B-174) $X \subseteq Y$, $d \subseteq d'$ (つまり，関数 d' は，関数 d の拡張になっている); x-B-80-8-0

(B-175) X は，$Y = \langle Y, d'\rangle$ の稠密な部分集合である; x-B-80-8-1

(B-176) Y は，完備な距離空間である x-B-80-8-2

が成り立つことである．

$Y = \langle Y, d'\rangle$ と，$Z = \langle Z, d''\rangle$ を，距離空間とするとき，$f : Y \to Z$ が，Y

から Z への**等長同相写像** (isometry) である，とは，f は，全単射で，すべての $y, y' \in Y$ に対し，

x-B-80-9 (B-177) $d''(f(y), f(y')) = d'(y, y')$

が，成り立つことである．つまり，f が等長同相である，とは，f が全射な等長埋め込みであることである．

距離空間 Y と，Z の間に，等長同相写像が存在するとき，X と，Y は，**等長同相** (isometric) であるという．

同型な構造でのときと同様に，等長同相な距離空間は，互いに同一視することができる．

Ex-B-7 **例 B.52** $\mathbb{R}^n$ を，標準的な距離により，距離空間と見る (例 B.42 を参照) とき，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ の任意の直交変換は，等長同相写像である (定理 4.47 と直交変換の定義 (123 ページ) を参照)．

以下の定理 B.54 が示すように，任意の距離空間 $X = \langle X, d\rangle$ に対し，X の完備化は，X の上の等長同相 (つまり X 上で恒等写像となるような等長同相写像による同一視) を除き，一意に決まる．

P-B-20-0 **補題 B.53** (1) $Y = \langle Y, d'\rangle$ を，距離空間 $\langle X, d\rangle$ の完備化とするとき，任意の $y \in Y$ に対し，X のコーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$y = \lim^{d'}_{n\to\infty} x_n$ となるものが存在する [*56]．

(2) $\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ と，$\vec{x}\,' = \langle x'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を X のコーシー列とするとき，ある $y \in Y$ に対し，$\lim^{d'}_{n\to\infty} x_n = y = \lim^{d'}_{n\to\infty} x'_n$ なら，$\vec{x} \sim_Y \vec{x}\,'$ である．

証明． (1): $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_n \in X$ を $d'(x_n, y) < \frac{1}{n}$ となるように取る．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，このような x_n が存在することは，(B-175) により，よい [*57]．

---

*56 "$\lim^{d'} \cdots$" で，これが距離空間 $\langle Y, d'\rangle$ での極限であることを表わすことにしたのでした (411 ページを参照)．

*57 ここでも，一般には，これらの x_n $n \in \mathbb{N}$ を，一度に取ることができることを保証するために，可算選択公理が必要となります．

このとき，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は X のコーシー列となり， $y = \lim^{d'}_{n\to\infty} x_n$ となることが示せる (この証明の細部と，(2) の証明は，読者の演習とする)．

□ (補題 B.53)

定理 B.54 $\langle Y, d'\rangle$ と $\langle Z, d''\rangle$ を，距離空間 $\langle X, d\rangle$ の完備化とするとき，等長同相写像 $f : Y \to Z$ で， P-B-21

(B-178)　$f \restriction X = id_X$ x-B-81

を満たすものが，一意に存在する．

証明． 各 $y \in Y$ に対し，X のコーシー列 $\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，

(B-179)　$y = \lim^{d'}_{n\to\infty} x^y_n$ x-B-82-0

となるようなものとして，$f(y) \in Z$ を，

(B-180)　$f(y) = \lim^{d''}_{n\to\infty} x^y_n$ x-B-82-1

となるものとする．このような $f(y)$ が取れることは，$Z = \langle Z, d''\rangle$ の完備性からよい．更に，$f(y)$ が，上のような $\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の選び方に依存せずに，一意に決まることは，補題 B.46 と，補題 B.53, (2) により，よい [*58]．

$f \restriction X = id_X$ となることは，f の定義と，$d' \restriction X^2 = d = d'' \restriction X^2$, および，補題 B.46 により，よい．

f が，等長埋め込みである (つまり，(B-177) を満たす) ことは，y, $y' \in Y$ に対し，

$$d''(f(y), f(y')) \underbrace{=}_{\text{Claim B.51.2 による}} \lim_{n\to\infty} d(x^y_n, x^{y'}_n) \underbrace{=}_{\text{Claim B.51.2 による}} d'(y, y')$$

となることから，よい．f が，単射であることは，このことから，従う．

f が，上射であることを言うために，$z \in Z$ を，任意に取ると，補題 B.53, (1) により，X のコーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$\lim^{d''}_{n\to\infty} x_n = z$ となるものが，取れるが，Y は完備だから，$y = \lim^{d'}_{n\to\infty} x_n$ となる $y \in Y$ を取ると，

[*58] $f(y)$ の定義が，コーシー列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ の選び方に依存しないことから，ここでは，選択公理は，必要になっていません．

$f(y) = \lim^{d''}_{n\to\infty} x_n = z$ である．

最後に，f の一意性を示すために，$g : Y \to Z$ を，$g \restriction X = id_X$ となる任意の等長同相写像とする．任意の $y \in Y$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = y$ となる X の要素の列が，取れるが，

$$\underbrace{g(y) \quad = \quad}_{g\text{ が，等長埋め込みであることによる}} \lim^{d''}_{n\to\infty} g(x_n) \overbrace{\quad = \quad}^{g\restriction X = id_X} \lim^{d''}_{n\to\infty} x_n = f(y)$$

となるから，$g = f$ である． ❑ (定理 B.54)

P-B-22 **系 B.55** デデキント [12] での構成法による連続体 $\mathbb{R}_D$ と，前節でのカントルの構成法による連続体 $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{Q}$ 上の等長同相である，つまり，$X = \mathbb{Q}$ として，$Y = \mathbb{R}$ から $Z = \mathbb{R}_D$ への，(B-178), (B-177) を満たすような写像 f が一意に存在する．更に，この f は，体としての $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_D$ への同型写像でもある．

証明． $\mathbb{R}$ の距離 d は，例 B.41 でのように定義されていたが，これは，$\mathbb{Q}$ の対応する距離 d の拡張で，$\mathbb{Q}$ は，$\mathbb{R}$ の距離に関して，$\mathbb{R}$ で稠密 (補題 B.36, (1)) で，$\langle \mathbb{R}, d\rangle$ は完備 (定理 B.35) である．したがって，$\langle \mathbb{R}, d\rangle$ は，$\langle \mathbb{Q}, d\rangle$ の完備化である．

デデキントの構成した実数体 $\mathbb{R}_D$ でも，距離 d_D を (同様に代数的に) 定義すると，$\langle \mathbb{R}_D, d_D\rangle$ は，$\langle \mathbb{Q}, d\rangle$ の完備となる．したがって，定理 B.54 により，$\langle \mathbb{R}, d\rangle$ から，$\langle \mathbb{R}_D, d_D\rangle$ への，$\mathbb{Q}$ 上の等長同相写像 f が，一意に存在する．

補題 B.37, (2) と，$\mathbb{R}_D$ に対する，同様の補題により，($f \restriction \mathbb{Q} = id_{\mathbb{Q}}$ であることから) ここで与えられた等長同相写像 f は，体の構造に関する，$\mathbb{Q}$ 上の同型写像でもある． ❑ (系 B.55)

d と，d' を，X 上の距離とするとき，d と，d' が，**リプシッツ同値** (Lipschitz equivalent) であるとは，

x-B-83 (B-181) $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ で，すべての $x, y \in X$ に対し，$d'(x,y) \le \alpha d(x,y)$ となるものが，存在し;

x-B-84 (B-182) $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ で，すべての $x, y \in X$ に対し，$d(x,y) \le \beta d'(x,y)$ となるものが，存在する

こと，とする．

補題 B.56 d_1 と d_2 を，X 上の距離とするとき， P-B-23-1

d_1 と d_2 が，リプシッツ同値 $\Leftrightarrow$

(B-183) γ, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ で，$d_1(x,y) \leq \gamma d_2(x,y) \leq \delta d_1(x,y)$ が，すべての x, $y \in X$ に対して成り立つ，ようなものが存在する x-B-88-9

が成り立つ．

証明． d_1 と d_2 がリプシッツ同値で，α, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ を，その ((B-181), (B-182) に対する) 例証とするとき，$\gamma = \alpha$, $\delta = \alpha\beta$ とすれば，これらの γ, δ は，d_1, d_2 が (B-183) を満たすことの例証になっている．

逆に，(B-183) が成り立つとき，γ, δ を，その例証として，$\alpha = \gamma$, $\beta = \frac{\delta}{\alpha}$ とすれば，これらの α, β は，d_1, d_2 がリプシッツ同値であることの，例証となっている． □ (補題 B.56)

次は，容易に証明できる．

演習問題 B.57 (1) 集合 X 上の距離たちのリプシッツ同値性は，(この名称が示唆するように) X 上の距離たちの間の同値関係である． P-B-22-a

(2) d_1, d_2 が，リプシッツ同値な X 上の距離で，X 上の距離 d_3 に対し，ある α, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ を，取ると，$\alpha d_1(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \beta d_2(x,y)$ が，すべての x, $y \in X$ に対し成り立つなら，d_1, d_2, d_3 は，互いにリプシッツ同値である．

(3) d_1 を, X 上の距離として, 任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し, $d_2(x,y) := rd_1(x,y)$ として d_2 を定義すると，d_2 は，d_1 とリプシッツ同値な，X 上の距離となる．

証明． (1): リプシッツ同値性が，反射律と対称性を満たすことは，定義から明らかである．

リプシッツ同値生が，推移律を満たす，ことを示すために，d_1, d_2, d_3 を X 上の距離として，d_1 と d_2 はリプシッツ同値で，d_3 と d_4 もリプシッツ同値とすると，補題 B.56 により，γ_1 , δ_1, γ_2, $\delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ で，すべての x, $y \in X$ に対し，

$$d_1(x,y) \leq \gamma_1 d_2(x,y) \leq \delta_1 d_1(x,y),$$

$$d_2(x,y) \le \gamma_2 d_3(x,y) \le \delta_2 d_2(x,y)$$

となるものがある．このとき，すべての $x,\, y \in X$ に対し，

$$d_1(x,y) \le \gamma_1 d_2(x,y) \le \gamma_1\gamma_2 d_3(x,y) \le \gamma_1\gamma_2\delta_2 d_2(x,y)$$
$$\le \gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2 d_1(x,y)$$

となるから，再び，補題 B.56 により，d_1 と d_3 はリプシッツ同値である．

(2): $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ で，距離 d_3 が，すべての $x,\, y \in X$ に対し，$\alpha d_1(x,y) \le d_3(x,y) \le \beta d_2(x,y)$ を満たすとする．補題 B.56 により，$\gamma,\, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ で，d_1, d_2 が，すべての $x,\, y \in X$ に対し，

$$d_1(x,y) \le \gamma d_2(x,y) \le \delta d_1(x,y) \tag{B-183}$$

を満たす，ようなものが，取れる．このとき，

$$d_1(x,y) \le \frac{1}{\alpha}\, d_3(x,y) \le \frac{\beta}{\alpha}\, d_2(x,y) \le \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\, d_1(x,y)$$

がすべての $x,\, y \in X$ に対し成り立つ．したがって，再び補題 B.56 により，d_1 と d_3 は，リプシッツ同値である．(1) での，リプシッツ同値の推移性から，d_2 と d_3 もリプシッツ同値である．

(3): d_2 が X 上の距離になることは，d_2 が距離の公理を満たすことを確かめることで容易に示せる．$\gamma := \frac{1}{r}$, $\delta := 1$ とすると，d_1 と d_2 は (B-183) を満たすから，補題 B.56 により d_1 と d_2 はリプシッツ同値である． □ (演習問題 B.57)

P-B-22-0 **補題 B.58** d と d' を，X 上のリプシッツ同値な距離とする．このとき，

（1） X の要素の列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，d の意味でのコーシー列であることと，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，d' の意味でのコーシー列であることは，同値である．

（2） X の要素の列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ と，$x \in X$ に対し，$\lim^{d}_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim^{d'}_{n\to\infty} x_n = x$ である．

（3） $Y \subseteq X$ が，d の意味で X で稠密となるのは，Y が d' の意味で X で稠密になることと，同値である．

（4） $Y \subseteq X$ が，d の意味で閉集合になることと，d' の意味で閉集合になることは，同値である．

（5）　X が，d に関して完備であることと，d' に関して完備であること，は同値である．

証明． α, β を，(B-181), (B-182) でのように取る．

(1): $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，d の意味でのコーシー列とする．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$m_1 \in \mathbb{N}$ を，$\frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$ となるように取る．$N \in \mathbb{N}$ を，すべての n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$d(x_n, x_{n'}) < \frac{1}{m_1}$ となるように取ると，n, $n' \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$d'(x_n, x_{n'}) \underbrace{\leq}_{\text{(B-181) による}} \alpha\, d(x_n, x_{n'}) < \frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，d' の意味でのコーシー列であることが，分る．

逆に，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ が，d' の意味でのコーシー列のときには，β と (B-182) を用いて同様に議論すると，$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，d の意味でのコーシー列でもあることが，示せる．

(2): $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，X の要素の列として，$x \in X$ とする．$\lim^{d}_{n\to\infty} x_n = x$ とする． 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し， $m_1 \in \mathbb{N}$ を，$\frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$ となるように取る．$N \in \mathbb{N}$ を，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，$d(x_n, x) < \frac{1}{m_1}$ となるように取ると，$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$d'(x_n, x) \underbrace{\leq}_{\text{(B-181) による}} \alpha\, d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\lim^{d'}_{n\to\infty} x_n = x$ である．

同様に，β に対して，(B-182) を用いると，$\lim^{d'}_{n\to\infty} x_n = x$ なら，$\lim^{d}_{n\to\infty} x_n = x$ となることが，示せる．

(3): Y を，X の，d の意味での稠密な部分集合とする．$x \in X$ を，任意にとり， $m \in \mathbb{N}$ とするとき，$m_1 \in \mathbb{N}$ を，$\frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$ となるように取る．Y が，d に関し X で稠密であることから，$y \in Y$ で， $d(x, y) < \frac{1}{m_1}$ となるようなものが存在するが，この y に対し，

$$d'(x,y) \underbrace{\leq}_{(\text{B-181}) \text{ による}} \alpha\, d(x,y) < \frac{\alpha}{m_1} < \frac{1}{m}$$

となる．したがって，Y は d' の意味でも X で稠密である．逆も同様に証明できる．

(4): (2) と閉集合の定義により，よい．

(5): X を，d に関して完備である，とする．$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を，X の d' に関するコーシー列とすると，(1) により $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，X の d に関するコーシー列でもある．X は，d に関して完備だから，極限 $x = \lim^{d}_{n\to\infty} x_n$ が，存在する．(2) により，$x = \lim^{d'}_{n\to\infty} x_n$ でもある．$\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，X の d' に関する任意のコーシー列だったから，X は，d' に関しても完備であることが，示せた．逆方向の証明も，同様である．　□ (補題 B.58)

d を，集合 X 上の距離として，$r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d|r_0 : X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，x, $y \in X$ に対し，

x-B-88-10

$$\text{(B-184)}\quad d|r_0 = \begin{cases} d(x,y), & d(x,y) \leq r_0 \text{ のとき;} \\ r_0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する

P-B-22-0-0 **補題 B.59** d が X 上の距離で，$r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ なら，$d|r_0$ も X 上の距離である．

証明． $d|r_0$ が，0 より大きいか等しい値をとり，(B-149) と (B-150) を満たすことは，定義から明らか，だから，$d|r_0$ が，三角不等式 (B-151) を満たすことを，示せばよい．すべての x, $y \in X$ に対し，$d|r_0(x,y) \leq r_0$ となることに，注意する．

x, y, $z \in X$ とする．

x-B-88-11

$$\text{(B-185)}\quad d|r_0(x,y) \leq d|r_0(x,z) + d|r_0(z,y)$$

が，示したいことである．

$d(x,z) \geq r_0$, または，$d(z,y) \geq r_0$ なら，$d|r_0$ の定義から，$d|r_0(x,z) = r_0$, または，$d|r_0(z,y) = r_0$ だから，

$$d|r_0(x,y) \leq r_0 \leq d|r_0(x,z) + d|r_0(z,y)$$

となり，(B-185) は，成り立つ．

$d(x,z) < r_0$, かつ, $d(z,y) < r_0$ なら, $d|r_0$ の定義から, $d|r_0(x,z) = d(x,z)$, かつ，$d|r_0(z,y) = d(z,y)$ だから，

$$d|r_0(x,y) \leq d(x,y) \underbrace{\leq}_{d\text{ は三角不等式を満たす}} d(x,z) + d(z,y) = d|r_0(x,z) + d|r_0(z,y)$$

となり，再び，(B-185) は成り立つ． □ (補題 B.59)

集合 X 上の距離 d に対し，$r^* \in \mathbb{R}$ で，すべての x, $y \in X$ に対して，$d(x,y) < r^*$ が成り立つようなものが存在するとき，d は，X 上の**有界** (bounded) な距離である，という．

補題 B.60 d と，d' を，X 上の距離とする． P-B-22-1

（1） 任意の $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d|r_0$ は，X 上の有界な距離である．

（2） d が，有界な距離なら，任意の $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，d と，$d|r_0$ は，リプシッツ同値である．

（3） d' が，有界で，ある $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，d と，$d'|r_0$ が，リプシッツ同値なら，d と，d' も，リプシッツ同値である．

証明． (1): $d|r_0$ が，X 上の距離となることは，補題 B.59 で既に見た．$d|r_0$ が，有界であることは，定義 (B-184) から，$d|r_0(x,y) \leq r_0$ が，すべての x, $y \in X$ に対し成り立つことから，よい．

(2): ある $r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ を，取ると，$d(x,y) \leq r_1$ が，すべての x, $y \in X$ に対して，成り立つとする．$\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ を，$\delta = \max\{\frac{r_1}{r_0}, 1\}$ とすると，すべての x, $y \in X$ に対し，

$$d|r_0(x,y) \leq d(x,y) \leq \delta d|r_0(x,y)$$

が成り立つ．したがって，補題 B.56 により，$d|r_0$ と，d は，リプシッツ同値である．

(3): d' が，有界なら，(2) により，d' と $d'|r_0$ は，リプシッツ同値である．演習問題 B.57, (1) により，リプシッツ同値性は，推移的だから，このことから，d と d' は，リプシッツ同値であることが，分かる． □ (補題 B.60)

P-B-22-2 **系 B.61** d を，X 上の距離とするとき，以下は，同値である:

（a） d は，有界である;　（b） ある $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d|r_0$ は，d と，リプシッツ同値である;　（c） すべての $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d|r_0$ は，d と，リプシッツ同値である．

証明． (a) $\Rightarrow$ (c): 補題 B.60, (2) により，よい．

(c) $\Rightarrow$ (b): これは論理的に真である．

(b) $\Rightarrow$ (a): ある $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d|r_0$ と d が，リプシッツ同値なら，リプシッツ同値性の定義から，$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ で，$d(x, y) < \alpha(d|r_0(x, y))$ が，すべての x, $y \in X$ に対して，成り立つようなものが，取れるから，$d(x, y) < \alpha(d|r_0(x, y)) \le \alpha r_0$ が，すべての x, $y \in X$ に対して，成り立つ．したがって，d は，有界である． □ (定理 B.61)

P-B-23 **定理 B.62** $X = \langle X, d\rangle$ を，距離空間として，$\tilde{X} = \langle \tilde{X}, \tilde{d}\rangle$ を，X の完備化とする．d' を，d とリプシッツ同値な，X 上の距離とするとき，$\tilde{X}$ 上の距離 $\tilde{d}'$ で，

x-B-85 (B-186) $d' \subseteq \tilde{d}'$;

x-B-86 (B-187) $\langle \tilde{X}, \tilde{d}'\rangle$ は，$\langle X, d'\rangle$ の完備化である;

x-B-87 (B-188) $\tilde{d}$ と $\tilde{d}'$ は，$\tilde{X}$ 上の距離として，リプシッツ同値である

となるものが，一意に存在する．

証明． 補題 B.53, (1) により，各 $y \in \tilde{X}$ に対し，X の (d に関する) コーシー列 $\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$y = \lim^{\tilde{d}}_{n\to\infty} x^y_n$ となるものが，取れる [*59]．補題 B.58, (1) により，$\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は，d' に関するコーシー列でもある．そこで，

no-choice *59 ここでは，簡単のために，各 $y \in \tilde{X}$ に対し，$\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を選ぶ，という，そのまま読むと，選択公理が必要になるように見える記述をしているが，前と同じように，(B-189) は，$\langle x^y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ たちの選び方に依存しないことが示せるので，実際には，この証明で必要となっているのは，補題 B.53 の証明で用いられている可算選択公理のみで，X が可算のときには，脚注 *53 で述べたトリックにより，この可算選択公理の使用も落すことができます．

現代的な数学 (20 世紀以降の数学) では，選択公理は，いずれにしてもいたるところで用いられることになるので，それが，どこで使われているかを神経質にチェックすることは，必ずしも建設的ではないかもしれませんが，本付録での文脈での，この定理は，次の節で，角度の導入に際して本質的な役割を果すことになるので，角度の導入が，選択公理のような，高次な集合論的原理は何も用いずに，遂行できていることを確認すべきである，という

(B-189) $\tilde{d}'(y,y') := \lim_{n\to\infty} d'(x_n^y, x_n^{y'})$ x-B-88

とすると，定理 B.51 の証明でと同様に，$\tilde{d}'$ は，d' を拡張する $\tilde{X}$ の距離となることが示せる．α, β を，ここでの d と，d' に対し，(B-181), (B-182) を満たすような，正の実数とすると，任意の y, $y' \in \tilde{X}$ に対し，

$$\tilde{d}'(y,y') \underbrace{=}_{\text{(B-189) による}} \lim_{n\to\infty} d'(x_n^y, x_n^{y'}) \underbrace{\leq}_{\text{(B-181) と補題 B.37, (1) による}} \lim_{n\to\infty} \alpha\, d(x_n^y, x_n^{y'})$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 B.37 (2) による}} \alpha(\lim_{n\to\infty} d(x_n^y, x_n^{y'})) = \alpha\, \tilde{d}(y,y')$$

である．$\tilde{d}(y,y') \leq \beta \tilde{d}'(y,y')$ となることも同様に示せる．したがって，$\tilde{d}$ と $\tilde{d}'$ はリプシッツ同値である．

X は，$\tilde{X}$ で，$\tilde{d}$ に関し稠密だから，補題 B.58, (3) により，X は，$\tilde{X}$ で，$\tilde{d}'$ に関しても稠密である．また，$\tilde{X}$ が，$\tilde{d}$ に関して完備であることと，補題 B.58, (5) により，$\tilde{X}$ は，$\tilde{d}'$ に関しても完備である．以上から，$\langle \tilde{X}, \tilde{d}' \rangle$ は，$\langle X, d' \rangle$ の完備化であることが示せた． □ (定理 B.62)

B.4　角度の導入

第 B.2 節で，自然数の全体 $\mathbb{N}$ から出発して，実数体 $\mathbb{R}$ を構成したが，これに続けて，4.2.1 節の意味での $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ の，2 つの (変位) ベクトルのなす角度 (または，位置ベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{0}\}$ に対する，直線 $\overline{\mathbb{a}\,\mathbb{0}}$ と，直線 $\overline{\mathbb{b}\,\mathbb{0}}$ のなす角度) の概念を，この段階で既に準備されている道具のみを用いて，厳密に導入したい．第 B.3 節で準備したことを用いるが，以下で用いられるものは，その証明に選択公理は必要とならない — ここでは，第 B.3 節で述べた，一般論としては，可算選択公理が必要になるような命題も，いくつか用いられているが，それらは，本節での応用に特化した形の命題に直すと，すべて選択公理なしで証明できる (脚注∗53，脚注∗59 を参照). angle

まず，$\mathbb{R}^2$ 上の距離のうち，よく知られている，次の 2 つについて，見て

観点からは，それが，ここで用いられていないことは，重要な意味を持ちます．ちなみに，本巻で述べていることは，少なくとも記述の仕方に関しては完全に 20 世紀以降の数学ですが，本節で述べた一般論での一部を除くと，選択公理は全く用いられていません．

おくことにする．$\mathbb{R}^2$ 上の**ユークリッド距離** (Euclidean distance) は，既に (4.27) で定義したものである．これが，実際に，距離の公理を満たすことは，補題 4.11 で既に確かめてある． 以下では，これを他の距離と区別できるように d_E と表わすことにするが，この d_E は，$\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ として，

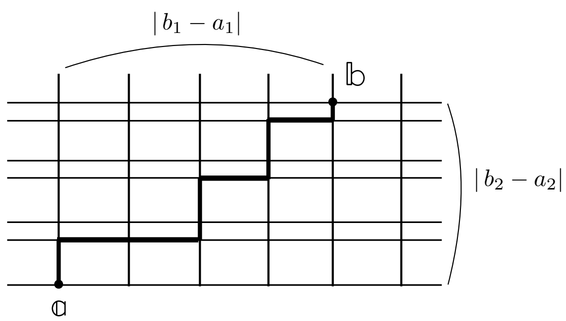
x-B-89 (B-190) $d_E(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

で定義されるものである．この距離は，87 ページの図にあるような，ピュタゴラスの定理のアイデアに基づくものとなっており，そのことから，この距離が，幾何学的な距離に関する直観との整合性を持つことは，第 4.2 節で，既に確認した．

$\mathbb{R}^2$ 上の距離で，頻繁に用いられるものの中には，次の，**マンハッタン距離** (Manhattan distance) と呼ばれるものも，ある．これは，

x-B-90 (B-191) $d_M(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := |\, b_1 - a_1 \,| + |\, b_2 - a_2 \,|$

で定義される．“マンハッタン” という名称は，この距離が，碁盤の目状の区画を持つ市街地で，タクシーが，ある辻から別の辻まで移動するのに必要な走行距離に対応していること，から来ている [*60]．



♦ figur-B-01.pdf

Exer-B-1 **演習問題 B.63** d_M は距離の公理 (B-149)〜(B-151) を満たす．

---

*60 マンハッタンは，ニューヨークの中心地区の名称で，俗に，(大文字の頭文字で) “the City” と呼ばれる場所 (例えば，連続テレビ・ドラマ『セックス・アンド・ザ・シティ』の “ザ・シティ”) です．

証明． d_M が，(B-149), (B-150) を，満たすことは，d_M の定義 (B-191) から明らかである．

d_M が，三角不等式 (B-151) を，満たすことは，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} d_M(\mathbb{a},\mathbb{b}) &\underbrace{=}_{d_M \text{ の定義 (B-191)}} |\, b_1 - a_1 \,| + |\, b_2 - a_2 \,| \\ &\underbrace{\leq}_{\text{例 B.41 の証明での } (iii) \text{ での議論}} |\, b_1 - c_1 \,| + |\, c_1 - a_1 \,| + |\, b_2 - c_2 \,| + |\, c_2 - a_2 \,| \\ &= (|\, c_1 - a_1 \,| + |\, c_2 - a_2 \,|) + (|\, b_1 - c_1 \,| + |\, b_2 - c_2 \,|) = d_M(\mathbb{a},\mathbb{c}) + d_M(\mathbb{c},\mathbb{b}) \end{aligned}$$

が，成り立つことから，よい．　□ (演習問題 B.63)

補題 B.64 $\mathbb{R}^2$ 上の距離 d_E と d_M は，リプシッツ同値である．特に，すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，　P-B-24

$$d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}) \leq d_M(\mathbb{a},\mathbb{b}) \leq 2d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}) \tag{B-192}$$ x-B-91

が成り立つ．

証明． すべての正の実数 $r, s \in \mathbb{R}$ に対し，$r \leq s \Leftrightarrow r^2 \leq s^2$ が成り立つので (定理 B.38, (2))，すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ で $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ となるものに対し，

$$(d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 \leq (d_M(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 \leq (2d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 \tag{B-193}$$ x-B-92

が示せればよい．d_E と d_M の定義から，

$$(d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2; \tag{B-194}$$ x-B-92-0

$$\begin{aligned} (d_M(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 &= (|\, b_1 - a_1 \,| + |\, b_2 - a_2 \,|)^2 \\ &= (b_1 - a_1)^2 + 2|\, b_1 - a_1 \,| \cdot |\, b_2 - a_2 \,| + (b_2 - a_2)^2 \end{aligned} \tag{B-195}$$ x-B-92-1

だから，(B-192) の最初の不等号は，明らかに，成り立つ．(B-192) の二番目の不等号は，例えば，

$$|\, b_1 - a_1 \,| \geq |\, b_2 - a_2 \,| \tag{B-196}$$ x-B-93

とすると，

$$(d_M(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2 \underbrace{=}_{(\text{B-195})\text{ を参照}} (b_1-a_1)^2 + \overbrace{2|\,b_1-a_1\,|\cdot|\,b_2-a_2\,|}^{\leq 2(b_1-a_1)^2;\ (\text{B-196})\text{ による}} + (b_2-a_2)^2$$
$$\leq 3(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2 \leq 4(b_1-a_1)^2+4(b_2-a_2)^2$$
$$= (2d_E(\mathbb{a},\mathbb{b}))^2$$

により，よい．

$|\,b_1-a_1\,| \leq |\,b_2-a_2\,|$ の場合にも，全く同様に証明できる． □ (補題 B.64)

P-B-25 **補題 B.65** $\langle \mathbb{a}_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ を，$\mathbb{R}^2$ の d_E に関するコーシー列として，各 n に対し，$\mathbb{a}_n = \begin{bmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，

（1） $\langle a_n^1 : n\in\mathbb{N}\rangle$ も，$\langle a_n^2 : n\in\mathbb{N}\rangle$ も，$\mathbb{R}$ のコーシー列である．

（2） $\mathbb{R}$ は，完備だから (定理 B.35 を参照)，$r_1 = \lim_{n\to\infty} a_n^1$，$r_2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2$ となる実数 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ が，存在するが，$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \lim^{d_E}_{n\to\infty} \mathbb{a}_n$ である．

証明． (1): $m\in\mathbb{N}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ を，すべての $n, n' \in \mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，

x-B-94 (B-197) $d_E(\mathbb{a}_n,\mathbb{a}_{n'}) < \frac{1}{m}$

が成り立つようなものとする．

このとき，$i\in\overline{2}$ に対し，$n, n'\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ とすると，

$$|\,a_{n'}^i - a_n^i\,| = \sqrt{(a_{n'}^i-a_n^i)^2} \overbrace{\leq}^{\substack{(a_{n'}^i-a_n^i)^2 \leq (a_{n'}^1-a_n^1)^2+(a_{n'}^2-a_n^2)^2\text{ だから，} \\ \text{定理 B.38, (2) から，この不等式が従う}}} \sqrt{(a_{n'}^1-a_n^1)^2+(a_{n'}^2-a_n^2)^2}$$
$$= d_E(\mathbb{a}_n,\mathbb{a}_{n'}) < \frac{1}{m}$$

が成り立つ．したがって，$\langle a_n^i : n\in\mathbb{N}\rangle$ は，$\mathbb{R}$ のコーシー列である．

(2): $\mathbb{r} := \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ とする．

x-B-95-0 $m\in\mathbb{N}$ に対し，m_1 を，(B-198)： $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{m_1} < \frac{1}{m}$ となるようなものとする．N を，すべての $n\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対し，

(B-199) $|\,r_1 - a_n^1\,|, |\,r_2 - a_n^2\,| < \frac{1}{m_1}$ x-B-96

を，満たすようなものとすると，
$n \in \mathbb{N} \setminus \overline{N}$ に対し，

$$d_E(\mathbb{r}, \mathbb{a}_n) = \sqrt{(r_1 - a_n^1)^2 + (r_2 - a_n^2)^2} \underbrace{\leq}_{\substack{\text{(B-199) と,} \\ \text{定理 B.38, (2) による}}} \sqrt{(\tfrac{1}{m_1})^2 + (\tfrac{1}{m_1})^2}$$
$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{m_1} \underbrace{<}_{\text{(B-198)}} \frac{1}{m}$$

となる．したがって，$\mathbb{r} = \lim^{d_E}_{n\to\infty} \mathbb{a}_n$ である． ❑ (補題 B.65)

定理 B.66 （1） 距離空間 $\langle \mathbb{R}^2, d_E \rangle$ は，完備である． P-B-26

（2） $\langle \mathbb{a}_n : n \in \mathbb{N} \rangle, \langle \mathbb{b}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を，$\mathbb{R}^2$ の，d_E に関するコーシー列とする．このとき，$\langle \mathbb{a}_n + \mathbb{b}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ も，コーシー列で，

$$\lim^{d_E}_{n\to\infty} (\mathbb{a}_n + \mathbb{b}_n) = \lim^{d_E}_{n\to\infty} \mathbb{a}_n + \lim^{d_E}_{n\to\infty} \mathbb{b}_n$$

である．

証明． (1): 補題 B.65, (1), (2) により，よい．
(2): 補題 B.37, (2),(a) と，補題 B.65, (2) により，よい． ❑ (定理 B.66)

系 B.67 $\langle \mathbb{R}^2, d_M \rangle$ は，完備である． P-B-26-0

証明． 定理 B.66 と，補題 B.64，および，補題 B.58, (5) により，よい． ❑ (系 B.67)

上で，$\mathbb{R}^2$ に関して述べたことは，そこで用いられている概念を自然に拡張することで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対する，$\mathbb{R}^n$ でも，同様の証明で成り立つ．

演習問題 B.68 補題 B.64 で現れる概念を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対する，$\mathbb{R}^n$ での概念として一般化し，これを用いて，補題 B.64 の $\mathbb{R}^n$ への一般化を記述し，証明せよ． ❑ Exer-B-2

第 4 章では，原点を中心とする回転を，(4.74) での R_θ という形をした行列を表現行列とする，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形変換として定義したが，本節では，角度の概念を導入しようとしているので，この定義を，そのまま使うことはでき

ない．ここでは，定理 4.52 で与えた，角度を経由しない特徴付けにより，回転行列を，定義しなおすことにする．ここでの定義は，角度の概念が確立された後，付録 A でのようにして，三角関数を導入して，第 4 章でのやり方で回転行列が定義できるようになったときには，そこでの定義と同値になるものである．

つまり，以下では，2-次の正方行列 A が，**回転行列**であるとは，$a,\ b \in \mathbb{R}$ で，

x-B-96-0 (B-200) $a^2 + b^2 = 1$ 　となるものがとれて，$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ となる

こととし，この意味での回転行列の惹き起こす，$\mathbb{R}^2$ から，$\mathbb{R}^2$ への線型変換を，**原点を中心とする回転**，と呼ぶことにする． このような A は，直交行列だから，定理 4.47 により，A の惹き起こす線型変換は，2 点のユークリッド距離を保存する．つまり，原点を中心とした回転は，ユークリッド距離に関する等長変換である．これに対し，マンハッタン距離は，原点を中心とした回転では保存されないが，原点を中心とした回転で 2 点を移したとき，それらの点のマンハッタン距離は，もとの 2 点のマンハッタン距離の，2 倍で，抑えられる[*61]:

P-B-26-1 **補題 B.69** A を回転行列として，$a,\ b \in \mathbb{R}$ を，(B-200) でのように取る．このとき，任意の $\mathbb{c},\ \mathbb{d} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$d_M(A\mathbb{c},\ A\mathbb{d}) \leq 2d_M(\mathbb{c},\ \mathbb{d})$ が成り立つ．

証明． $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ とする．(B-200) により，

x-B-96-1 (B-201) $0 \leq |\,a\,|, |\,b\,| \leq 1$

となることに留意すると，

$$d_M(A\mathbb{c},\ A\mathbb{d}) = d_M(\begin{bmatrix} ac_1 - bc_2 \\ bc_1 + ac_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ad_1 - bd_2 \\ bd_1 + ad_2 \end{bmatrix})$$

---

*61 ここでの “2 倍” は，かなりラフな評価となっていますが，これは，(角度の概念をこれまでに構築した数学のみから導入しようとしている) ここでの議論の現段階で，容易に厳密な証明を与えることのできるもの，として，意図的にラフに選ばれた評価です．最良の評価が何になるか，という問題は，読者の演習とします．

$$\underbrace{=}_{d_M\text{ の定義}} |\,a(d_1-c_1)+b(c_2-d_2)\,|+|\,a(d_2-c_2)+b(d_1-c_1)\,|$$
$$\underbrace{\le}_{(2.63)\text{ と }(2.64)\text{ による}} |\,a\,|\cdot|\,d_1-c_1\,|+|\,b\,|\cdot|\,c_2-d_2\,|+|\,a\,|\cdot|\,d_2-c_2\,|+|\,b\,|\cdot|\,d_1-c_1\,|$$
$$\underbrace{\le}_{(\text{B-201})\text{ による}} |\,d_1-c_1\,|+|\,c_2-d_2\,|+|\,d_2-c_2\,|+|\,d_1-c_1\,|$$
$$=2(|\,d_1-c_1\,|+|\,d_2-c_2\,|)\underbrace{=}_{d_M\text{ の定義}}2d_M(\mathbb{c},\mathbb{d})$$

である． □ (補題 B.69)

マンハッタン距離は，次のような加法性を持つ． $\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_m\in\mathbb{R}^2$ で， $i\in\overline{m}$ に対し，$\mathbb{a}_i=\begin{bmatrix}a_i^1\\a_i^2\end{bmatrix}$ とするとき，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_m$ が，**直角直線上にある** (rectilinear) とは[*62]，($a_1^1\le a_2^1\le\cdots\le a_m^1$，または，$a_1^1\ge a_2^1\ge\cdots\ge a_m^1$)，かつ，($a_1^2\le a_2^2\le\cdots\le a_m^2$，または，$a_1^2\ge a_2^2\ge\cdots\ge a_m^2$) が成り立つこと，とする．

補題 B.70 $\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_m\in\mathbb{R}^2$ が，直角直線上にあるとき， P-B-26-1-0

$$d_M(\mathbb{a}_1,\,\mathbb{a}_m)=\textstyle\sum_{i\in\overline{m-1}}d_M(\mathbb{a}_i,\,\mathbb{a}_{i+1})$$

が成り立つ．

証明． $\sum_{i\in\overline{m-1}}d_M(\mathbb{a}_i,\,\mathbb{a}_{i+1})$

$$=\underbrace{|\,a_2^1-a_1^1\,|+|\,a_2^2-a_1^2\,|}_{=d_M(\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2)}+\underbrace{|\,a_3^1-a_2^1\,|+|\,a_3^2-a_2^2\,|}_{=d_M(\mathbb{a}_2,\mathbb{a}_3)}+\cdots$$
$$+\underbrace{|\,a_m^1-a_{m-1}^1\,|+|\,a_m^2-a_{m-1}^2\,|}_{=d_M(\mathbb{a}_{m-1},\mathbb{a}_m)}$$

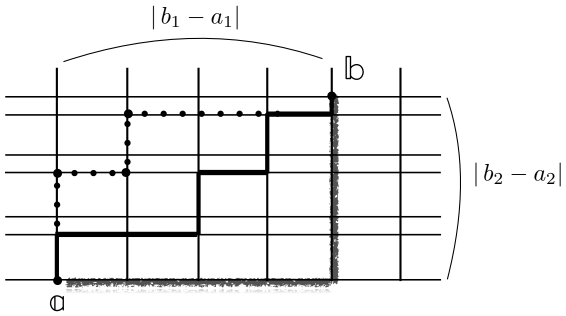
---

*62 この用語の使い方は，ここでとりあえず命名したもので，他の文献では見当りません．数学で必要となる用語の多くは，誰かが過去に既に命名しているもので間に合うことが，多いのですが，時には，適当なものを新しく導入する必要があり，それが，例えば，ここで起きています．ちなみに，昔には，同じ概念に違う人が，違う名前をつけてしまう， ということがよく起こっているのですが，現在は，文献の検索が容易で，ネット上でチェックできるので，既に名付けられている概念に，違う名前をもう一度つけてしまう，という危険は，それほどは高くないはずです．ここでも，この概念にスタンダードな名前が付けられていないことは，ネット上を含め，調べられる範囲では調べています．

$$
\begin{aligned}
&= |\,a_2^1 - a_1^1\,| + |\,a_3^1 - a_2^1\,| + \cdots + |\,a_m^1 - a_{m-1}^1\,| \\
&\quad + \ |\,a_2^2 - a_1^2\,| + |\,a_3^2 - a_2^2\,| + \cdots + |\,a_m^2 - a_{m-1}^2\,| \\
&= |\,a_m^1 - a_1^1\,| + |\,a_m^2 - a_1^2\,| = d_M(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_m)
\end{aligned}
$$

により，よい． □ (補題 B.70)

次の事実は，上の補題 B.70 からの帰結である：　ニューヨーク (や他の格子状の道路網を持つ都市) では，出発点から直角直線的に進んで，目的地に到達する限り (つまり明らかな回り道をしない限り)，どの道を選んでも，タクシーの走る距離は同じである：



♦ figur-B-01bis.pdf

議論を続ける前に，以下で行なうことの概略を述べて，「角度の導入」という文脈での議論の流れを見ておくことにする．

付録 A の第 A.1 節では，角度を，単位円上の弧の長さを介して，規定したが，直観としては，既にそこにある，「弧の長さ」を，我々が，第 B.2 節で導入した $\mathbb{R}$ の意味での平面 $\mathbb{R}^2$ で厳密に規定するためには，まず，曲線の長さを定義するために積分法を確立することが必要になる．ところが，このための議論ができるためには，まず，微分法を導入しなくてはならず，自然な議論で円弧の長さを計算するためには，$\mathbb{R}^2$ の点の極座標表示と，極座標変換が，必要になり，そのためには，弧度法による角度の概念が必要になるので，循環が起ってしまう [*63]．

---

*63 ここで言っている “循環” という言葉の使い方については，本巻の凡例の，(g) の脚注*29 を，参照してください．

数学の思索を進めるときには，ほとんど循環に近い議論をしたり，見かけ上の循環を残して，螺旋状に先に進んでゆくことが必要になることもあり，第 4 章では，それに近いような

一方，この角度の概念を，本節の段階で仮定できる知識だけから，循環をさけて導入するのは，そう簡単なことではない．しかし，これは，絶対に不可能である，というわけでもない[*64]．これを実行するためのアクロバットが，これから行なおうとしていることである．

角度の概念の導入に際して使える道具の一つに，原点を中心とする回転がある．原点を中心とする回転の，角度を介した 4.2.3 節でのような扱いは，ここではできないので，回転行列を (B-200) で定義し直し，原点を中心とする回転を，この意味での回転行列で表現される，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の線型変換と考えることにしたのだった．以下で考える回転は，原点を中心としたもののみ，なので，"原点を中心とした" という形容は，屡々省略することにする．

上でも述べたように，角度は未だ定義されておらず，我々は，まさに，この角度の概念を，実数体の積集合 $\mathbb{R}^2$ の文脈に導入しようとしている，という，ここでの立場では，一般の角度 θ に対する，「角度 θ の回転」を使うわけにはいかないが，原点を中心とした，角度 π の回転[*65] r_π と，その表現行列

$$\text{(B-202)}\quad R_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{x-B-97}$$

や，角度 $\frac{1}{2}\pi$ の回転 $r_{\frac{1}{2}\pi}$ と，その表現行列

$$\text{(B-203)}\quad R_{\frac{1}{2}\pi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{x-B-98}$$

は，議論の前提として用いることができる．ただし，脚注*65 でも述べたように，"π" は，ここではまだ記号に過ぎず，具体的な実数としての π は，(B-225) で定義されることになる．

ある回転が，回転行列 A で表現されているとき，その回転角の半分の (角度の) 回転を，(4.83), (4.84) で与えた回転行列 $A_{\frac{1}{2}}$ で表現されるものとする，

議論の進め方をしたところもありましたが，ある数学理論が完結したものとして提示されたときには，当然のことながら，そこに本質的な循環が残っていることは，許されません．

*64 もし本当に不可能なのだとしたら，循環が残ってしまうことになり，数学にとって非常に具合の悪いことになってしまいます．

*65 π の値については，補題 B.76 の後で，その値を特定する必要性 (とその可能性) が出てくるまで，とりあえずは，不定の定数として扱かうことにします．補題 B.76 までで，π に関する知識で必要となっているのは，それが正の数で，円周一回転の半分の回転の表現として使われている，ということのみです．　what-is-pi

ということも，現段階で用いることができる議論の前提の一つである[*66].

ここでの意味での回転行列の全体が，積に関して閉じていることは，容易に示せるので (以下の補題 B.72 を参照)，行列の積が，対応する線型写像の合成に対応する (定理 4.24) ことを思い出すと，回転行列の積が，回転角度の和に，対応する，ということも，前提としてよいだろう．特に，この，回転行列の積と，回転角の和との，対応を踏まえると，補題 4.53 で得られている，等式 $(A_{\frac{1}{2}})^2 = A$ (4.85) や，補題 4.54 は，補題 4.53 での回転行列 $A_{\frac{1}{2}}$ が， A の回転角の $\frac{1}{2}$ の回転角を持つ回転を，表現するものになっている，という解釈の正しさの裏付けになっている，と考えてよい．

回転行列 A が，x-軸上の単位ベクトル $\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を，第 1 象限にあるベクトル $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ に移すときには，$a, b > 0$ で，$b = \sqrt{1-a^2}$ かつ，$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ となっている (定理 4.52[*67])．このときには，補題 4.53 により，A の回転角の半分の回転角を持つ回転の表現行列 $A_{\frac{1}{2}}$ は，

$$A_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{bmatrix}$$

である．

これらを頭に置いて，次の定義をする:

$H_1 = R_\pi$ とする．

x-B-98-0 (B-204) $$H_n = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ (ただし，} b = \sqrt{1-a^2}\text{)}$$

となっている，として，

x-B-99 (B-205) $$H_{n+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+a}{2}} & -\sqrt{\frac{1-a}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-a}{2}} & \sqrt{\frac{1+a}{2}} \end{bmatrix}$$

とする．(B-202) により，H_1 は，(B-204) のような形をしていて，$H_2 = H_{\frac{1}{2}\pi}$

[*66] これらの式を導出している補題 4.53 の証明では，角度の概念は，全く使われていないことに注意してください．

[*67] 定理 4.52 の証明では，三角関数に関する知識を先取りして使っていますが，ここでは，この定理が実際に使われているわけではなく，以下での定義 (B-204) の，モティヴェーションの説明として，参照されているにすぎないことに，注意しておきます．

となり，$H_{\frac{1}{2}\pi}$ も，(B-204) の形をしていることに注意する．より一般的には，H_n が，(B-204) の形をしていれば，(B-205) により求まる H_{n+1} も，(B-204) の形をしていることが，分かる．

$(H_n)^{2^n} = E_2$ である (補題 B.71, (1))．つまり，H_n は，円周の一回転を 2^n 等分する回転を与える回転行列になっている．ここで，

$$\text{(B-206)}\quad \mathsf{D} := \{(H_n)^k \,:\, n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N}^*,\, k < 2^n\} \qquad \text{x-B-99-0}$$

とする．D は，行列の掛け算に関して閉じていて，便宜上，ここでは，行列の掛け算を $\bullet$ で表わすことにすると，$\mathcal{D} := \langle \mathsf{D}, \bullet, E_2 \rangle$ はアーベル群となる (補題 B.71, (4))．

$$\text{(B-207)}\quad Q_{rad} := \{\, \frac{k}{2^{n-1}}\pi \,:\, n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N}^*,\, k < 2^n\} \qquad \text{x-B-99-1}$$

とすると [*68]，Q_{rad} は，例 B.10 で定義した $+_{rad}$ で，閉じているから，$+_{rad}$ の $(Q_{rad})^2$ への制限も，簡単のために $+_{rad}$ と書くことにして，構造

$$\text{(B-208)}\quad \mathcal{Q}_{rad} := \langle Q_{rad}, +_{rad}, 0 \rangle \qquad \text{x-B-99-2}$$

を考えることができる．ここで，

$$\text{(B-209)}\quad i_{rad} : \mathsf{D} \to Q_{rad};\ \ (H_n)^k \ \mapsto\ \frac{k}{2^{n-1}}\pi \qquad \text{x-B-99-3}$$

とすると，$i_{rad} : \mathcal{D} \overset{\cong}{\rightarrow} \mathcal{Q}_{rad}$ となる (補題 B.74)．

C で，原点を中心とする単位円を，表わすことにした ((A-2) を参照) ことを思い出して，

$$\text{(B-210)}\quad Q_{\mathsf{C}} := \{A\mathbb{e}_1^2 \,:\, A \in \mathsf{D}\} \subseteq \mathsf{C} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{x-B-99-4}$$

とする．Q_{C} の，すべての要素 $\mathbb{d}$ は，ある $n,\, k \in \mathbb{N},\, 0 \le k < 2^n$ に対する，$(H_n)^k\mathbb{e}_1^2$ と表わされるから，このような n と，k に対し，

$$\text{(B-211)}\quad \mathbb{d}_n^k := (H_n)^k\mathbb{e}_1^2 \qquad \text{x-B-99-4-0}$$

とすると，$Q_{\mathsf{C}} = \{\mathbb{d}_n^k \,:\, n, k \in \mathbb{N},\, 0 \le k < 2^n\}$ である．

[*68] この文字 ‘Q’ は，有理数体 $\mathbb{Q}$ の類推から選ばれたものです．

x-B-99-5

(B-212) $i_{\mathsf{C}} : Q_{\mathsf{C}} \to \mathsf{D};\ \ \mathbb{d}^k_n \ \mapsto\ (H_n)^k$

とすると，i_{C} は, well-defined で, 全単射となる (補題 B.75). そこで, Q_{rad} 上の距離 d_{rad} — (B-152) の d_{rad} を, Q_{rad} に制限したもの — を, $(i_{rad} \circ i_{\mathsf{C}})^{-1}$ で, Q_{C} にコピーして得られる, Q_{C} 上の距離を, d_{C} とする.

$\mathbb{d}^{k_1}_{n_1}$, $\mathbb{d}^{k_2}_{n_2} \in Q_{\mathsf{C}}$ (n_1, n_2, k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$, $0 \le k_1 < 2^{n_1}$, $0 \le k_2 < 2^{n_2}$) とするとき,

$$
\begin{aligned}
& d_{\mathsf{C}}(\mathbb{d}^{k_1}_{n_1}, \mathbb{d}^{k_2}_{n_2}) = d_{rad}(i_{rad}((H_{n_1})^{k_1}),\ i_{rad}((H_{n_2})^{k_2})) \\
& = \min\{\, |\, 2^{n_2} k_1 - 2^{n_1} k_2 \,| \cdot \frac{\pi}{2^{\,n_1+n_2-1}}, \\
& \qquad\qquad 2\pi - |\, 2^{n_1} k_2 - 2^{n_2} k_1 \,| \cdot \frac{\pi}{2^{n_1+n_2-1}} \,\}
\end{aligned}
$$

である. 例えば,

$$
\begin{aligned}
& d_{\mathsf{C}}(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = d_{\mathsf{C}}(\mathbb{d}^1_1,\ \mathbb{d}^0_1) \\
& = d_{rad}(i_{rad}((H_1)^1),\ i_{rad}((H_1)^0)) = d_{rad}(\tfrac{1}{2^0}\pi,\ \tfrac{0}{2^0}\pi) = \pi
\end{aligned}
$$

である.

♦ ここで $+_{Q_{\mathsf{C}}}$ を $+_{rad} \restriction (Q_{rad})^2$ を $(i_{rad} \circ i_{\mathsf{C}})^{-1}$ で, Q_{C} 上にコピーしたもの，として定義する

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & & & & \\
\cup\!\!| & & & & \\
\mathsf{C} & & \text{回転行列の全体} & & [\,0,\ 2\pi\,) \\
\cup\!\!| & & \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\
Q_{\mathsf{C}} & \longrightarrow & \mathsf{D} & \longrightarrow & Q_{rad} \\
 & i_{\mathsf{C}} & & i_{rad} & \\
\mathcal{Q}_{\mathsf{C}} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{Q}_{rad}
\end{array}
$$

d_{C} と, d_E (より正確には, $d_E \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2$) は, リプシッツ同値である (定理 B.78 — この証明で, 上で導入したマンハッタン距離 d_M が, 活用される).

Q_{C} は, C で稠密で (補題 B.80, (4)), C は, d_E に関し完備 (補題 B.79) だから, C は, Q_{C} の d_E に関する完備化である. したがって, 定理 B.62 により, C 上の距離 $\tilde{d}_{\mathsf{C}}$ で, d_{C} を拡張し, $d_E \restriction (\mathsf{C})^2$ とリプシッツ同値となるものが, 一意に存在する.

ここで, ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathsf{C}$ に対し, $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度を, $\tilde{d}_{\mathsf{C}}(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ のこと,

として定義し，正負の区別のある，第 A.1 節で述べたような回転の角度については，ベクトルの属す象限を加味して，後述の (B-235), (B-236) でのように規定すると，この角度は，角度の満たすべき性質を，すべて満たすことが示せる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 & & & \\
 & \cup\!\vert & & & \\
\tilde{d}_{\mathsf{C}} & \mathsf{C} & \text{回転行列の全体} & [\,0,\,2\pi\,) & d_{rad} \\
 & \cup\!\vert & \cup\!\vert & \cup\!\vert & \\
 & Q_{\mathsf{C}} \arrow[r, "i_{\mathsf{C}}"'] & \mathsf{D} \arrow[r, "i_{rad}"'] & Q_{rad} & \\
 & \mathcal{Q}_{\mathsf{C}} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{Q}_{rad} & \\
d_{\mathsf{C}} \arrow[uuuu, bend left, "\text{定理 B.62}"] & & & d_{rad}\ (= d_{rad} \upharpoonright (\mathcal{Q}_{rad})^2\ ) \arrow[lll, bend left] &
\end{tikzcd}
$$

以下で，上で与えた角度の概念の導入の概略で保留した，細部を埋める命題たちの，証明を与える．もちろん，これらの証明は，B2, B3 で確立した事柄のみに基づく，循環を含まないものになっていなければ，ならない．

補題 B.71 以下での，H_n, D は，それぞれ (B-205) と (B-206) で定義されたものである． P-B-27

（1） すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$(H_n)^{2^n} = E_2$ である．

（2） すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対し，$H_n = (H_{n+m})^{2^m}$ である．

（3） すべての $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$(H_{n_1})^{k_1}(H_{n_2})^{k_2} = (H_{n_1+n_2})^{k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1}} = (H_{n_2})^{k_2}(H_{n_1})^{k_1} \tag{B-213}$$ x-B-99-6

である．ただし，$k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ に対し，$(H_n)^k = (\underbrace{(H_n)^{-1}}_{H_n\ \text{の逆行列}})^{|\,k\,|}$ とする．

（4） D は，行列の掛け算に関して閉じていて，$\mathcal{D} = \langle \mathsf{D}, \bullet, E_2 \rangle$ はアーベル群である [*69]．

証明． (1): n に関する帰納法で示す．

[*69] 前と同様に，“$\bullet$” は，行列の掛け算を可視化するために，便宜上，ここで使っている記号です．

$$(H_1)^2 = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

により，主張は，$n = 1$ に対し，成り立つ．

補題 4.53 と，H_n の定義から，

x-B-99-7
$$(H_{n+1})^2 = H_n \tag{B-214}$$

だから，(1) の主張が n に対し成り立つ，とすると，

$$(H_{n+1})^{2^{n+1}} \underbrace{=}_{\text{系 3.11 による}} ((H_{n+1})^2)^{2^n} \underbrace{=}_{\text{(B-214) による}} (H_n)^{2^n} \underbrace{=}_{\text{帰納法の仮定}} E_2$$

となり，主張は $n + 1$ に対しても，成り立つ．

(2): m に関する帰納法で示す．(B-214) により，

$$H_n = (H_{n+1})^2 \; (= (H_{n+1})^{2^1})$$

だから，主張は $m = 1$ に対して成り立つ．

m に対して，主張の等式が成り立つとすると，

$$(H_{n+(m+1)})^{2^{m+1}} = (H_{(n+m)+1})^{2 \cdot 2^m} \underbrace{=}_{\text{(B-214) による}} (H_{n+m})^{2^m} \underbrace{=}_{\text{帰納法の仮定}} H_n$$

により，等式は $m + 1$ に対しても成り立つ．

(3): (2) により，

x-B-99-7-a
$$(H_{n_1})^{k_1} = (H_{n_1+n_2})^{2^{n_2} \cdot k_1}, \quad (H_{n_2})^{k_2} = (H_{n_1+n_2})^{2^{n_1} \cdot k_2} \tag{B-215}$$

だから，

$$(H_{n_1})^{k_1}(H_{n_2})^{k_2} \overbrace{=}^{\text{(B-215) による}} (H_{n_1+n_2})^{2^{n_2}k_1}(H_{n_1+n_2})^{2^{n_1}k_2} \overbrace{=}^{\text{系 3.11, (1) による}} (H_{n_1+n_2})^{2^{n_2}k_1+2^{n_1}k_2}$$
$$= (H_{n_1+n_2})^{2^{n_1}k_2+2^{n_2}k_1} = \cdots = (H_{n_2})^{k_2}(H_{n_1})^{k_1}$$

である．

(4): (3) により，よい． □ (補題 B.71)

補題 B.72 H, H' を回転行列とするとき，HH' も回転行列である． P-B-27-a

証明． $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ を，

(B-216) $(a_1)^2 + (b_1)^2 = 1, \qquad (a_2)^2 + (b_2)^2 = 1$ x-B-98-1

で，$H = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $H' = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ となるものとするとき，HH' も同様の形をした行列となることを示す．

$$HH' = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$$

だから，$a_3 := a_1a_2 - b_1b_2$, $b_3 ;= b_1a_2 + a_1b_2$ とすると，$HH' = \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$ である．ここで，

$$\begin{aligned}
&(a_3)^2 + (b_3)^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2 \\
&= (a_1)^2(a_2)^2 - \cancel{2a_1a_2b_1b_2} + (b_1)^2(b_2)^2 + (b_1)^2(a_2)^2 \\
&\quad + \cancel{2a_1a_2b_1b_2} + (a_1)^2(b_2)^2 \\
&= (a_1)^2((a_2)^2 + (b_2)^2) + (b_1)^2((a_2)^2 + (b_2)^2) \underbrace{=}_{\text{(B-216) による}} (a_1)^2 + (b_1)^2 \\
&\underbrace{=}_{\text{(B-216) による}} 1
\end{aligned}$$

だから，HH' は，回転行列の定義での性質 (B-200) を満たしている．

□ (補題 B.72)

補題 B.73 すべての $H \in \mathsf{D}$ は，回転行列である． P-B-27-0

証明． H_n, $n \in \mathbb{N}$ に対し，主張が成り立つことは，H_n の帰納的定義の一部として，既に確かめてある．D の要素 H は，ある n, $k \in \mathbb{N}$ に対し，$(H_n)^k$ と表わせるから，補題 B.72 により，すべての $H \in \mathsf{D}$ は，回転行列である．

□ (補題 B.73)

補題 B.74 $i_{rad} : \mathsf{D} \to Q_{rad}$ を，(B-209) でのように定めることができて，i_{rad} は，$\mathcal{D} = \langle \mathsf{D}, \bullet, E_2 \rangle$ から，$\mathcal{Q}_{rad} = \langle Q_{rad}, +_{rad}, 0 \rangle$ への同型写像となる． P-B-28

証明． i_{rad} が，well-defined であることを見るために，$n_1,\ k_1,\ n_2,\ k_2 \in \mathbb{N}^*$ で，$0 \leq k_1 \leq 2^{n_1},\ 0 \leq k_2 \leq 2^{n_2}$ となるものに対し，

x-B-98-2 $$(H_{n_1})^{k_1} = (H_{n_2})^{k_2} \tag{B-217}$$

だったとする．

例えば，$n_1 < n_2$ として，$m = n_2 - n_1$ とすると，補題 B.71, (2) により，$(H_{n_1})^{k_1} = (H_{n_2})^{2^m k_1}$ だから，(B-217) により，$k_2 = 2^m k_1$ となるので，

$$\frac{k_2}{2^{n_2-1}} = \frac{2^m k_1}{2^{n_1-1} \cdot 2^m} = \frac{k_1}{2^{n_1-1}}$$

である．

i_{rad} が，単射であることは，このことと，i_{rad} の定義から従う．

i_{rad} が，上射であることは，$r \in Q_{rad}$ として，$n \in \mathbb{N}$ と $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ を，$r = \frac{k}{2^{n-1}}\pi$ となるように取ると，$(H_n)^k \in \mathsf{D}$ で，$i_{rad}((H_n)^k) = \frac{k}{2^{n-1}}\pi = r$ であることから，よい．

$$i_{rad}(E_2) = i_{rad}((H_n)^0) = \frac{0}{2^{n-1}}\pi = 0$$

である．

i_{rad} が，群の演算を保存すること，を見るために，$(H_{n_1})^{k_1},\ (H_{n_2})^{k_2} \in \mathsf{D}$ とする．ここに，$n_1,\ n-2 \in \mathbb{N}\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}^*$ で，

x-B-99-7-0 $$k_1 < 2^{n_1}, \quad k_2 < 2^{n_2} \tag{B-218}$$

である．

x-B-99-8 $$i_{rad}((H_{n_1})^{k_1}(H_{n_2})^{k_2}) \underbrace{=}_{\text{補題 B.71, (3)}} i_{rad}((H_{n_1+n_2})^{k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1}}) \tag{B-219}$$

である．

場合 I： $k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1} < 2^{n_1+n_2}$ のとき．このときには，

$$\text{(B-219) の式} \underbrace{=}_{i_{rad}\text{ の 定義から}} \frac{k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2-1}}\pi = \frac{k_1}{2^{n_1-1}}\pi + \frac{k_2}{2^{n_2-1}}\pi$$

$$\underbrace{=}_{+_{rad}\text{ の定義による}} \frac{k_1}{2^{n_1-1}}\pi +_{rad} \frac{k_2}{2^{n_2-1}}\pi \underbrace{=}_{i_{rad}\text{ の定義から}} i_{rad}((H_{n_1})^{k_1}) +_{rad} i_{rad}((H_{n_2})^{k_2})$$

である．

場合 II： $k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1} \geq 2^{n_1+n_2}$ のとき．このときには，(B-218) により，$2^{n_1+n_2} \leq k_1 2^{n_2} + k_2 2^{n_1} < 2 \cdot 2^{n_1+n_2}$ だから，

$$
\begin{aligned}
\text{(B-219) の式} \underbrace{=}_{\text{補題 B.71, (1)}} & i_{rad}((H_{n_1+n_2})^{k_1 2^{n_2}+k_2 2^{n_1}-2^{n_1+n_2}}) \\
\underbrace{=}_{i_{rad}\text{ の定義による}} & \frac{k_1}{2^{n_1-1}}\pi + \frac{k_2}{2^{n_2-1}}\pi - 2\pi \underbrace{=}_{+_{rad}\text{ の定義による}} \frac{k_1}{2^{n_1-1}}\pi +_{rad} \frac{k_2}{2^{n_2-1}}\pi \\
\underbrace{=}_{i_{rad}\text{ の 定義から}} & i_{rad}((H_{n_1})^{k_1}) +_{rad} i_{rad}((H_{n_2})^{k_2})
\end{aligned}
$$

である．　❑ (補題 B.74)

補題 B.75 $Q_{\mathsf{C}} \subseteq \mathbb{R}^2$ を，(B-210) でのように取ると，(B-212) で定義された $i_{\mathsf{C}} : Q_{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$ は，well-defined で，全単射となる． P-B-29

証明． $j_{\mathsf{C}} : \mathsf{D} \to Q_{\mathsf{C}};\ H \mapsto H\mathbb{e}_1^2$ が全単射であることを示せば，このことから，$i_{\mathsf{C}} = (j_{\mathsf{C}})^{-1}$ となることが，分かるから，よい．

j_{C} が，全射であることは，Q_{C} の定義 (B-210) から明らかである．

j_{C} が，単射であることを示すために，$H,\ H' \in \mathsf{D}$ を取る．このとき，補題 B.73 により，$a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ で，$a^2+b^2 = 1$, $a'^2+b'^2 = 1$, $H = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $H' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$ となるものが，取れる．$j_{\mathsf{C}}(H) = H\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $j_{\mathsf{C}}(H') = H'\mathbb{e}_1^2 = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ だから，$j_{\mathsf{C}}(H) = j_{\mathsf{C}}(H')$ なら，$a = a'$, $b = b'$ となり，$H = H'$ である．　❑ (補題 B.75)

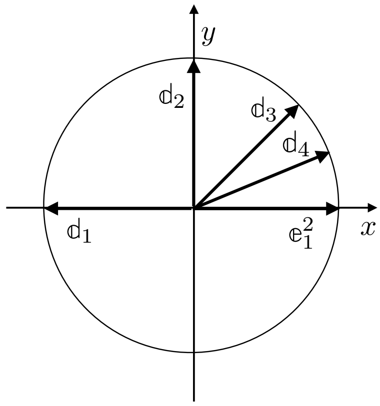
以下の補題 B.76 と，補題 B.77 は，(三角関数等の導入がまだできていない) 今の段階で使える道具のみを用いて，定理 B.78 を確立することを目標に導入されている．このため，そこで示されている不等式の一部 (例えば，補題 B.76, (2) の不等式) は，必ずしも最良のものではない．

以下では，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

(B-220) $\mathbb{d}_n := H_n\mathbb{e}_1^2 \quad (= (i_{\mathsf{C}})^{-1}(H_n))$ x-B-99-9

とする．((B-211) の記法では，$\mathbb{d}_n = \mathbb{d}_n^1$ である)．

$$\mathbb{d}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{d}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \ldots \text{ である．}$$



また，

x-B-99-10　(B-221)　$p_n := 2^{n-1} \cdot d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$,

x-B-99-11　(B-222)　$P_n := 2^{n-1} \cdot d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$,

とする．

$p_1 = 2^{1-1} \cdot 2 = 2,\ p_2 = 2^{2-1} \cdot \sqrt{2} = 2.828\cdots$,

$p_3 = 2^{3-1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3.061\cdots, \ldots$

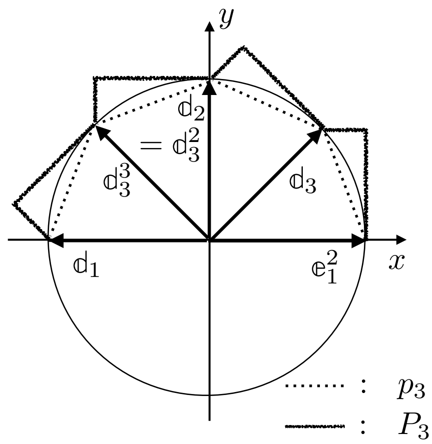
$P_1 = 2^{1-1} \cdot 2 = 2,\ P_2 = 2^{2-1} \cdot 2 = 4,\ P_3 = 2^{3-1}((1 - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})) = 4, \ldots$

である．

より一般的には，以下が成り立つ．$n \in \mathbb{N}$ と $k \in \overline{2^{n-1}}$ に対し，

x-B-99-12　(B-223)
$$\mathbb{d}_n^k \underbrace{=}_{\mathbb{d}_n^k \text{ の定義 (B-211) による}} (H_n)^k \mathbb{e}_1^2 \overbrace{=}^{i_{\mathbb{C}} \text{ の定義 (B-212) と，} i_{\mathbb{C}} \text{ が全単射であること (補題 B.75) による}} (i_{\mathbb{C}})^{-1}((H_n)^k)$$

に，留意する．



♦ figur-B-03.pdf

補題 B.76　(1)　$\langle p_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ は実数の上昇列である． P-B-30

(2)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$p_n \le P_n \le 8$ が成り立つ．

証明． (1): $p_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} d_E(\mathbb{d}_{n+1}, \mathbb{e}_1^2)$ で，$p_n = 2^{n-1} d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$ だから (p_n の定義 (B-221) を参照)，$p_n \le p_{n+1}$ を言うには，

$$d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2) \le 2 d_E(\mathbb{d}_{n+1}, \mathbb{e}_1^2)$$

が言えればよい．

これは，

$$\text{(B-224)}\quad d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{d}_{n+1}) \underbrace{=}_{\mathbb{d}_n \text{ の定義 (B-220) による}} d_E(H_n \mathbb{e}_1^2, H_{n+1}\mathbb{e}_1^2)$$
$$\underbrace{=}_{\text{補題 B.71, (2) で } m=1 \text{ としたものによる}} d_E(H_{n+1}\mathbb{e}_1^2, H_{n+1}(H_{n+1}\mathbb{e}_1^2)) \overbrace{=}^{H_{n+1} \text{ は，距離を保存する (定理 4.47) ことによる}} d_E(\mathbb{e}_1^2, H_{n+1}\mathbb{e}_1^2)$$
$$= d_E(\mathbb{d}_{n+1}, \mathbb{e}_1^2)$$

x-B-99-12-0

だから，

$$d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2) \underbrace{\le}_{d_E \text{ は三角不等式を満たす}} d_E(\mathbb{d}_{n+1}, \mathbb{e}_1^2) + d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{d}_{n+1}) \underbrace{=}_{\text{(B-224)}} 2 d_E(\mathbb{d}_{n+1}, \mathbb{e}_1^2)$$

により，よい．

(2): $p_n \le P_n$ となることは，補題 B.64 と，p_n, P_n の定義 (B-221), (B-222) により，よい．

$2^{1-1} \cdot d_M(\mathbb{d}_1, \mathbb{e}_1^2) = 2 < 8$, だから，もう一つの不等号の，$n = 1$ に対し成り立つ．$n > 1$ のときには，$\mathbb{R}^2$ の点列 $\mathbb{d}_n^0$, $\mathbb{d}_n^1, \dots, \mathbb{d}_n^{2^{n-2}} = \mathbb{d}_2$ が直角直線上にあることに留意すると，

$$P_n \underbrace{=}_{P_n \text{ の定義}} 2^{n-1} \cdot d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2) = 2(2^{n-2} \cdot d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2))$$
$$\underbrace{\le}_{\text{補題 B.69 による}} 2\left(\textstyle\sum_{k \in \overline{2^{n-2}}} 2 d_M(\mathbb{d}_n^{k-1}, \mathbb{d}_n^k)\right) \underbrace{=}_{\text{補題 B.70}} 2(2 \underbrace{d_M(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{d}_2)}_{=2}) = 8$$

である． □ (補題 B.76)

ここまでの議論では，π は，値が未定の定数として扱ってきたが，以下では，π の具体的な値が必要となる．次の π の定義は，古代ギリシャ数学での π の扱いの，厳密化と言うことができる，だろう．

補題 B.76 と定理 B.39 により，実数列 $\langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は，ある実数に収束する．そこで，

x-B-99-13 (B-225) $\pi := \lim_{n\to\infty} p_n$

とおく．

P-B-31 **補題 B.77** （1） すべての $n, n' \in \mathbb{N}$, $1 < n \le n'$ に対し，

x-B-99-13-0 (B-226) $$2^{n'-n} d_E(\mathbb{d}_{n'}, \mathbb{e}_1^2) \le \frac{1}{2^{n-1}}\pi \le d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$$

が成り立つ．特に，すべての $n \in \mathbb{N}\{1\}$ に対し，$p_n \le \pi \le P_n$ である．

（2） すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ と，$k \in \{0, 1, \dots, 2^{n-2}\}$ に対し，

x-B-99-14 (B-227) $$d_E(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{e}_1^2) \le \frac{k}{2^{n-1}}\pi \le 2d_M(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{e}_1^2)$$

が成り立つ．

（3） すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ と k, $k' \in \{0, 1, \dots, 2^{n-2}\}$ $k \le k'$ に対し，

x-B-99-15 (B-228) $$d_E(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{d}_n^{k'}) \le \frac{k'-k}{2^{n-1}}\pi \le 4d_M(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{d}_n^{k'})$$

が成り立つ．

証明． (1): $\mathbb{R}^2$ の点列 $\mathbb{e}_1^2 = \mathbb{d}_{n'}^0$, $\mathbb{d}_{n'}^1$, $\mathbb{d}_{n'}^2$, $\dots$, $\underbrace{\mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}} = \mathbb{d}_n}_{\text{補題 B.71,(2)}}$ は，直角直線上にあることに注意する (ここで，条件 $1 < n$ が必要になる)．

(B-224) と同様に，

x-B-99-16 (B-229) すべての $i \in \overline{2^{n-1}}$ に対し，$d_E(\mathbb{d}_{n'}^i, \mathbb{d}_{n'}^{i-1}) = d_E(\mathbb{d}_{n'}, \mathbb{e}_1^2)$

である ($\mathbb{d}_{n'}^1 = \mathbb{d}_{n'}$ に注意する)．

したがって，

x-B-99-17 (B-230) $2^{n'-n} d_E(\mathbb{d}_{n'}, \mathbb{e}_1^2)$

$$\underbrace{=}_{(\text{B-229})} d_E(\mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}}, \mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}-1}) + d_E(\mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}-1}, \mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}-2})) + \cdots + d_E(\mathbb{d}_{n'}^1, \mathbb{e}_1^2)$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{補題 B.64}} d_M(\mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}}, \mathbb{d}_{n'}^{2^{n'-n}-1}) + \cdots + d_M(\mathbb{d}_{n'}^1, \mathbb{e}_1^2) \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.70}} d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$$

である．したがって，上の不等式の両辺を 2^{n-1} 倍すると，

(B-231) $$p_{n'} = 2^{n'-1} d_E(\mathbb{d}_{n'}, \mathbb{e}_1^2) = 2^{n-1}(2^{n'-n} d_E(\mathbb{d}_{n'}, \mathbb{e}_1^2))$$

$$\underbrace{\leq}_{(\text{B-230})} 2^{n-1} d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2) = P_n$$

が得られる．よって，

$$p_{n'} \underbrace{\leq}_{\pi\text{ の定義と補題 B.76,(1)}} \pi \underbrace{=}_{\pi\text{ の定義 (B-225)}} \lim_{k\to\infty} p_k \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.37,(1) による}} P_n$$

となる．この各辺を 2^{n-1} で割ると，(B-226) が得られる．

(2): $$d_E(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{e}_1^2) \underbrace{\leq}_{d_E\text{ は三角不等式を満たす}} d_E(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{d}_n^1) + d_E(\mathbb{d}_n^1, \mathbb{e}_1^2)$$

$$\underbrace{\leq \cdots \leq}_{d_E\text{ は三角不等式を満たす}} d_E(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{d}_n^{k-1}) + d_E(\mathbb{d}_n^{k-1}, \mathbb{d}_n^{k-2}) + \cdots + d_E(\mathbb{d}_n^1, \mathbb{e}_1^2)$$

$$= k d_E(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2) \underbrace{\leq \frac{k}{2^{n-1}}\pi \leq}_{(\text{B-226})} k d_M(\mathbb{d}_n, \mathbb{e}_1^2)$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{補題 B.69}} 2d_M(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{d}_n^{k-1}) + 2d_M(\mathbb{d}_n^{k-1}, \mathbb{d}_n^{k-2}) + \cdots + 2d_M(\mathbb{d}_n^1, \mathbb{e}_1^2)$$

$$\underbrace{=}_{\text{補題 B.70}} 2d_M(\mathbb{d}_n^k, \mathbb{e}_1^2).$$

(3): $$d_E(\mathbb{d}_n^{k'}, \mathbb{d}_n^k) = d_E((H_n)^k \mathbb{d}_n^{k'-k},\ (H_n)^k \mathbb{e}_1^2) \underbrace{=}_{(H_n)^k\text{ は直交行列，定理 4.47}} d_E(\mathbb{d}_n^{k'-k},\ \mathbb{e}_1^2)$$

$$\underbrace{\leq \frac{k'-k}{2^{n-1}}\pi \leq}_{(2)\text{ による}} 2d_M(\mathbb{d}_n^{k'-k},\ \mathbb{e}_1^2) \underbrace{\leq}_{\text{補題 B.69 による}} 2\cdot 2d_M((H_n)^k \mathbb{d}_n^{k'-k},\ (H_n)^k \mathbb{e}_1^2)$$

$$= 4d_M(\mathbb{d}_n^{k'}, \mathbb{d}_n^k).$$

□ (補題 B.77)

P-B-32 **定理 B.78** Q_{C} 上の距離 d_{C} と $d_E \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2$ は，リプシッツ同値である．

証明． 補題 B.77, (3) により，任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in Q_{\mathsf{C}}$ に対し，

$$\text{(B-232)}\quad d_E \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2|\tfrac{\pi}{2}(\mathbb{a},\mathbb{b}) \le d_{\mathsf{C}}|\tfrac{\pi}{2}(\mathbb{a},\mathbb{b}) \le 4d_M \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2|\tfrac{\pi}{2}(\mathbb{a},\mathbb{b})$$

が成り立つ．d_E と，d_M は，リプシッツ同値だから，$d_E \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2|\frac{\pi}{2}$ と，$d_M \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2|\frac{\pi}{2}$ も，リプシッツ同値である．よって，演習問題 B.57, (2) により，$d_{\mathsf{C}}|\frac{\pi}{2}$ はこれらの距離とリプシッツ同値となる．したがって，系 B.61 (と，リプシッツ同値性が推移律を満たすこと) から，d_C は，$d_E \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2$, $d_M \restriction (Q_{\mathsf{C}})^2$ と，リプシッツ同値である．

□ (定理 B.78)

P-B-33 **補題 B.79** C は，$d_E \restriction \mathsf{C}^2$ に関し完備である．

証明． 定理 B.66, (1) と，補題 B.49, (3) により，$\mathsf{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ が，$\mathbb{R}^2$ の閉集合であること，が示せればよい．

$\langle \mathbb{a}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を C の ($d_E \restriction \mathsf{C}^2$ に関する) コーシー列として，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{a}_n = \begin{bmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \end{bmatrix}$ とする．このとき $\langle \mathbb{a}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ での (d_E に関する) コーシー列でもあるから，補題 B.65 により，$a_1 = \lim_{n\to\infty} a_n^1$, $a_2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2$ がとれて，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ とすると，$\mathbb{a} = \lim^{d_E}_{n\to\infty} \mathbb{a}_n$ である．ここで，

$$\begin{aligned} \|\,\mathbb{a}\,\| &= \sqrt{(\lim_{n\to\infty} a_n^1)^2 + (\lim_{n\to\infty} a_n^2)^2} \\ &\underbrace{=}_{\text{補題 B.65 と同様に示せる (演習!)}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{(a_n^1)^2 + (a_n^2)^2}}_{=1} = 1 \end{aligned}$$

だから，$\mathbb{a} \in \mathsf{C}$ である．

□ (補題 B.79)

$n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{d}_n = \begin{bmatrix} d_n^1 \\ d_n^2 \end{bmatrix}$ とする．

x-B-99-18

$$\text{(B-233)}\quad \alpha_n = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}_{\ge 0},\ a^2 + b^2 = 1, a > d_n^1 \}$$

とする．$\alpha_n \subseteq \mathsf{C}$ で，直観的には，α_n は，C 上の点で $\mathbb{e}_1^2$ から $\mathbb{d}_n$ へ反時計回りに描いた円弧上の点の全体である．ただし． α_n は，$\mathbb{e}_1^2$ は含み，$\mathbb{d}_n$ は含ま

ない，という意味での “半開区間” となっている．$k \in \overline{2^n}$ に対し，

(B-234) $\alpha_n^k = H_n^{k-1}{}''\alpha_n$ x-B-99-19

とする．$\alpha_n^1 = \alpha_n$ である．このとき，

補題 B.80 （1） すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し， P-B-34

$$\mathsf{C} = \alpha_n^1 \dot{\cup} \alpha_n^2 \dot{\cup} \ \cdots \ \dot{\cup} \alpha_n^{2^n}$$

である．

（2） すべての $n \in \mathbb{N}$ と，$\mathbb{a} \in \alpha_n$ に対し，$d_M(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{a}) < \dfrac{\pi}{2^{n-2}}$ である．

♦ x-B-91 と x-B-99-13-0

（3） すべての $n \in \mathbb{N}$ と，$k \in \overline{2^n}$ と，$\mathbb{a} \in \alpha_n^k$ に対し，$d_M(\mathbb{d}_n^{k-1}, \mathbb{a}) < \dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ である．

（4） Q_{C} は，d_E（または，d_M）に関して，C で稠密である．

証明． (1): $n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す．帰納法のステップでは，$k \in \overline{2^n}$ に対し，$\alpha_n^k = \alpha_{n+1}^{2k-1} \dot{\cup} \alpha_{n+1}^{2k}$ が成り立つことを示せばよい．

(2): $\mathbb{a} \in \alpha_n$ とすると，

$$d_M(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{a}) \underbrace{\le}_{\alpha_n \text{ の定義により，よい}} d_M(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{d}_n) \underbrace{\le}_{\text{補題 B.64}} 2d_E(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{d}_n) \underbrace{\le}_{\text{(B-226)}} \frac{\pi}{2^{n-2}}$$

である．

(3): (2) と，補題 B.69 により，よい．

(4): d_E と d_M は，リプシッツ同値だから (補題 B.64)，Q_{C} が，d_E に関して，C で稠密であることと，Q_{C} が，d_M に関して，C で稠密であること，は同値である (補題 B.58).

$\mathbb{a} \in \mathsf{C}$, $m \in \mathbb{N}$ とする．$N \in \mathbb{N}$ を，

$$\frac{\pi}{2^{N-3}} < \frac{1}{m}$$

となるように取る．このとき，(1) により，$k \in \overline{2^N}$ で，$\mathbb{a} \in \alpha_N^k$ となるものが存在するが，(3) により，$d_M(\mathbb{a}, \mathbb{d}_N^{k-1}) < \dfrac{\pi}{2^{N-3}} < \dfrac{1}{m}$ である． □ (補題 B.80)

補題 B.79 と，補題 B.80, (4) により，C は，d_E (または d_M) に関する，Q_{C}

の完備化である．このことと，定理 B.62 を，d_{C} に適用すると，d_{C} を拡張する C 上の距離 $\tilde{d}_{\mathsf{C}}$ で，C 上の d_E と，リプシッツ同値なものが，一意に存在することが，分かる．

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathsf{C}$ に対し，(変位ベクトル) $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ のなす角度を $\tilde{d}_{\mathsf{C}}(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ のこととする．

$\mathbb{d} \in \mathsf{C}$ に対し，($\mathbb{e}_1^2$, $\mathbb{0}$, $\mathbb{d}$ を位置ベクトルと見て)

x-B-99-20

$$\text{(B-235)}\quad \angle \mathbb{e}_1^2\, \mathbb{0}\, \mathbb{d} = \begin{cases} \tilde{d}_C(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{d}), & \mathbb{d}\ \text{が，第 1 象限，または，第 2 象限にあるとき；} \\ 2\pi - \tilde{d}_C(\mathbb{e}_1^2, \mathbb{d}), & \mathbb{d}\ \text{が，第 3 象限，または，第 4 象限にあるとき} \end{cases}$$

とする．また，任意の $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ と $\mathbb{d} \in \mathsf{C}$ に対し，$\angle a\mathbb{e}_1^2\, \mathbb{0}\, b\mathbb{d} = \angle \mathbb{e}_1^2\, \mathbb{0}\, \mathbb{d}$ とし，任意の (位置ベクトル) $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ に対し

x-B-99-21

$$\text{(B-236)}\quad \angle \mathbb{a}\, \mathbb{b}\, \mathbb{c} := \angle \mathbb{e}_1^2\, \mathbb{0}\, \mathbb{d},$$

ただし，$\mathbb{d} \in \mathsf{C}$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ で，$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ は，ある平行移動と，原点を中心とする回転により，それぞれ $a\mathbb{e}_1^2$, $\mathbb{0}$, $b\mathbb{d}$ に (同時に) 移すことができるものとする

として，角度 $\angle \mathbb{a}\, \mathbb{b}\, \mathbb{c}$ を定義する．

付録 C

多角形に対するジョルダンの定理

jordan

本章では，多角形に特化したジョルダンの定理と，三角形分割定理を証明する．ここで与えることになる，多角形に対するジョルダンの定理の証明は，[6] の付録や，[15] での証明のアイデアを元にして書下したものである．一般のジョルダンの定理の証明は，第 II 巻の付録で考察する．

◆ 第 II 巻の付録でジョルダンの定理の一般形を証明する．

三角形分割定理の証明は，[15] を参考にした．

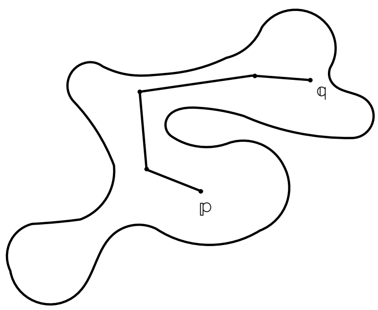
ここで取り上げることになる 2 つ定理は，例えばコンピュータグラフィックスの基礎理論である計算幾何学などの，様々な応用領域につながることになる理論の入口となる．この入口のすぐ先には，たとえば，多角形の内部の判定アルゴリズムや，三角形分割のアルゴリズムの，効率の評価やそれらの改良など，様々な話題がありえるが，ここでは，これについては，一切述べない．

C.1　多角形に対するジョルダンの定理

polygon

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の折線と，多角形の概念は，4.2.2 節の系 4.39 の前で導入した．$\iota_1\cup\ \cdots\ \cup\iota_{n-1}$ を，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n\in\mathbb{R}^2$ の導入する折線とするとき，$\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_n$ を，それぞれ，折線の**始点**と**終点**と，よぶことにする．

領域 $R\subseteq\mathbb{R}^2$ が，**連結**である，とは，任意の $\mathbb{p},\mathbb{q}\in R$ に対し，$\mathbb{p}$ と $\mathbb{q}$ を始点と終点とする折線 P で，$P\subseteq R$ となるものが取れること，とする [*1]．

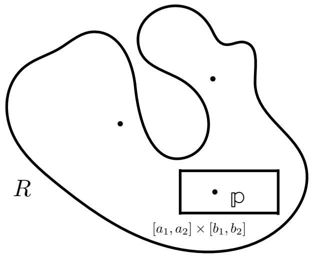


次は，連結性の定義から，容易に示せる:

[*1] ここで「連結性」として導入した概念は，もっと一般化された空間の概念を扱う**位相空間論**では，むしろ，「**弧状連結性**」と呼ばれる概念と関連するものです．一般の空間で「連結性」の概念として定義されるものは，これらの概念より真に一般的なものとなるのですが，ここで考えているような，折線で囲まれた $\mathbb{R}^2$ の領域 (の内部，より一般的には，$\mathbb{R}^n$ の開集合) では，これらの連結性の概念のバリエーションズはすべて同値になるので，ここでは，区別をせずに，ここで導入したものを，手短に「連結性」と呼んでしまうことにしています．

演習問題 C.1　（1）　$R_1,\, R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ が，それぞれ連結で，$R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ なら，$R_1 \cup R_2$ も，連結である． Exerc-C-0

（2）　$R \subseteq \mathbb{R}^2$ が，連結で，ある $a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{R}$ で，$a_1 < a_2,\, b_1 < b_2$ となるものに対し，$R_1 := [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a_1 \leq a \leq a_2,\, b_1 \leq b \leq b_2 \right\}$ として，$R_1 \subseteq R$ なら，任意の $\mathbb{p} \in R_1$ に対し，$R \setminus \{\mathbb{p}\}$ も，連結である．



（3）　$R_1, R_2, R_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ について，$R_1 \cup R_2$ が連結で，$R_2 \cup R_3$ が連結なら，$R_1 \cup R_2 \cup R_3$ も，連結である． ❏

領域 $R \subseteq \mathbb{R}^2$ は，ある正の実数 $\rho \in \mathbb{R}$ で，$R \subseteq \{\mathbb{p} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{p}\| < \rho\}$ となるものが，存在するとき，**有界**である，といい，そのような ρ が存在しないとき，つまり，どんな正の実数 $\rho \in \mathbb{R}$ をとっても，$R \not\subseteq \{\mathbb{p} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{p}\| < \rho\}$ となるとき，**非有界**であるという．

定理 C.2 (多角形に対するジョルダンの定理) $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を多角形とするとき，有界で連結な領域 $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ と，非有界で連結な領域 $\mathcal{R}_1$ で， P-C-0

$$\mathbb{R}^2 = P \mathbin{\dot\cup} \mathcal{R}_0 \mathbin{\dot\cup} \mathcal{R}_1$$

となるものが，存在する．

任意の $\mathbb{p} \in \mathcal{R}_0$ と $\mathbb{q} \in \mathcal{R}_1$ と，$\mathbb{p}$ と $\mathbb{q}$ を，始点と終点とする折線 P_0 に対し，P_0 と P は交差する．つまり，$P \cap P_0 \neq \emptyset$ である．

上のような $\mathcal{R}_0$ と $\mathcal{R}_1$ は，多角形 P に対して，一意に決まるが (演習!)，$\mathcal{R}_0$ を，P の**内部**とよび，$\mathcal{R}_1$ を，P の**外部**とよぶ．

定理 C.2 の証明．　$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \in \mathbb{R}^2,\, i \in \overline{n-1}$ に対する，$\iota_i = \mathbb{a}_i{}^{\sqcap}\mathbb{a}_{i+1}$ と，$\iota_n = \mathbb{a}_n{}^{\sqcap}\mathbb{a}_1$ を，

(C-1)　$\iota_n \cap \iota_1 = \{\mathbb{a}_1\}$ で，すべての $i \in \overline{n-1}$ に対し，$\iota_i \cap \iota_{i+1} = \{\mathbb{a}_{i+1}\}$ で x-C-a-0

ある．また，$i, j \in \overline{n}$, $i \neq j$ で，$\langle i, j \rangle$ が，上の組合せ以外のときには，$\iota_i \cap \iota_j = \emptyset$ となる

ものとして，多角形 P は，$P = \iota_1 \cup \iota_2 \cup \ \cdots\ \cup \iota_n$ と表わされているものとする．$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ を，この表現での多角形の**角** (かく)， または，**頂点**と呼ぶことにする． 角や頂点といっても，ここでの定義では，角度が 180° の角も許すものになっていることに注意する．つまり，$i \in \overline{n}$ に対する $\mathbb{a}_i$ が，そのような角のときには，$\iota_{i-1} \cup \iota_i$ も区間になっている (したがって，ここでの意味での，多角形の表現は，角の枚挙の始点の違いを同一視したとしても，一意ではない)．$\iota_1, \ldots, \iota_n$ は，P の**辺**と呼ぶことにする．

必要なら，原点を中心とする適当な回転を施すことで，

x-C-a　(C-2)　$\mathbb{a}_i$, $i \in \overline{n}$ たちの x-成分 (つまり，第 1 成分) は，互いに異る

としてよい[*2]．

各 $i \in \overline{n}$ に対し，$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ を，$\mathbb{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$ となるものとして，

x-C-0　(C-3)　$L := \{\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a = a_i\} \ : \ i \in \overline{n}\}$

とする，L は，ある $i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}_i$ を含むような y-軸と平行な直線たちの，全体である．L の要素を，x-座標 (第 1 成分) の大きさ順に，

x-C-1　(C-4)　$\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$

と，枚挙する．つまり，各 $k \in \overline{n}$ に対し，$i_k \in \overline{n}$ を，$\mathbb{a}_{i_k} \in \ell_k$ となるように取ると，

x-C-2　(C-5)　$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_n}$

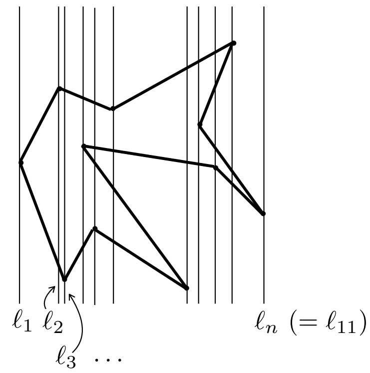
と，なっているものとする．

[*2] $\mathbb{a}_i$, $i \in \overline{n}$ のうちの任意の 2 つについて，これらを，同一の x-成分を持つような 2 点に移すような，原点を中心とする回転は，2 つしかないので，そのようなもののどれとも異る，原点を中心とする回転が存在しますが，これを施すことで，求めているような配置を得ることができます．

　各 $i \in \overline{n-1}$ に対し，

(C-6)　$S_i := \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_{i_k} \leq a \leq a_{i_{k+1}}\},$ x-C-3

(C-7)　$S_i^\circ := \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_{i_k} < a < a_{i_{k+1}}\}$ x-C-3-0



とする．また，

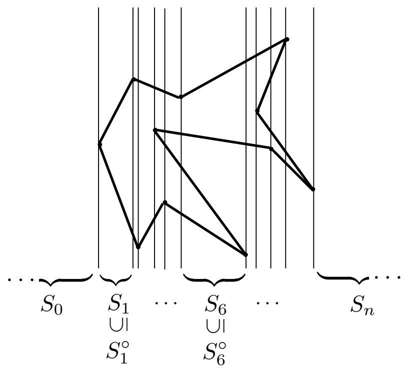
(C-8)　$S_0 := \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq a_{i_1}\},$ x-C-4

(C-9)　$S_n := \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_{i_n} \leq a\}$ x-C-5

とする．

　各 $i \in \overline{n-1}$ に対し，

(C-10)　$I_i := \{\iota_j \,:\, j \in \overline{n},\, \iota_j \cap S_i^\circ \neq \emptyset\}$ x-C-6



とする．

　$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ に対する仮定 (C-2) により，すべての $\iota \in I_i$ は，S_i を横切る（つまり，すべての $\iota \in I_i$ は，ℓ_i とも，ℓ_{i+1} とも，交わる）．I_i の異る要素は，S_i° で交わらないから，I_i の要素は，（開区間 $(a_{k_i}, a_{k_{i+1}})$ 上での）y-座標の値の大小で，線型に順序付けできる．$m_i := \#(I_i)$ として，

(C-11)　$\iota_{i,1}, \iota_{i,2}, \ldots, \iota_{i,m_i}$ x-C-7

を，I_i の要素の，この順序の昇順での，枚挙とする．

　ここで，$i \in \overline{n-1}$ に対し，$T_{i,k}$, $k \in \overline{m_i - 1}$ を，

(C-12)　$T_{i,k} := \{\mathbb{a} \in S_i \,:\, \mathbb{a}$ は，（y-座標に関して）$\iota_{i,k}$ と $\iota_{i,k+1}$ の，真の間にある[*3]$\} \setminus \{\mathbb{a}_i \,:\, i \in \overline{n}\}$ x-C-8

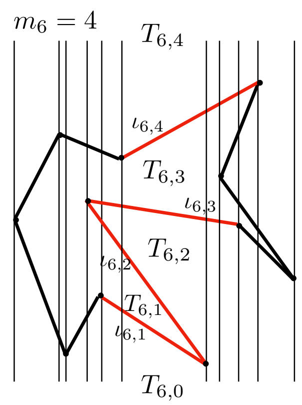
*3 これは，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として，$b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ を，$\begin{bmatrix} a \\ b_1 \end{bmatrix} \in \iota_{i,k}$, $\begin{bmatrix} a \\ b_2 \end{bmatrix} \in \iota_{i,k+1}$ となるものとしたとき，$b_1 < b < b_2$ が成り立っている，ということです．

として，

x-C-9 (C-13) $T_{i,0} := \{\mathbb{a} \in S_i \,:\, \mathbb{a}$ は，(y-座標に関して) $\iota_{i,1}$ より，真に下にある $\}$
$\setminus \{\mathbb{a}_i \,:\, i \in \overline{n}\}$,

x-C-10 (C-14) $T_{i,m_i} := \{\mathbb{a} \in S_i \,:\, \mathbb{a}$ は，(y-座標に関して) ι_{i,m_i} より，真に上にある $\}$
$\setminus \{\mathbb{a}_i \,:\, i \in \overline{n}\}$

とする．



また，$m_0 = 0$, $m_n = 0$ として

x-C-10-0 (C-15) $T_{0,0} := S_0 \setminus \{\mathbb{a}_{i_1}\}$,

x-C-10-1 (C-16) $T_{n,0} := S_n \setminus \{\mathbb{a}_{i_n}\}$

とする．このとき，$i \in \overline{n} \cup \{0\}$ に対し，

x-C-10-2 (C-17) $\mathcal{T}_i := \{T_{i,k} \,:\, k \in \overline{m_i} \cup \{0\}\}$

として，

x-C-10-3 (C-18) $\mathcal{T} := \bigcup_{i \in \overline{n} \cup \{0\}} \mathcal{T}_i$

とすると，

x-C-11 (C-19) $\mathbb{R}^2 = \bigcup \mathcal{T} \;\dot{\cup}\; \bigcup \{\iota_i \,:\, i \in \overline{n}\}$

である．$\mathcal{T}$ の各要素は，台形であるか，三角形であるか，または，1 つ，あるいは，3 つの直線で区切られた非有界な領域であるかの，いずれかなので，どの場合にも，領域に属す 2 つの要素を結ぶ直線は，この領域に含まれる [*4]．特に，これらの領域は，それぞれ，すべて連結である．

厳密には，$T_{0,0}$ や，$T_{n,0}$ を含む，いくつかの領域では，上で記述した領域の境界となっている直線から，高々 2 点を除いたものになっているが[*5]，演習問題 C.1, (2) により，これらの点を除いて得られる，$\mathcal{T}$ の要素も，連結な領域に

---

*4 $\mathbb{R}^2$ (や $\mathbb{R}^3$ など) の領域で，任意の 2 点を結ぶ区間が，この領域に含まれているとき，この領域は，**凸** (とつ) **領域**である，と言います．

*5 除かれる点は，以下で「急カーヴ」と呼ばれることになる点ですが，そのような点は，各 ℓ_i 上に高々 1 つしかないことから，これらの領域の中に，そのような点は，高々 2 つしか含まれないことがわかります．

なっている．

$\mathcal{T}$ の要素 T のパリティー $p(T)$ を，次で定義する．$\mathcal{T}$ の要素は，ある $i \in \overline{n} \cup \{0\}$ と $k \in \overline{m_i} \cup \{0\}$ に対する，$T_{i,k}$ だから，

(C-20) $p(T_{i,k}) := (-1)^k$ x-C-12

とする．ここで，

(C-21) $\mathcal{R}_0 := \bigcup \{T \in \mathcal{T} \,:\, p(T) = -1\},$ x-C-13

(C-22) $\mathcal{R}_1 := \bigcup \{T \in \mathcal{T} \,:\, p(T) = 1\}$ x-C-14

とする．この $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ が，求めるようなものになっていることを，以下で示す．

必要なら，巡回 $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ の始点を移動して，(適当な $i_1 \in \overline{n}$ に対する) $\mathbb{a}_{i_1}, \mathbb{a}_{i_1+1}, \ldots, \mathbb{a}_n, \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_{i_1-1}$ で，置き換えることで，

(C-23) $i_1 = 1$ x-C-15

となる，としてよい．また，必要なら周回の方向を変えることで (つまり $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ を，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_n, \mathbb{a}_{n-1}, \ldots, \mathbb{a}_2$ で置き換えることで)，

(C-24) $\iota_{1,1} = \mathbb{a}_1 \sqcap \mathbb{a}_2$ x-C-16

となっている，とする．

(C-25) $\mathcal{I} := \{\iota_{i,k} \cap S_i \,:\, i \in \overline{n-1},\, k \in \overline{m_i}\}$ x-C-17

とする．

各 ι_i, $i \in \overline{n}$ を，$\mathcal{I}$ の要素の列 $\iota^*_{i,1}, \ldots, \iota^*_{i,o_i-1}$ で，分割する．つまり，

(C-26) $\iota_i = \iota^*_{i,1} \cup \ \cdots \ \cup \iota^*_{i,o_i-1}$ x-C-18

で，$\iota^*_{i,k}$, $k \in \overline{o_i - 1}$ は，端点を

(C-27) $\iota^*_{i,1} = \mathbb{a}^*_{i,1} \sqcap \mathbb{a}^*_{i,2},\ \iota^*_{i,2} = \mathbb{a}^*_{i,2} \sqcap \mathbb{a}^*_{i,3}\ , \ldots,\ \iota^*_{i,o_i-1} = \mathbb{a}^*_{i,o_i-1} \sqcap \mathbb{a}^*_{i,o_i}$ x-C-19

のように共通に持ち，

(C-28) すべての $i \in \overline{n}$ に対し，$\mathbb{a}^*_{i,1} = \mathbb{a}_i$; x-C-20 x-C-21 (C-29) $i \in \overline{n-1}$ なら，$\mathbb{a}^*_{i,o_i} = \mathbb{a}_{i+1}$;

x-C-22 (C-30) $i = n$ なら，$\mathbb{a}^*_{n,o_n} = \mathbb{a}_1$

となっている，とする．

多角形 P の表現 $P = \iota_1 \cup \iota_2 \cup \cdots \cup \iota_n$ を，

x-C-23 (C-31) $$P = \iota^*_{1,1} \cup \iota^*_{1,2} \cup \cdots \cup \iota^*_{1,o_1-1} \cup \iota^*_{2,1} \cup \iota^*_{2,2} \cup \cdots \cup \iota^*_{2,o_2-1} \cup \cdots \cup \iota^*_{n,1} \cup \iota^*_{n,2} \cup \cdots \cup \iota^*_{n,o_n-1}$$

という表現で置き換える．(C-31) は，

x-C-24 (C-32) $$\mathbb{a}_1 = \mathbb{a}^*_{1,1}, \mathbb{a}^*_{1,2}, \ldots, \mathbb{a}^*_{1,o_1} = \mathbb{a}_2 = \mathbb{a}^*_{2,1}, \mathbb{a}^*_{2,2}, \ldots, \mathbb{a}^*_{2,o_2}, \ldots, \mathbb{a}^*_{n-1,o_{n-1}} = \mathbb{a}_n = \mathbb{a}^*_{n,1}, \mathbb{a}^*_{n,2}, \ldots, \mathbb{a}^*_{n,o_n-1}$$

を角の全体とする，多角形 P の表現である．

添字が煩雑になるのを避けるために，

x-C-25 (C-33) $p := \sum_{i\in\overline{n}}(o_i - 1)$

として，(C-31) に現れる区間を，この順序で，

x-C-26 (C-34) $\iota^*_1, \ldots, \iota^*_p$

と呼びかえ，(C-32) に現れる角を，この順序で，

x-C-27 (C-35) $\mathbb{a}^*_1, \ldots, \mathbb{a}^*_p$

と呼びかえることにする．

$j \in \overline{p-1}$ に対し，ι^*_j が，**右向き**であるとは，$\mathbb{a}^*_j$ の x-成分より，$\mathbb{a}^*_{j+1}$ の方が，真に大きいこととする．ι^*_j が，右向きでないときには，ι は，**左向き**である，と言うことにする．ι^*_1 は，常に右向きであるが，ι^*_2 は，既に右向きの場合も左向きの場合もあり得る．ι^*_p は常に左向きである．

$j \in \overline{p-1}$ に対し，$\mathbb{a}^*_{j+1}$ が，**急カーヴ**であるとは，ι^*_j と，ι^*_{j+1} の，向きが異る (つまり片方が右向きで，もう片方は左向きである) こととする．急カーヴの “折り返し点” は $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ のうちのどれかなので，(C-2) により，各 $i \in \mathbb{N}$ に対し，ℓ_i の要素となっている急カーヴは，高々一つであることに，注意する．

Claim C.2.1 $i \in \overline{n}$ とする．（1） $T \in \mathcal{T}_i$ で，$T \cap \ell_i$ が，空集合でないなら，$i > 1$ で，$T' \in \mathcal{T}_{i-1}$ で，$T \cap T' \neq \emptyset$ となるものがあり，すべてのそのような T' に対し，$p(T) = p(T')$ である． Cl-C-0

（2） $T \in \mathcal{T}_i$ で，$T \cap \ell_i$ が，空集合なら (つまり，ある，$\mathbb{a} \in \ell_i$ 対し，$\mathbb{a}$ は，P の急カーヴとなっていて，T は，この急カーヴに隣接する 2 辺で囲まれた領域となっているなら)，ℓ_i 上の，上のような $\mathbb{a}$ を含む区間 $\mathbb{a}' \sqcap \mathbb{a}''$ と，$T' \in \mathcal{T}_{i-1}$ で，$\mathbb{a}' \sqcap \mathbb{a}'' \setminus \{\mathbb{a}\} \subseteq T'$ となるものがとれて，$p(T') \neq p(T)$ が成り立つ．

（3） $T \in \mathcal{T}_i$, $i < n$ で，$T \cap \ell_{i+1}$ が，空集合でないなら，$T' \in \mathcal{T}_{i+1}$ で，$T \cap T' \neq \emptyset$ となるものがあり，すべてのそのような T' に対し，$p(T) = p(T')$ である．

（4） $T \in \mathcal{T}_i$ で，$i < n$ で，$T \cap \ell_{i+1}$ が，空集合なら (つまり，ある $\mathbb{a} \in \ell_i$ に対し，$\mathbb{a}$ は，P の急カーヴとなっていて，T は，この急カーヴに隣接する 2 辺で囲まれた領域となっているなら)，ℓ_{i+1} 上の，上のような $\mathbb{a}$ を含む区間 $\mathbb{a}' \sqcap \mathbb{a}''$ と，$T' \in \mathcal{T}_{i+1}$ で，$\mathbb{a}' \sqcap \mathbb{a}'' \setminus \{\mathbb{a}\} \subseteq T'$ となるものがとれて，$p(T') \neq p(T)$ が成り立つ．

$\vdash$ (1) の証明を見てみることにする．他の主張も同様に示せる (演習!)．$T \in \mathcal{T}_1$ だとすると，$T \cap \ell_1 = \emptyset$ だから，$i \neq 1$ である．

$m = \inf(T \cap \ell_i)$, $M = \sup(T \cap \ell_i)$ とする ($m = -\infty$ や $M = \infty$ の場合もありえる)．仮定から $m < M$ である．ℓ_i が急カーヴを含まないなら，$\mathcal{T}_{i-1}$ の要素と $\mathcal{T}_i$ の要素は 1 対 1 に対応がつくことから，$T' \in \mathcal{T}_{i-1}$ で，$T' \cap \ell_i = T \cap \ell_i$ となるものがとれ，$p(T') = p(T)$ となることは，容易に示せる．

(C-2) により，ℓ_i が急カーヴを含むなら，ℓ_i に含まれる急カーヴは高々 1 つであることに留意して，① それが $\leq m$ の場合; ② m と M の (真の) 間にある場合; ③ $\geq M$ の場合の 3 つの場合について，求めるような T' がとれて，そのようなすべての T' に対し，等式 $p(T') = p(T)$ が成り立つことを示せばい (演習)． $\dashv$ (Claim C.2.1)

$j \in \overline{p}$ に対して，ι_j^* の右側の $\mathcal{T}$ の要素 $R(\iota_j^*)$ と，ι_j^* の左側の $\mathcal{T}$ の要素 $L(\iota_j^*)$ を，次のように定義する．

(C-36) ι_j^* が，右向きのときは，$j < p$ である．$i \in \overline{n}$ に対し，ℓ_i が $\mathbb{a}_j^*$ を含む，とする．$\mathbb{a} \in \ell_i$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_j^*$ の y-成分より小さいものと， x-C-28

$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_j^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_j^*\} \subseteq T$ となるものがあるときには，$R(\iota_j^*) = T$ とする．そうでないときには，$\mathbb{a} \in \ell_{i+1}$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_{j+1}^*$ の y-成分より小さいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_{j+1}^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_{j+1}^*\} \subseteq T$ となるものがあるから，$R(\iota_j^*) = T$ とする．

x-C-29 (C-37) ι_j^* が，右向きのときには，$j < p$ だが，$i \in \overline{n}$ に対し，ℓ_i が $\mathbb{a}_j^*$ を含むとして，$\mathbb{a} \in \ell_i$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_j^*$ の y-成分より大きいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_j^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_j^*\} \subseteq T$ となるものがあるときには，$L(\iota_j^*) = T$ とする．そうでないときには，$\mathbb{a} \in \ell_{i+1}$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_{j+1}^*$ の y-成分より大きいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_{j+1}^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_{j+1}^*\} \subseteq T$ となるものがあるから，$L(\iota_j^*) = T$ とする．

x-C-30 (C-38) ι_j^* が，左向きで，$j < p$ のときには，$i \in \overline{n}$ を，ℓ_i が $\mathbb{a}_j^*$ を含むようなものとする．$i > 1$ である．ある $\mathbb{a} \in \ell_i$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_j^*$ の y-成分より大きいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_j^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_j^*\} \subseteq T$ となるものがあるときには，$R(\iota_j^*) = T$ する．そうでないときには，$\mathbb{a} \in \ell_{i-1}$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_{j-1}^*$ の y-成分より大きいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_{j-1}^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_{j-1}^*\} \subseteq T$ となるものがあるから，$R(\iota_j^*) = T$ とする．$j = p$ のときには，$R(\iota_j^*) = T_{1,2}$ となることに注意する．

x-C-31 (C-39) ι_j^* が，左向きで，$j < p$ のときには，$i \in \overline{n}$ を，ℓ_i が $\mathbb{a}_j^*$ を含むようなものとする．$i > 1$ である．ある $\mathbb{a} \in \ell_i$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_j^*$ の y-成分より小さいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_j^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_j^*\} \subseteq T$ となるものがあるときには，$L(\iota_j^*) = T$ とする．そうでないときには，ある $\mathbb{a} \in \ell_{i-1}$ で，$\mathbb{a}$ の y-成分が $\mathbb{a}_{j-1}^*$ の y-成分より小さいものと，$T \in \mathcal{T}_i$ で，$\mathbb{a}_{j-1}^* {}^\frown \mathbb{a} \setminus \{\mathbb{a}_{j-1}^*\} \subseteq T$ となるものがあるから，$L(\iota_j^*) = T$ とする．$j = p$ のときには，$L(\iota_j^*) = T_{1,1}$ であることに注意する． $\dashv$

定理 C.2 の主張の前半は，次の Claim C.2.2 から従う:

Cl-C-1 **Claim C.2.2** （1） すべての $j \in \overline{p}$ に対し，$p(R(\iota_j^*)) = 1$ で，$p(L(\iota_j^*)) = -1$ である．

（2） すべての $j \in \overline{p-1}$ に対し，$R(\iota_j^*) \cup R(\iota_{j+1}^*)$ は，連結であるか，または，ある $T \in \mathcal{T}$ で，$p(T) = 1$ となるものがあって，$R(\iota_j^*) \cup R(\iota_{j+1}^*) \cup T$ は，連結である．

(3)　すべての $j \in \overline{p-1}$ に対し，$L(\iota_j^*) \cup L(\iota_{j+1}^*)$ は，連結であるか，または，ある $T \in \mathcal{T}$ で，$p(T) = -1$ となるものがあって，$L(\iota_j^*) \cup L(\iota_{j+1}^*) \cup T$ は，連結である．

(4)　$\mathcal{R}_0 = \{L(\iota_j^*) : j \in \overline{p}\}$ である．

(5)　$\mathcal{R}_1 = \{R(\iota_j^*) : j \in \overline{p}\}$ である．

(6)　$\mathcal{R}_0$ は，連結である．

(7)　$\mathcal{R}_1$ は，連結である．

$\vdash$　(1), (2), (3): 上の Claim C.2.1 を用いて，j に関する帰納法で示せる．$j = 1$ のときには，主張は，(C-24) により，成り立っていることに注意する．

(4), (5): は，(1) から従う．

(6): は，(3), (4) と，演習問題 C.1, (3) から従う．

(7): は，(2), (5) と，演習問題 C.1, (3) から従う．　$\dashv$ (Claim C.2.2)

定理 C.2 の後半の主張は，次のようにして示せる:

(C-40)　$\mathbb{p}_0 \in \mathcal{R}_0$, $\mathbb{p}_1 \in \mathcal{R}_1$　x-C-31-a

として，P_0 を，$\mathbb{p}_0$ と $\mathbb{p}_1$ を結ぶ折線とする．P_0 は，$\mathbb{b}_0 = \mathbb{p}_0$, $\mathbb{b}_p = \mathbb{p}_1$ として，$\mathbb{b}_2, ..., \mathbb{b}_{p-1} \in \mathbb{R}^2$ と $\tau_1 := \mathbb{b}_1 \sqcap \mathbb{b}_2, ..., \tau_{p-1} := \mathbb{b}_{p-1} \sqcap \mathbb{b}_p$ に対し，$P_0 = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_{p-1}$ となっているとする．必要なら τ_j, $j \in \overline{p-1}$ たちを更に細分して，各 τ_j, $j \in \overline{p-1}$ に対し，ある $i_j \in \overline{n}$ で，$\tau_j \subseteq S_{i_j}$ となるものがとれる，としてよい．

もし

(C-41)　$P_0 \cap P = \emptyset$　x-C-31-0

なら，(C-40) により，ある $j^* \in \overline{p-1}$ で，

(C-42)　$\tau_{j^*} \cap \mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ かつ $\tau_{j^*} \cap \mathcal{R}_1 \neq \emptyset$　x-C-32

となるものが存在する．$i^* = i_{j^*}$ とすると，

(C-43)　$\tau_{j^*} \subseteq S_{i^*}$　x-C-33

である．$k^* \in \overline{m_{i^*}} \cup \{0\}$ を，

x-C-34 (C-44) $\tau_{j^*} \cap T_{i^*,k^*} \neq \emptyset$

となるようなもののうち最小のもとすると，(C-42) により，$k^* < k^{**} \leq m_{i^*}$ で，

x-C-35 (C-45) $\tau_{j^*} \cap T_{i^*,k^{**}} \neq \emptyset$

となるものがとれる．このことから，線分 τ_{j^*}, ι_{i^*,k^*}, $\iota_{i^*,k^{**}}$ 上の関連する点の座標に関する議論により，τ_{j^*} と ι_{i^*,k^*} $(\subseteq P)$ は交差していなくてはならないことが分かる．これは，(C-41) の仮定に矛盾である． □ (定理 C.2)

上の定理 C.2 の証明から，与えられた $\mathbb{R}^2$ の点が，多角形の内部にあるか，多角形の上にある (つまり，$\iota_1 \cup \cdots \cup \iota_n$ の要素である) か，多角形の外部にあるか，の判定アルゴリズムが抽出できることに注意する．

なお，一般には，証明があるとしても，証明で現れる対象物の，構成アルゴリズムや，判定アルゴリズムが存在する，とは限らない (このことの，具体的な反例を挙げることができる)．また，構成アルゴリズムや判定アルゴリズムが存在する，としても，それらが，現実的に実行可能 (feasible) とは限らない (これに対しても，具体的な反例を挙げることができる)．

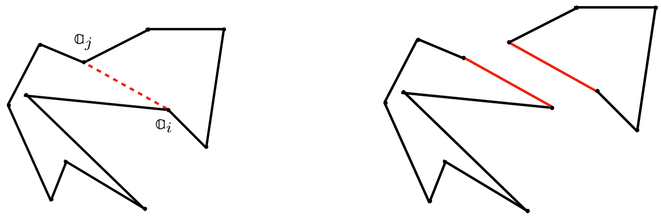
以下の拡張版のみに含まれるテキストは，advanced な読者のためのもので，数理論理学の基礎知識が仮定されています:

拡張版では，これらの反例を挙げる．[to be written later.]

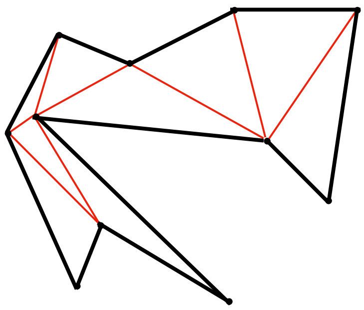
C.2　多角形の三角形分割

P を，頂点 $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ と，辺 $\iota_1 = \mathbb{a}_1 \frown \mathbb{a}_2$, $\iota_2 = \mathbb{a}_2 \frown \mathbb{a}_3, \ldots, \iota_{n-1} = \mathbb{a}_{n-1} \frown \mathbb{a}_n$, $\iota_n = \mathbb{a}_n \frown \mathbb{a}_1$ を持つ多角形とする．多角形に対するジョルダンの定理 (定理 C.2) により，P は平面を (あるいは，もう少し正確には $\mathbb{R}^2 \setminus P$ を)，P の内部 $\mathcal{R}_0$ と P の外部 $\mathcal{R}_1$ に分割する．ある (隣り合わせになっていない) $\mathbb{a}_i$, $\mathbb{a}_j$ に対し，$\mathbb{a}_i \frown \mathbb{a}_j \setminus \{\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j\} \subseteq \mathcal{R}_0$ となるとき，$\mathbb{a}_i \frown \mathbb{a}_j$ を，P の**対角線** (diagonal) とよぶ．

上のような多角形 P に対し，$1 \leq i < j \leq n$ で，$\mathbb{a}_i \frown \mathbb{a}_j$ が P の対角線のとき，P は，$\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_{i+1}, \ldots, \mathbb{a}_j$ を頂点とする多角形と，$\mathbb{a}_j, \mathbb{a}_{j+1}, \ldots, \mathbb{a}_n, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_i$ を頂点とする多角形に分割できる．



この分割を P の対角線 $\mathbb{p}_i \frown \mathbb{p}_j$ による切断と呼ぶことにする．多角形 P の互いに交差しない対角線をいくつか選んで，それらで切断することで P を，複数の [*6]三角形に分割できるとき，そのような対角線の集まり $\mathcal{P}$ を，P の**対角線による三角形分割**とよぶ．



以下の定理が成り立つ:

定理 C.3 (多角形の三角形分割定理, Dehn [7], Lennes [38]) すべての多角形に対して，対角線による三角形分割が可能である． P-C-1

三角形に対しては，ジョルダンの定理は，第 4 章で準備した道具により，比較的容易に示せる．したがって，まず，多角形の三角形分割定理を証明して，それを用いて，ジョルダンの定理を示す，という方針で全体の構成を簡略化できるのではいか，と思うかもしれない．しかし，これは不可能である: 対角線の概念を定義するために，多角形の内部の概念が必要になっているので，このように議論を進めようとすると，循環が起ってしまうからである．

♦ Dehn Lennes を人名表に入れる

多角形の対角線による三角形分割が可能であるためには，そもそも，多角形が対角線を持つことが言えなくてはならない．そのことを次の補題で示すが，そのことを用いると，定理 C.3 は，容易に示せる．

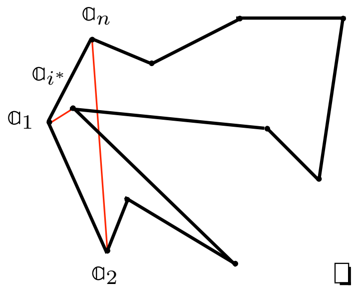
[*6] 前にもそうだったように，ここでも，“複数の” は，“1 つの” の場合も，含むものとしています．

P-C-2 **補題 C.4** (Dehn [7], Lennes [38]) 4 つ以上の頂点を持つ任意の多角形 P は，対角線を持つ．

証明． 多角形 P に対して，$n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{p}_1, ..., \mathbb{p}_n$, $\iota_1, ..., \iota_n$, $\ell_1, ..., \ell_n$, $i_k \in \overline{n}$, $k \in \overline{n}$ を，定理 C.2 の証明でのように取る．特に，(C-1), (C-2), (C-5), (C-23), (C-24) が成り立つとする．

P が 4 つ以上の頂点を持つことから，$\mathbb{p}_2 \sqcap \mathbb{p}_n$ は，P のどの辺とも異る．もし，$\mathbb{p}_2 \sqcap \mathbb{p}_n$ が，P の対角線となっているなら，示したい命題は，成り立つ．そうでないとすると，$\mathbb{p}_3, ..., \mathbb{p}_{n-1}$ のどれかは，$\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \mathbb{p}_n$ を頂点とする三角形の内部と境界をあわせた領域の中にある：もしそのようなものがなければ，$\iota_1, ..., \iota_n$ のうちのどれかは，$\mathbb{p}_2 \sqcap \mathbb{p}_n$ と交差しているので，それを τ とすると，τ は，$\mathbb{p}_1 \sqcap \mathbb{p}_2$ と $\mathbb{p}_1 \sqcap \mathbb{p}_n$ のどちらかと交差していなくてはならないが，これは矛盾である．

ここで，$\mathbb{p}_3, ..., \mathbb{p}_{n-1}$ のうちの，$\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \mathbb{p}_n$ を頂点とする三角形の内部と境界をあわせた領域の中にあるものの中で，x-成分が最小のものを，$\mathbb{p}_{i^*}$ とすると，$\mathbb{p}_1 \sqcap \mathbb{p}_{i^*}$ は，対角線であることが，分かる．

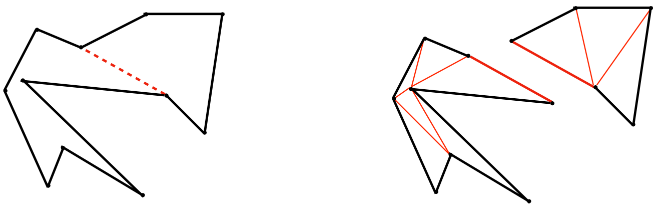


□ (補題 C.4)

定理 C.3 の証明． P の頂点の数に関する帰納法で示す．P の頂点が 3 つのときには，P 自身が三角形だから (0 個の対角線を，取ることよって)，P は，対角線により三角形に分割される．

P を 4 つ以上の頂点を持つ多角形として，P より頂点の数の少ない多角形については定理が成り立つとする (帰納法の仮定)．このとき補題 C.4 により，P は対角線 D を持つから，P を，この D で分割して得られるグラフ P_1, P_2 を考えると，これらは，帰納法の仮定から，対角線による三角形分割が可能である．$\mathcal{D}$ を P_1 と $P2$ の対角線による三角形分割に現れる対角線 (に対応する P の対角線) の全体とすると，$\mathcal{D} \cup \{D\}$ は，P の対角線による三角形分割で

ある．



付録 D

簡約な階段形の行列への変形の存在と，その簡約な階段形の一意性

echelon

D.1　基本変形による簡約な階段形の行列への変形

本節では，次の定理を示す． elementary

定理 D.1 A を任意の $m \times n$-行列とするとき，m-次の基本行列の列 B_1, $B_2, \ldots, B_k$ で，$B_k \cdots B_2 B_1 A$ が，簡約な階段形となるようなものが存在する． P-D-0

この定理の証明のために，まず，次の準備をする．$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ を，$m \times n$-行列として，$\ell \in \overline{n} \cup \{0\}$ に対し，

$$A|\ell := [\mathbb{a}_1\, \mathbb{a}_2 \cdots \mathbb{a}_\ell\,]$$

とする．ただし，$A|0$ は，空の行列 (0×0-行列) とする．

補題 D.2 A を簡約な階段形でない，$m \times n$-行列とする．$\ell \in \overline{n} \cup \{0\}$ を，$A|\ell$ が，簡約な階段形とならない，最小のもの，とする (ただし $A|0$ は，常に，簡約な階段形の行列である，と考えている)．このとき，$m+1$ 個以下の個数の m-次基本行列の，積として表わせる，m-次の正方行列 B で，$(BA)|\ell$ が，簡約な階段形になるようなものが，存在する． P-D-1

証明． $A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$ として，ℓ を，補題の主張でのように取る．ℓ の最小性から，$A|(\ell-1)$ は，簡約な階段形であることに注意する．

k を $A|(\ell-1)$ の主成分の数とするとき，$i^* \in \overline{n} \setminus \overline{k}$ で，$\mathbb{a}_\ell$ の第 i^* 成分が 0 でないものが存在する (そうでなければ，$A|\ell$ は，簡約な階段形となってしまい，矛盾である)．

以下での，“T^m_{k+1,i^*}”, “$S^m_{k+1}(\frac{1}{a_{k+1}})$”, “$R^m_{\sigma(i),k+1}(a'_i)$” は，第 5.3 節で導入した基本行列 (5.14), (5.15), (5.16) の表記法による，m-次正方行列である．

$i^* \neq k+1$ なら，$B_1 := T^m_{k+1,i^*}$ とし，そうでないなら，$B_1 := E_m$ とする．

$$B_1 \mathbb{a}_\ell = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

と，なっているとする．このとき，$a_{k+1} \neq 0$ となっていることに留意して，$B_2 = S^m_{k+1}(\frac{1}{a_{k+1}})$ とし，$B_3, \ldots, B_{n+1}$ $(= B_{2+(n-1)})$ を，各 $i \in \overline{n+1} \setminus \overline{2}$ に対し，

$$B_i := R^m_{\sigma(i),k+1}(a'_i)$$

とする，ただし，各 $i \in \overline{n+1} \setminus \overline{2}$ に対し，

$$\sigma(i) := \begin{cases} i-2, & i-2 < k+1 \text{ のとき;} \\ i-1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とし，

$$a'_i := -\frac{a_{\sigma(i)}}{a_{k+1}}$$

とする．

このとき，$B := B_{n+1} \cdots B_3 B_2 B_1$ とすると，この B が，求めるようなものとなる． □ (補題 D.2)

定理 D.1 の証明． $m^* \in \overline{m}$ と，複数の m-次基本行列の積となっているような m-次正方行列の列 $\langle B^*_i : i \in \overline{m^*} \rangle$ と，$n+1$ 以下の自然数の真の上昇列 $\langle \ell_i : i \in \overline{m^*} \rangle$ を，以下が成り立つように，再帰的に構成する:

x-D-0 (D-1) $B_1 := E_m$ とする．

x-D-1 (D-2) $B_i A$ が，簡約な階段形の行列なら，$m^* = i$ として，$\ell_i = n+1$ として構成を終える．

x-D-2 (D-3) $B_i A$ が，簡約な階段形の行列でないなら，m^* は未定とし，ℓ_i を，$B_i A | \ell_i$ が，簡約な階段形の行列とならない，ようなもののうちの，最小のものとする．

x-D-3 (D-4) m^* が，未定のときには，B^0_{i+1} を，複数の m-次の基本行列の積，として表わせる m-次正方行列で，$(B^0_{i+1} B_i A) | \ell_i$ が，簡約な階段形の行列となるようなものとし，$B_{i+1} := B^0_{i+1} B_i$ とする．

上の (D-4) でのような B^0_{i+1} は，補題 D.2 により，常に存在する．したがって，この構成は，常に可能である．$\langle \ell_i : i \in m^* \rangle$ は，(D-2), (D-3), (D-4) により，$n+1$ 以下の数の真の上昇列だから，この構成は，(B_1 を取る操作を，ステップ数に数えないことにすると) 高々 n 回のステップで停止する．$B = B_{m^*}$ とすると，(D-2) により，BA は，簡約な階段形をした行列となっている．なお，構成から，BA は，m^* 個以上の個数の主成分を持つから，実

は，$m^* \leq \min\{m,n\}$ となっていることが，分かる [*1]．　□ (定理 D.1)

定理 D.1 は，次のように，ガウスの消去法の言葉に翻訳することができる．連立方程式を解くために必要になる次の系 D.3 での，基本変形の繰り返しの回数の上限の評価は，補題 D.2 と，定理 D.1 の証明の最後に述べた注意から，得られる．

系 D.3 $\mathcal{S}$ を，n 個の変数を持つ m 個の一次式からなる連立方程式とすると，$\mathcal{S}$ は，高々，$\min\{m,n\}\cdot(m+1)$ 回の基本変形を施すことで，解くことができる．　□ P-D-2

このことから，行列の基本変形による逆行列の計算法 (定理 5.21) に対しても，その計算に必要となる基本変形の繰り返し回数の，上限の評価が，得られる:

系 D.4 A を n-次の正方行列とするとき，$\tilde{A} = [\,A \,\vdots\, E_n\,]$ に対し，高々，$n(n+1)$ 回の基本変形を施すことで，A が可逆かどうかを判定でき，可逆なときには，A^{-1} が求められる．　□ P-D-3

これに対し，$\det(A)$ の計算による A の可逆性の判定や，余因子行列の計算による逆行列の計算 (系 6.47) では，$\det(A)$ の計算だけのためにも，(それを定義に従って機械的に行なったときには)，既に，$\#(S_n) = n!$ 個の項の，和の計算が，必要となる．$n!$ は，$n(n+1)$ と比べて，格段に速く増加することに注意する [*2]．第 5.4 節の最初のパラグラフで書いたことは，ここで述べた状況を，その背景とするものである．

D.2　簡約な階段形の行列の一意性

uniqueness

[*1] このことは，次の系 D.3 の証明で用いられます．

[*2] 2^n が，どの多項式より速く増加し，$n!$ が 2^n より本質的に速く増加する，という事実は，例えば，次のような，2 つの命題として，表現することができます: 任意の，多項式で定義される関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ で，すべての $n\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対して，$f(n) < 2^n$ となるものが存在する．すべての，多項式で定義される関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ に対し，$N\in\mathbb{N}$ で，すべての $n\in\mathbb{N}\setminus\overline{N}$ に対して，$f(2^n) < n!$ となるものが存在する．(演習!)

本節では，どの行列 A に対しても，A と，基本変形の繰り返しで移りあえる，簡約な階段形の行列は，一意に決まることを示す (定理 D.5).

ここでの議論は，第 5.3 節，第 5.4 節での議論と連動するが，これらの節では，以下の定理 D.5 を用いない証明が工夫されていた．定理 D.5 の証明には，線型独立性に関する第 7.1 節の前半で述べたことが用いられているが，これにより循環が生じていないことは，容易に確かめられる．

P-D-4 **定理 D.5** A を，任意の体 K 上の行列として，B を，基本変形の複数回の適用で，A と，互いに移りあえる，簡約な階段形の行列とするとき，B は一意に決まる．つまり，B' を，基本変形の複数回の適用で，A と，互いに移りあえる，任意の，簡約な階段形の行列とするとき，$B' = B$ である．

定理の証明のために，次の補題を示す:

P-D-5 **補題 D.6** $A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$, $B = [\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,]$ を K 上の $m \times n$-行列として，A と B は，基本変形の複数回の繰り返し適用により互いに移りあえるものとする．このとき，（1） $\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{b}_1 \neq \mathbb{0}$ で，

（2） 任意の $k \in \overline{n}$ と，$c_1, \ldots, c_k \in K$ に対し，

$$\mathbb{a}_{k+1} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_k\mathbb{a}_k \;\Leftrightarrow\; \mathbb{b}_{k+1} = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_k\mathbb{b}_k.$$

証明． B が，A に一つの基本変形を施して (つまり一つの基本行列 B_0 を左から掛けて)，得られるものである場合について，(1) と (2) が，成り立つことを示せば，十分である．

したがって，このことを，(a) ある $m \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{m}$, $c \in K$, $c \neq 0$ に対し，$B_0 = S_k^m(c)$ のとき，　(b) ある $m \in \mathbb{N}$, $k, \ell \in \overline{m}$, $k \neq \ell$ に対し，$B_0 = T_{k,\ell}^m$ のとき，　(c) ある $m \in \mathbb{N}$, $k, \ell \in \overline{m}$, $k \neq \ell$, $d \in K$ に対し，$B = R_{k,\ell}^m(d)$ のとき，の 3 つの場合について，対して示せばよいが，これは，この 3 つの場合での，B_0 の A への作用が，何になるかに留意すれば，容易に証明できる，子細は読者の演習とする．　❑ (補題 D.6)

定理 D.5 の証明:　$A = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]$, $B = [\,\mathbb{b}_1 \cdots \mathbb{b}_n\,]$, $B' = [\,\mathbb{b}'_1 \cdots \mathbb{b}'_n\,]$ を，定理の主張でのようなものとする．第 D.1 節で導入した記法を用いることにして，帰納法により，すべての $\ell \in \overline{n}$ に対して，

(D-5)　$B|\ell = B'|\ell$ x-D-4

が成り立つことを，示す．

B と B' に対する仮定から，B と，B' は，複数の基本変形を施すことで，互いに他に移れることに注意する．

$\ell = 1$ のとき (帰納法の初め) は，$\mathbb{a}_1 = \mathbb{0}$ なら，補題 D.6, (1) により，$\mathbb{b}_1 = \mathbb{0}$, $\mathbb{b}'_1 = \mathbb{0}$ だから，$B|1 = B'|1$ である．$\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{0}$ なら，再び，補題 D.6, (1) により，$\mathbb{b}_1 \neq \mathbb{0}$ かつ，$\mathbb{b}'_1 \neq \mathbb{0}$ だが，B も，B' も，簡約な階段形だから，$\mathbb{b}_1 = \mathbb{e}^m_1 = \mathbb{b}'_1$ となる．したがって，この場合にも，$B|1 = B'|1$ である．

ある $\ell \in \overline{n-1}$ に対して，(D-5) が成り立つとして，$B|\ell+1 = B'|\ell+1$ となること (帰納法のステップ) を示す．$\ell_1 < \cdots < \ell_k \leq \ell$ を $B|\ell$ で，主成分の現れる列の (番号の) 全体とする．仮定 (D-5) により，これは，$B'|\ell$ で，主成分の現れる列の全体でもあり．すべての $i \in \overline{k}$ に対し，$\mathbb{b}_{\ell_i} = \mathbb{b}'_{\ell_i} = \mathbb{e}^m_i$ である．

B の $\ell+1$-列に，主成分が現れない場合には，$\mathbb{b}_{\ell+1}$ の k-成分より先 (下) の成分はすべて 0 となるから，$\mathbb{b}_{\ell+1}$ は，$\mathbb{b}_{\ell_1}, \ldots, \mathbb{b}_{\ell_k}$ の線型結合として表わせる (例 7.2 を参照)．例えば，$\mathbb{b}_{\ell_1} = c_1\mathbb{b}_{\ell_1} + \cdots + c_k\mathbb{b}_{\ell_k}$ とすると．補題 D.6, (2) により，$\mathbb{b}'_{\ell_1} = c_1\mathbb{b}'_{\ell_1} + \cdots + c_k\mathbb{b}'_{\ell_k}$ でもある．したがって，$\mathbb{b}_{\ell+1} = \mathbb{b}'_{\ell+1}$ となり，$B|\ell+1 = B'|\ell+1$ が成りたつ．

B の $\ell+1$-列に，主成分が現れる場合には，$\mathbb{b}_{\ell+1} = \mathbb{e}^m_{k+1}$ で，このときには，$\mathbb{b}_{\ell+1}$ は $\mathbb{b}_{\ell_1}, \ldots, \mathbb{b}_{\ell_k}$ の線型結合では表わせない．したがって，補題 D.6, (2) により，$\mathbb{b}'_{\ell+1}$ も，$\mathbb{b}'_{\ell_1}, \ldots, \mathbb{b}'_{\ell_k}$ の線型結合では表わせないから，B' が，簡約な階段形をしていることから，$\mathbb{b}'_{\ell+1} = \mathbb{e}^m_{k+1}$ でなくてはならず，このときにも，$B|\ell+1 = B'|\ell+1$ が成りたつ．

以上から，帰納法により，すべての $\ell \in \overline{n}$ に対し，$B|\ell = B'|\ell$ となることが示せたが，このことから，特に，$B = B|n = B'|n = B'$ である．これが，示したいことだった．　❐ (定理 D.5)

系 D.7 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，2 つの，異る，簡約な階段形の $m \times n$-行列 C, C' は，複数の基本変形を施すことでは，互いに移りあえない． P-D-6

証明． これは，殆ど自明であるが，念のため，証明を書き出しておく．

対偶命題を示す．C と，C' を，簡約な階段形の $m \times n$-行列として，C に

複数の基本変形を施すことで C' が得られるとする．このとき，C 自身も，C に複数の基本変形を施すことで得られる簡約な階段形の行列だから，定理 D.5 により，$C = C'$ である．　　$\square$ (系 D.7)

あとがきにかえて

«Toute histoire doit avoir un début, un milieu et une fin, mais pas forcément dans cet ordre-là.» [*3] — Jean-Luc Godard

epilogue

Departing from the usual author's statement - I would like to say that I am not responsible for any of the mistakes in this document. Any mistakes here are the responsibility of the reader. If anybody wants to point out a mistake to me, I promise to respond by saying "but you know what I meant to say, don't you?" — Arnold W. Miller [42]

本書をどう読むべきか

"So we shall now explain how to read the book. The right way is to put it on your desk in the day, below your pillow at night, devoting yourself to the reading, and solving the exercises till you know it by heart. Unfortunately, I suspect the reader is looking for advice on how not to read, i.e. what to skip, and even better, how to read only some isolated highlights." — Saharon Shelah, [59] の前書き

本書をどう読むべきかは，読者のあなたが，誰なのかによって，違ってきます． how-to-read
あなたが，数学の初心者なら，第 1 章から，ところどころで，本文で参照されている付録の読解を挿入しながら，(とりあえず) 順に，全部読んでみる，という読み方が順当かもしれません．

著者は，本書を，初めから終わりまで，通して読む，という読み方に耐えるように書いているつもりです．しかし，そのように読むことを，読者に強要しようとしているわけでは，ありません．特に，あなたが，数学の初心者でない

[*3] すべての物語には始まりがあり，中身があり，終わりがあるが，これらは，この順序でなくてはいけないというわけではない．(著者訳)

場合には，advanced な興味に従って拾い読みをしても良いし，そんなことを著者に言われるまでもなく，実際に，そうするでしょう．

本書の執筆では，索引が充実したものになるように努力しましたが，拾い読み方式で本書を読むときには，これは大きな助けになるはずです．

著者自身は，紙に印刷された本を読むことは，現在では，ほとんどありません．特に，専門書の場合には，紙に印刷された本を持っていても，それを自分自身で pdf 化したり，著者から本の pdf をもらったりして，それをタブレット上で開いて読む，ということが普通ですし，紙に印刷された本を読んでいても，傍らには，同じ本の pdf 版が，タブレットか，PC で開かれていることが殆どです．このことの一つの理由は，pdf ファイルをタブレットや PC で開いたときには，テキスト内での，多様な検索が可能だからですが，索引の充実は，この，ファイル閲覧での検索機能でできることのうちの，全部ではないにしても，ある程度の部分の代替にはなるだろうと思います．筆者のように，それでも，pdf 版の本のファイルも活用したい，という読者のための手立ても用意してあります．これについては，以下の，第 D.2 節を参照してください．

本書を拾い読みをしようとしている，初心者でない読者には，付録 B での，角度の概念の導入に関する議論，また，付録 C での，多角形に対するジョルダンの定理と，多角形の三角形分割定理の綿密な証明が，おすすめです．少なくとも，日本語で書いてある教科書の範囲では，これらの子細な記述や，定理のきちんとした証明は，本書以外では見当らないのではないかと思います．付録 B と付録 C は，付録 A や，第 4 章での，ナイーヴな幾何学的直観による議論を，線形代数の，代数的な議論に厳密な議論として統合することを可能にしますが，それは，本巻の横糸の一つである，回転行列の一般的な定義と，その古典物理学的な回転の概念とのすりあわせに関する議論 (この議論のクライマックスは，(8.33) と，(8.34) の回りです) の，背景ともなっています．このことや，131 ページ前後で議論している，左右の概念は，数学の外にあるものだが，それにもかかわらず，これがあたかも数学の概念であるかのように扱うことができる，という状況についての確認は，**数学の哲学** (philosophy of mathematics) に興味を持つ読者にアピールする内容となっているのではないかと思います[*4]．

[*4] 左右の概念の数学的議論との擦り合せに関しては，第 6 章の脚注*31 も参照してください．

第 2 章では，本書で仮定する数学の基礎知識について述べているので，読者が，数学の初心者なら，この章は，彼女／彼にとっての[*5]数学の入門として機能するかもしれません．ただし，第 2 章を読みはじめて，この章の途中で力つきて読むのをやめてしまう，というのは，筆者が読者に望んでいる本書の読み方ではありません．吉田兼好の『徒然草』に，法師になろうとした人が，檀家に行くには馬に乗れなくてはならないから，と乗馬の練習をして，檀家で酒をすすめられたときに趣味がなければ格好がつかない，と歌謡を習ったら，それで一生が終ってしまった，という話がありますが，「第 2 章の途中で力つきる」というのは，何か，この法師になろうとした人を思い起こさせるものがあります．もちろん，乗馬でも，歌謡でも，それを極めたのなら，それはそれで価値のあることでしょうが，この「第 2 章の途中で力つきる」は，「乗馬や，歌謡を極める」に対応する有意義な状態にはなりえないような気がします．とりあえず，第 2 章は，簡単に目を通して，後の章で，第 2 章で導入した概念や記法がどう活用されるかを見てみて，必要になったらまた戻って参照する，という方針が良いでしょう．

また初心者の人には，次のことも言っておきたく思います：　本書を含めて，数学書は，受動的な読み方はできません．「ここで言っていることの例となるものは，自分の知っているもののなかにあるか」，「ここでは，こう言ってはいないが，そのことの反例はあるのか」，「ここの議論は，きちんと言うとどうなるべきなのか」など，常に，能動的に，考えたり，書いてあることの先回りを試みながら読むことで，初めて，理解が進むものです．

本書の著者は，本巻が数学の初心者も読むことになることを意識して，記述の細部の改良／推敲に努めたつもりですが，本書を，上に述べたような意味での積極的な読み込みをしたときには，大きな間違いが見つかる可能性はゼロでないし，更なる改良の可能性が見つかる可能性はもっと大きいはずです．

[*5] ここでは，ドイツの最近の潮流に影響されて，意識的に，“彼女／彼” という順序で書いてみています．ドイツ語では，1990 年代の political correctness では，“数学者にとって” と言うとき „für Mathematiker und Matematikarinnen“ と言うことになっていたのですが，2020 年代の political correctness では，„für Mathematiker*innen“ という，耳で聴いたときには，世界には女性数学者しかいないように聞こえてしまう表現が用いられるようになってきています．もちろん，19 世紀には，例外を除くと男性数学者しかいなくて，そのことを不思議にも思わなかったわけなので，„für Mathematiker*innen“ は，その当時の埋めあわせとでも考えれば，全然不公平な表現ではないと言えるかもしれません．

そのようなものが見つかった場合には，上でエピグラフとして引用した Anny Miller の言葉にも関わらず，そのことの指摘を著者にして頂ければ，大変に幸いです．以下で述べる本書の pdf ファイルや，本巻の次の版で，出来る限り対応したいと思います．

本書の pdf ファイルについて

pdf

本書の原稿の pdf ファイルは，本書 (の紙媒体版) を購入した読者には download できるような工夫がしてあります．これは，[24] をご覧ください．ただし，ここに upload してあるのは，本書の印刷後の訂正や拡張，また紙媒体版には含まれていない，補足なども含む最新版で，執筆の際や，本書の英語版の作成のために著者自身も利用している，ハイパーリンクの張られた，欄外のメモなども含むバージョンです．

本書を購入していない人にも，本書の草稿版に対応する pdf ファイルは download できるようにしてありますが，最新版の pdf ファイルは，本書を購入した読者だけが閲覧できるような鍵をかけてあります．

[24] には，これ以外にも，本書の執筆で活用した，emacs lisp プログラムや，関連資料へのリンクなども含まれています．

本書の原稿の作成に使った hardwares と softwares について

hard-and-soft

ああこれで，これ以上頭が悪くなることはなくなった (ハンガリー語では: "Végre nem butulok tovább")
— エルデシュは，この文句を，自分の墓碑に刻んでほしいと遺言したという．

思索の道具や，本や論文の執筆の道具としてのコンピュータや，タブレット，またそれら上の ソフトウエア (apps) は，現代では不可欠です．少なくとも，著者は，これらがなかったら，最近の数学の研究や，本書の執筆はできず，とっくの昔にエルデシュが「死んだ」と呼んだ人々*6の仲間に入っていたのではな

*6 第 2 章の脚注*69 でも名前の出たエルデシュ (Paul Erdős) は，アクティヴな数学の研究をしなくなった／できなくなった数学者を「死んだ」と形容しました．彼自身，頭が悪くなって研究ができなくなること (つまり，エルデッシュの用語で「死ぬ」こと) を，とても

いかと思います．

新しい数学の定理や証明や理論という結果を出すスポーツとしての数学は，脳の劣化との戦いです．記憶装置としての人間の脳，あるいは演算装置としての人間の脳は，多分，十代のどこかで最高の状態に達した後は，徐々に劣化の一途を辿ることになるのだと思います．知識や経験の蓄積，思考訓練による最適化など，ソフトウエアの改良は可能なので，実際に我々が脳の衰えを感じだすのは，もう少し後のことが多いかもしれませんが，四十才を過ぎると，数学者として生き延びるのは，並大抵のことではありません．しかも，頭はまだそこそこ冴えていても，創造力／想像力という脳の超高次機能が，ある日突然枯渇してしまったりしない，という保証はどこにもありません．

著者が学部の学生だった頃は，プログラミングのための tools などは，ほとんど何もなくて，コンピュータ・プログラマーは，プログラムシートなる用紙に，手書きでプログラムの原稿を書いて，それを穿孔機と呼ばれる，タイプライターのおばけのような機械で，テープや，カードに，コードに対応する穴のパターンをあけてこれをコンピュータに読みこませる，という作業をしていました．この頃には，コンピュータ・プログラマーは，二十代を過ぎると使いものにならない，と言われていました．しかし，現在では，昔とは比べものにならないくらい目にやさしいモニターや，グラフィカル・インターフェースの出現や，その現在も止まるところことを知らない進化，プログラミングのための tools 活用の可能性，等のおかげで，シニアなプログラマーも全然稀な存在ではなくなってきましたし，その中には，二十代を大きく超えても，依然，天才プログラマーとして活躍を続けている人もいます．

似たような状況は，数学の研究でも言えるのではないかと思います．もちろん数学の研究の創造的なコアの部分は，(少なくとも現在の段階では) コンピュータにまかせることは (ほとんど?) できませんが，PC やタブレット等を，我々の脳の外部記憶として活用したり，(この脳の外部記憶の中，またはインターネットにつながっている外の世界ででの) 情報検索のための tools として活用することもできます．本を書いたり，研究論文を書いたりすることは，書きながら考えることでもありますが，そのような執筆による思考の支援とし

恐れていたのではないかと思います (本節のエピグラフを参照してください)．晩年のエルデシュと共同研究をした数学者のうち何人かは，年をとって，昔よりは頭が悪くなったエルデシュでも，彼等より何倍も頭がきれる，と感じられた，と回想しているのですが．

ても，PC やタブレットが活用できます．

著者は，このような意味での PC やタブレットの活用で，脳の劣化と闘う，という戦略についての試行錯誤を重ねてきました．[17] も，そのような試みの一環として，生れたものです．一方，[18] では，PC や，タブレット — もっとも，この [18] を書いたのは，タブレットが普及しだすより前だったのですが — に依存することの危険についても，論じています ([18] で論じている危険性の一つは，ネットで調べることに依存してまうと，自分で考えることがおざなりになってしまう可能性が大である，ということです).

そのような問題点以外にも，PC やタブレットを重用する，という戦略では，次のような問題も出てきてしまいます: つまり，ハードウエアやソフトウエアの進歩，進化の速度は非常に早いので，常に新しいシステムに乗り換えていかなくてはならず，新しいシステムの設定のためにかかる時間や，それに慣れるための労力が馬鹿にならないものになってまう，ということです．

その一方，以下でも触れる，`Emacs` や TeX のように，筆者が，コンピュータを，数学の研究／教育を含む思索の道具として使いはじめた 1980 年代から，ずっと使い続けているソフトウエアもあります．

ハードウエアでもソフトウエアでも，その改良／保守が終ってしまって，ある日突然使えなくなる，ということは，いつでもあり得るわけですが，今，著者が使い込んでいる，これらのソフトウエアについては，これからも，できる限り長く提供され続け，更に，改良／保守が続いてほしいと願っています．

以下で，本書の執筆に使った，ハードウエアやソフトウエア，また，それらの使い方のあらましを記録するのは，一つには，読者の参考のためですが，(ボランティアで) 宣伝をすることで，これらの優れた[*7]ハードウエアやソフトウエアが，これからも改良／保守され，将来も著者の知的活動の支援の tools として使える状態になっていることの確率を上げる，ということを，狙っているためでもあります．

本書の執筆の作業を含めて，著者の知的活動のほとんどは，`13inch M1`

---

*7 TeX や `Emacs` は，この“ 優れた” という形容を何の保留もなしに付与できますが，他のものは，単に著者が使い慣れているだけかもしれません．しかし，これらは，すべて，問題のあるハードウエア／ソフトウエアとして使うことをやめてはいないものである，と言うことはできますし，これらの多くは，もっ良いものに進化するポテンシャルを持っている，と著者が評価できるものでもあります．

MacBook Pro と 10.5inch Ipad Pro を用いて行なわれています．この組合せは，総重量に関して (著者の体力の縛りとの関連で) 移動のとき，両方とコード電源などをリュックザックに入れて運べる限界，に由来する選択です．以下に述べるソフトウエアも，すべて，これらの片方，または両方で動くものとなっています．

本書の原稿の版組みは，TEX (もう少し正確に言うと，TEX の拡張版である LATEX の東アジアの言語への拡張版であるところの，upLATEX) で行なっています．本書の文章は，印刷されたハイパーテキストとなることを目指して書かれていて，多くの脚注や [*8]，「(2.45) による」，「72 ページを参照」，「補題 3.15 により，」，などといった，本書内の，式や定義への参照が張りめぐらされていますが，これは，LATEX のラベルの機能によって，可能になったものです[*9]．

数学の教科書では，読者が完全な記憶力を持っていることを仮定していて，教科書のテキストの各場所では，それまでに証明された事実や，定義された用語すべてが，当然読者が既に知っている事実として，何の補足説明もなく使われているようなスタイルのものが，少なくありません．少なくとも，筆者は，そのようなテキストは，大変に苦手で，というより，そのままでは全く手が出ません．最近では，そのような種類の数学のテキスト (数学の論文は多くの場合これに該当します) を含むほとんどの文章では，必要ならスキャンして pdf 化して OCR (文字認識) をかけたり，著者から pdf ファイルをもらったりして，タブレットや PC 上で読んだり，紙媒体の本と併用したりすることで，完全な記憶力を持っている読者でないことのハンディーを，かろうじて克服できています．本書のスタイルは，索引を充実させたり，“(8.30) により”，“定理 6.24 から従う” などの形をした，テキストの他の場所での命題や式への明示的なリファレンスを，こまめに書き込むことで，著者のように，完全な記憶力

[*8] 脚注を嫌う人もいるので，そのような人たちからは，不評を買ったかもしれませんが，数学での「意識の流れ」を，文章に反影させるのには，脚注や，脚注への脚注 etc. は，大変に有効な手段に思えます．

[*9] もちろん，ラベルの機能を用いなくても，本書のような種類のバーチャルなハイパーテキストの実現は不可能ではないでしょうし，定理や式番号への参照は，数学のテキストでは，昔から行なわれてきたことでもありますが，LATEX のラベルの機能を活用することで，テキスト内のクロスリファレンスの量的な限界が，かなり押し上げられたのではないかと思います．ちなみに，本書の pdf 版では，LATEX の パッケージ **hyperref** により，上記のような参照には，本物のハイパーリンクが付されていて，クリックすると，該当個所にジャンプするようになっています．

を持っていない読者が，テキストを pdf 化しなくても，“印刷されたメタテキスト” として読めるようにする，ということを目指しています．これが成功したとすると，LaTeX でのラベルや索引の機能や，そのための作成 tools は，そのようなテキストを製作するために，大きな貢献を果したことになります．

TeX/LaTeX による版組みでは，TeX/LaTeX のソースファイルをコンパイルして，本の pdf ファイルを作成しますが，著者は，このソースファイルの編集には，`Emacs` を用いています．`Emacs` は `Emacs lisp` という，リスプ言語の方言のインタープレーターとも言える構造を持っていて，この言語でプログラムを書くことで，殆ど，どのようにも拡張できるので [*10]，それを生かすと，`Emacs` と，TeX/LaTeX の組合せで，文書処理を含む知的作業の効率化／構造化が可能になります．

著者の [17] は，そのことの可能性を論じた本ですが，本書の執筆でも，`Emacs` と，その上での，自作のものを含めた `Emacs lisp` プログラムは，大きな役割を果しています．自作の `Emacs lisp` プログラムのうちでは，[17] で，“`multi-occur`” として紹介したプログラム (これは，この本を書いた後で，`Emacs` 自身の附属ブログラムで，これとは別の機能を持つコマンドが，この名前で呼ばれるようになってしまったため，後で，“`file-multi-occur`” と改名しています) と，LaTeX のラベル名の自動生成プログラムは，本書の執筆で活用される頻度のきわめて高いものでした．これらのプログラム (のソースファイル) は，本書の原稿の pdf ファイルの置いてある [24] にも置いてあります．

♦ file-multi-occur と label の生成プログラムのソースを本のページに upload する．

執筆途中の原稿の pdf ファイルは，`MacBook Pro` 上では，主に `Skim` で，`iPad Pro` 上では，主に `GoodReader` で閲覧しています．また，校正のための pdf ファイルへの書き込みは，`iPad Pro` 上での `GoodReader` で行なっています．特に，このような事情から，本書の拡張版の pdf ファイルは，この `GoodReader` で読みやすいように tune-up してあります．

本の初稿や，初稿に向けてのスケッチは，手書きのことが多いのですが，執筆は，この手書きのノートを，`iPad` 上の `Scanner Pro` で pdf 化したものに，`GoodReader` で書き込み修正を加えて，それを見ながら，`Emacs` 上で LaTeX のソースファイルにコード化する，という手順をとりました．

---

*10 実は TeX/LaTeX もそのマクロ言語を活用することで自在に拡張が可能です．

本文中に挿入した図は，LaTeXit で作成した部品を，Apple pages 上で貼り合せて作成しています．

最後に，第 8 章の冒頭でベートーベンの後期の四重奏について述べたので，その続きで，本書の執筆とは直接関係がないとも言えますが，著者の知的生活に大きな変化をもたらした，もう一つの app について述べておきたいと思います．2010 年代以前での旅行の際に，荷物を圧迫していたものに，本や論文のプリントアウト以外にも楽譜がありました．本や論文については，原則として ipad で読むようになったため，荷物の大幅な減量が実現しているのですが，楽譜についても，ほぼ同じ時期から，すべて，iPad 上の楽譜リーダー Piascore で読むようになったので，印刷されたものを荷物に入れる必要がなくなりました．持ちはこびの便だけでなく，この app によって，指使いなどの楽譜への書き込みの自由度が上がったことも，筆者の (音楽の) 地平線を大きく広げてくれたと言えると思います．

参考文献

bib

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, 6.Edition, Springer, (1998/2018). 日本語訳: 蟹江 幸博 訳，天書の証明，丸善出版 (2002/2022).

[2] Christine Andrews-Larson, Roots of Linear Algebra: An Historical Exploration of Linear Systems PRIMUS, 25(6), 507–528, (2015).

[3] 有馬 哲，線型代数入門，東京図書 (1974).

[4] Italo Calvino, Se una notte d'inverno un viaggiatore, Giulio Einuaudi editore s.p.a., Torino, (1979).

[5] Arthur Cayley, A Memoir on the Theory of Matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148, (1858), 17–37.

[6] Richard Courant, Herbert Robbins, Ian Stewart (ed.), What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods 2nd Edition, Oxford University Press (1941/1996).

[7] Max Dehn, Beweis des Satzes, daß jedes geradlinige geschlossene Polygon ohne Doppelpunkte 'die Ebene in zwei Teile teilt', 1899 年頃の未発表の草稿.

[8] René Descartes, La Géométrie, 1637.

[9] リヒャルト・デデキント著，渕野 昌 翻訳／解説， 数とは何かそして何であるべきか， ちくま学芸文庫，(2013).

[10] Richard Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G. Lejeune Dirichlet, 4. Auflage, Vieweg (1891).

[11] ________________, Was sind und was sollen die Zahlen, Vieweg,

Braunschweig (1888). (日本語訳: [9] に収録)

[12] ________________, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Vieweg, Braunschweig (1872). (日本語訳: [9] に収録)

[13] P.A.M. Dirac, A new notation for quantum mechanics, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.35, 03, (1939), 416–418.

[14] Ryszard Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann, (1989).

[15] Jeff Erickson, Simple Polygons, (2013),
http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/comptop/2017/chapters/01-simple-polygons.pdf

[16] 渕野 昌，加法的関数の連続性について，中部大学工学部紀要，Vol.37, (2001), 55–64.

[17] ______，Emacs Lisp でつくる，日本評論社 (2003).

[18] ______，インターネットにある本と天国にある本，中部大学での全学共通オムニバス講義『総合科目』の講義予稿，(2006),
https://fuchino.ddo.jp/misc/wiki-heaven.pdf

[19] ______，構成的集合と公理的集合論入門，“ゲーデルと 20 世紀の論理学(ロジック)第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007) に収録.

[20] ______，初等数学ノート，
https://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf

[21] ______，強制法 I, 数学の基礎付けとしての集合論と強制法，執筆中.

[22] ______， 自己隔離期間の線型代数 II， — 線型代数から数学の森に分け入る，本巻の続巻，執筆予定.

[23] ______， 自己隔離期間の線型代数 III， — 線型代数から物理学の宇宙を眺望する，本巻の続巻，執筆予定.

[24] ______， 本書のページ (本書の原稿の出版後の修正／拡張／補筆を含む pdf ファイルへのリンク等が置かれている)
https://fuchino.ddo.jp/books/lin-alg-in-confinement.html

[25] Sakaé Fuchino, Pre-Hilbert spaces without orthonormal bases, submitted.
https://fuchino.ddo.jp/papers/pre-hilbert-sp-x.pdf

[26] Sakaé Fuchino, On geometrical characterizations of $\mathbb{R}$-linear mappings, preprint.
https://fuchino.ddo.jp/papers/linear-mappings-x.pdf

[27] Kurt Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Princeton University Press (1940).

[28] Joseph F. Grcar, How ordinary elimination became Gaussian elimination, Historia Mathematica Vol.38, (2), (2011), 163–218

[29] Georg Hamel Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Mathematische Annalen, Vol.60 (1905), 459–462.

[30] 長谷川 浩司，線型代数，日本評論社 (2004).

[31] David Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse (1904).

[32] 本間 龍雄，組合せ位相幾何，共立出版，(1980).

[33] Israel Kleiner, A History of Abstract Algebra, Birkhäuser, Boston (2007).

[34] A.A. Kosinski, Cramer's Rule is due to Cramer, Mathematics Magazine, 74: (2001), 310–312.

[35] 公田 藏，「近代数学」と学校数学 (その 2) 旧制高等学校の数学，RIMS Kôkyûroku Vol.1064, (1998), 75-91.

[36] Kenneth Kunen, Set Theory, College Publications, Revised ed. (2011).

[37] David C. Lay, Steven R. Lay, and Judi J. McDonald, Linear Algebra and Its Applications (5th Edition), Pearson, (2015).

[38] N.J. Lennes, Theorems on the Simple Finite Polygon and Polyhedron, American Journal of Mathematics, Vol.33, No.1/4 (1911), 37–62.

[39] 2020 Mathematics Subject Classification, American Mathematical Society,
https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html

[40] 松坂 和夫，集合・位相入門，岩波書店，(1968).

[41] Carl D. Meyer, History of Gaussian Elimination, The 1982 Mathematical Calendar, Rome Press.
http://carlmeyer.com/pdfFiles/GaussianEliminationHistory.pdf

[42] Arnold W. Miller, Descriptive Set Theory and Forcing, How to prove theorems about Borel sets the hard way, (Lecture notes in logic, 4), Springer, 1995.

[43] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).nんんみやけ@三宅敏恒，1944(昭和 19 年)〜

[44] Gregory H. Moore, The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940, Historia Mathematica 22 (1995), 262–303.

[45] 森下 典子，日々是好日，新潮文庫，(2008).

[46] Sidney A. Morris, Topology Without Tears,
https://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf

[47] W. Keith Nicholson, Linear Algebra with Applications, Open Edition,
https://lyryx.com/linear-algebra-applications/

[48] 西脇 順三郎，西脇順三郎全集 第二巻，筑摩書房 (1971).

[49] 小島 順，線型代数，日本放送出版協会 (1976).

[50] 小寺 平治，超入門 線形代数，講談社 (2008).

[51] John Oxtoby, Measure and Category, Springer-Verlag, New York (1980).

[52] Giuseppe Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della Iogica deduttiva, Turin: Bocca, (1888).

[53] ______________, Analisi della teoria dei vettori, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturale 33 (1898), 513-534.

[54] Bodo von Querenburg, Mengentheoretische Topologie, 3. Auflage, Springer-Verlag (1973/2001).

[55] Wolfgang Rautenberg, A Concise Introductioan to Mathematical Logic, Springer, Third Edition (2010).

[56] Peter Roquette, In Memoriam Ernst Steinitz (1871-1928), Journal für reine und angewandte Mathematik, 648 (2010), 1–11.

[57] Carlo Rovelli, Seven brief lessons on physics (English transl. by Simon Carnell and Erica Segre), Rverhead Books, New York, 2016.

[58] 齋藤 正彦，線型代数入門，東京大学出版会 (1966).

[59] Saharon Shelah, Classification Theory, Elsevier Science Publishers B.V., (1978/1990).

[60] Tomás Oliveira e Silva, Goldbach conjecture verification, http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html

[61] Ernst Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journal für reine und angewandte Mathematik, 137 (1910), 167–309.

[62] James Joseph Sylvester, Additions to the articles in the September number of this journal, "On a new class of theorems", and "on Pascal's theorem", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 37, (1850), 363–370.

[63] 高木 貞治, 代数学講義, (初版, 共立社, 1930), 改訂新版, 共立出版 (1965).

[64] 高瀬 正仁，高木貞治，岩波新書 (2010).

[65] 竹内 外史，線形代数と量子力学，裳華房，(1981).

[66] 玉木 大，位相，数学セミナー Vol.53, No.4, (2014), 28–33.

[67] 遠山 啓，数学入門 (上／下), 岩波新書，岩波書店 (1959/1960).

[68] Bartel L. van der Waerden, Moderne Algebra Teil I/Teil II, (1930/1931), Springer-Verlag.

[69] ________________________, Meine Göttinger Lehrjahre, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol.5, No.2, (1997), 20–27.

[70] Martin Ziegler, Model thoery of modules, Annals of Pure and Applied Logic 26 (1984) 149-213.

索引

あ行

アーベル群 (abelian group), 217
アーベル群 (abelian group), 217
$r : s$ に分割する点 (線分を,–, point dividing interval in ratio $r : s$), 96, 97
(i, j)-成分 (行列の –, (i, j)-th entry), 3
アファイン写像 (afine mapping), 118
アファイン写像 (線型空間から線型空間への –, affine mapping), 300
アファイン部分空間 (afine subspace), 290
アプリオリ (apriori), 120
天下り的 (unmotivated), 112
アルキメデスの性質 (Archimedean property), 403

位相空間論 (topology), 454
一次方程式 (linear equation), 170
1 対 1 写像 (1-1 mapping), 32
位置ベクトル (position vector), 89
一階の構造 (first-order structure), 366
一般性を失なうことなく (without loss of generality), 49
一般線型群 (general linear group), 220

ヴァンデルモンド多項式 (Vandermonde polynomial), 211
Wikipedia, xiii
上三角行列 (upper triangular matrix), 228
上に有界 (bounded from above), 405, 406
上への写像 (onto mapping), 32
well-defined, 359
うまく定義されている (well-defined), 359
埋め込み ($\mathfrak{A}_0$ 上の –, embedding over $\mathfrak{A}_0$), 365
埋め込み (一階の構造の –, embedding), 366
埋め込み (代数構造の –, embedding), 362
埋め込み (線型空間の –, embedding), 306
埋め込み (群の –, embedding), 218

xz-平面 (xz-plane), 145
xy-平面 (xy-plane), 145
n-項関係 (n-ary relation), 352
n-次元行ベクトル (n-dimensional row vector), 8
n-次元の回転行列 (n-dimensinal rotation matrix), 333
n-次元ベクトルに関する方程式 (linear n-dimensional vector equation), 174
n-次の正方行列 (square matrix of order n), 4
n-次の対角行列 (diagonal matrix of order n), 5
n-成分 (n-th entry) , 8
n-変数写像 (mapping of n-variables), 42
n-変数連立一次方程式 (system of equations with n variabes), 177
$m \times n$-行列 ($m \times n$-matrix), 2
m-次元ベクトル (m-dimensional vector), 8
m-次元列ベクトル (m-dimensional column vector), 7

オイラーの回転定理 (Euler's Rotation Theorem), 334, 335
重み (線型結合の –, weights), 254, 268
重み付け (weights), 80
重み付け係数 (weight coeffients), 80
折線 (polygonal chain), 116
onto (写像が –, onto), 32

か行

解 (一次方程式の –, solution), 170
解 (連立一次方程式の –, solution), 173
開球 (open ball), 411
解集合 (一次方程式の –, solution set), 171
解集合 (連立一次方程式の –, solution set), 173
階乗 (factorial), 214
階数 (rank), 193
階段形 (echelon form), 187

回転 (原点を中心とする – rotation (about the origin)), 434
回転行列 (2 次元の –, rotation matrix), 123, 331, 434
回転行列 (3 次元の –, rotation matirix), 333
外部 (多角形の –, exterior), 455
ガウスの消去法 (Gaussian elimination), 187
下界 (lower bound), 405, 407
可換 (群の演算が –, commutative), 217
可換性 (commutativity), 14
可換性 (体の乗法の –, commutativity), 51
可換性 (体の加法の –, commutativity), 51
可逆 (行列が –, invertible), 107
核 (線型写像の –, kernel), 295
角 (多角形の –, vertex), 456
拡大係数行列 (augmented coefficient matrix), 175
角度 (2 つの変位ベクトルのなす —, angle), 452
角度 (angle), 342, 441
下限 (infimum), 407
下降列 (decreasing sequence), 405
可算 (countable), 413
可算選択公理 (Axiom of Countable Choice), 413
型 (代数構造の –, signature), 361
上三角行列 (upper triangular matrix), 228
環 (ring), 370
含意 (implication), 19
関係 (relation), 352
関数 (function), 31
完全性定理 (completeness theorem), 311
完備 ($\mathbb{R}$ が –, complete), 396
完備 (距離空間が –, complete), 411
完備化 (距離空間の –, completion), 419
簡約化 (reduction), 197
簡約な階段形 (reduced echelon form), 187
簡約な行階段形 (reduced raw echelon form), 188
簡約な行階段形 (reduced row echelon form), 187

幾何学的直観 (geometric intuition), vi
幾何的多重度 (geometrical multiplicity), 338
基底 (K^n の –, basis), 261
基底 (線型空間の,–, basis), 272
基底の拡張定理 (Basis Extension Theorem), 287
帰納法の原理 (the principle of induction), 13
帰納法のステップ (induction step), 13
帰納法の初め (initial step of induction), 13
基本行列 (elementary matrix), 185
基本変形 (elementary operation), 183
逆行列 (inverse matrix), 105
逆元 (群の –, inverse element) , 217
逆写像 (inverse), 39
逆像 (inverse image), 32
逆置換 (inverse permutation), 205
行 (行列の –, (row)), 2
行階段形 (row echelon form), 187
共存 (環の上の順序が, 四則演算と –, compatible), 372
共存 (体上の順序が, 四則演算と –, compatible), 55
共通部分 (2 つの集合の –, intersection), 15
行に関する基本変形 (elementary row operation), 183
行列 (S 上の —, matrix on S), 4
行列 (matrix), 2
行列式 (determinant), 213
行列表現 (線型写像の基底に関する –, matrix representation), 315
極限 (実数の列の –, limit), 395
極限 (有理数の列の –, limit of a sequence of rational numbers), 379
極限 (距離空間の点列の –, limit), 410
距離 ($\mathbb{R}^n$ での –, distance), 87
距離 (distance, または, metric), 407
距離空間 (metric space), 408
距離の公理 (metric axioms), 408

偶奇性 (signature), 36, 210
区間 (interval), 96
クラメールの公式 (Cramer's rule), 195, 247
クローネカのデルタ (Kronecker's delta), 5
群 (group), 216
群の公理 (group axioms), 216

系 (corollary), 7
K-係数の一次方程式 (linear equation with coefficients in K), 170
K 上線型独立 (linearly independent over K), 254, 269
K-上の行列 (matrix over K), 63
K 上の線型空間 (linear space over K), 265
K-上のベクトル (vector over K), 63
係数 (coefficients), 170
係数行列 (coefficient matrix), 175
係数体 (coefficient field), 265

K-線型写像 (X から Y への –, K-linear mapping), 294
K-線型性 (K- linearity), 102
K-独立 (線型空間 X の要素 $\mathbb{b}$ が, $\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\} \subseteq X$ 上で –, K-independent (over $\{\mathbb{b}_1, ..., \mathbb{b}_k\}$)), 270
独立 (線型空間 X の要素 $\mathbb{b}$ が, $S \subseteq X$ 上で –, K-independent (over S)), 270
結合律 (二項演算の –, associativity), 37
結合律 (体の乗法の –, associativity), 51
結合律 (体の加法の –, associativity), 51
結合律 (行列の積の –, associarivity), 69
結合律 (集合算の –, associativity), 15
結論 (conclusion), 19
元 (element), 13
原点を中心とする回転 (rotation about the origin), 434
原点を中心とする反時計回りの角度 θ の回転 (rotation about the origin counter-clockwise by angle θ) 反時計回りの角度 θ の回転 (rotation about the origin counter-clockwise by angle θ) , 121
原点を含む平面 ($\mathbb{R}^n$ での –, plane containing the origin), 165
原点を含む平面 (plane containing the origin), 145

交換定理 (Exchange Theorem), 271
合成関数 (composition), 37
合成写像 (composition), 37
交代性 (alternating property), 249
交代的多重線型写像 (alternating multi-linear map), 248
恒等関数 (identity function), 37
恒等写像 (identity mapping), 37
恒等置換 (identity permutation), 205
コーシー列 (実数の –, Cauchy sequence of real numbers), 395
コーシー列 (有理数の –, Cauchy sequcence of rational numbers), 379
コーシー列 (距離空間での –, Cauchy sequence in a metric space), 410
互換 (transposition), 206
弧状連結 (path connected), 454
弧度法 (radiant), 341
固有空間 (線型変換の固有値に対応する –, eigenspace), 321
固有値 (正方行列の –, eigenvalue), 321
固有値 (線型写像の –, eigenvalue), 320
固有ベクトル (正方行列の, 固有値に対応する –, eigenvector), 322
固有ベクトル (線型写像の, 固有値に対応する –, eigenvector), 320
ゴルトバッハ予想 (Goldbach Conjecture), 48
根 (こん, root), 323

さ行

斉次方程式 (homogeneous equation), 175
最小元 (minimal element), 354
斉次連立方程式 (homogeneous system of equations), 175
サイズ (有限集合の –, size), 41
最大元 (maximal element), 354
サポート (support), 207
左右 (chirality), 132
三角不等式 (距離の –, triangle inequality), 88, 407
3 次元の回転行列 (three dimensinal rotation matrix), 333
三平方の定理 (Pythagorean theorem), 87

軸 (pivot), 187
次元 (アファイン部分空間の –, dimension), 290
次元 (線型空間の –, dimension), 276
次元定理 (Dimension Theorem), 298
自己隔離期間, vii
自己同型写像 (automorphism), 403
指数関数的 (exponential), 215
自然数 (natural numbers) , 12
従う (主張から主張が –, follow from), xix
下に有界 (bounded from below), 405, 406
実数 (real numbers), 17
実数のコーシー列 (Cauchy sequence of real numbers), 395
始点 (折線の –, initial point), 454
自明 (一次方程式が –, trivial), 177
自明な線型結合 (trivial linear combination), 254, 269
下三角行列 (lower triangular matrix), 230
射影 (ベクトルの他のベクトルへの –, projection), 140
写像 (mapping), 31, 35
周期 (巡回置換の –, length), 207
集合 (set), 13
集合族 (family of sets) , 15
収束する (距離空間の点列が x に –, converge to x), 410
収束する (実数の列が –, converge), 395
収束する (有理数の列が –, converge), 379

終点 (折線の –, endpoint), 454
主成分 (leading entry), 187
シュタイニッツの基底の入れ替え定理 (Steinitz exchange lemma), 279
巡回置換 (circular permutation), 207
循環 (vicious circle), xxii, 436
順序 (partial ordering), 55, 353
順序体 (ordered field), 55
順序対 (ordered pair), 35
準同形 (群の –, group homomorphism), 217
上界 (upper bound), 405, 406
上限 (supremum), 406
上射 (surjection), 32
上昇列 (increasing sequence), 405
真偽表 (truth table), 25
singleton (シングルトン), 95
真の線型部分空間 (strict linear subspace), 281
真の増加関数 (strictly increasing function), 403

推移性 (同等性の –, transitivity), 24
推移性 (含意の –, transitivity), 24
推移律 (transitivity), 353, 356
数学の哲学 (philosophy of mathematic), 478
スカラー倍 (scalar multiple), 65
スカラー倍 (線型空間の要素の –, scalar multiple), 264

制限 (関数の –, restriction), 32
整数 (integers), 16
生成する (K^n の要素の集まりが, K^n を –, generate), 261
S の生成する線型部分空間 (linear subspace generated from S), 282
正則 (行列が –, non-singular), 107
成分 (ベクトルの –, entry), 8
成分 (列の –, entry), 43
成分 (行列の –, entry), 3
正方行列 (square matrix), 4
絶対値 ($\mathbb{R}$ での –, absolute value), 395
絶対値 (順序体 K での –, absolute value), 57
ゼロ行列 (zero matrix), 4
ゼロ元 (zero element), 264
ゼロ次元空間 (zero dimensional linear space), 276
ゼロベクトル (zero vector), 77
ゼロベクトル (線型空間の –, zero vector), 264
線型空間 (K 上の –, linear space over K), 264
線型空間の公理 (axioms of linear spaces), 264
線型結合 (linear combination), 80, 269
線型結合 (有限集合の –, linear combination), 270
線型結合 (重み $c_1, \ldots, c_k$ を持つ $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ の –, linear combination of $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k$ with weights $c_1, \ldots, c_k$), 254, 268
線型写像 (K^n から K^m への –, linear mapping), 102
線形順序 (linear ordering), 17, 55, 353
線型性 (linearity), 102
線型写像 (X から Y への –, linear mapping), 294
線型超平面 (linear hyperplane), 303
線型独立 (K^n の有限部分集合が K^n で –, linearly independent), 256
線型独立 (K^n の要素たちが –, linearly independent), 254
線型独立 (線型空間 X の有限部分集合が –, linearly independent), 269
線型独立 (線型空間 X の要素たちが –, linearly independent), 269
線型独立 (線型空間の部分集合が –, linearly independent), 272
線型部分空間 (linear subspace), 280
線型変換 (linear transformation), 320
全射 (surjection), 32
全順序 (total ordering), 55, 353
全称文 (universal sentence), 311
選択公理 (Axiom of Choice), 413, 429
全単射 (bijection), 32
前提 (antecedent, premise), 19
線分 (line segment), 96

像 (集合の関数による –, image), 32
核 (線型写像の –, image), 295
増加関数 (increasing function), 403
相似 (2 つの正方行列が –, (similar)), 329
相似 (線型変換が –, similar), 327
素数 (prime number), 45
それぞれ (respectively), xix

た行

体 (field), 54
第 n 象限 (n'th quadrant), 131
対角化 (正方行列の –, diagonalization), 319
対角化 (線型写像の –, diagonalization), 319
対角化可能 (diagonalizable, 319

対角化可能 (体 K 上で –, diagonalizable), 319
対角化可能性の特徴付け定理 (Characterization of Diagonalizability), 326
対角行列 (diagonal matrix), 4
対角成分 (diagonal entries), 5
対角線 (多角形の –, diagonal), 464
対角線による三角形分割 (多角形の –, triangulation by addig diagonals), 465
対偶 (contraposition), 25
台集合 (underlying set), 217, 365
対称群 (n-次の –, symmetric group of degree n), 203
対称律 (symmetry), 356
代数学の基本定理 (Fundamental theorem of algebra), 17
代数構造 (algebraic structure), 360
代数的 (algebraic), vi
代数的多重度 (algebraic multiplicity), 339
対蹠点 (antipode), 336
体の公理 (field axioms), 51, 54
代表系 (representing system), 358
代表元 (representative), 358
互いに素 (2 つの集合が –, disjoint), 23
互いに他のスカラー倍でない (2 つのベクトルが –), 110
多角形 (polygon), 116, 456
多角形領域 (polygonal area), 116
多角形に対するジョルダンの定理 (Jordan Curve Theorem for polygons), 455
多角形の三角形分割定理 (Polygon Triangulation Theorem), 465
多項式 (polynomials), 211
多重線型性 (multilinearity), 249
縦横サイズ (行列の –, size), 2
ダミー変数 (dummy variable), 171
単位円 (unit circle), 342
単位行列 (identity matrix), 5
単位元 (群の –, identity element), 216
単位元を持つ可換な半群 (commutative semigroup with the unit), 371
単位置換 (identity permutation), 205
単位ベクトル (unit vector), 80
単射 (injection), 32
単純多角形 (simple polygon), 116

値域 (co-domain), 31
チェビシェフの定理 (Chebyshev's Theorem), 47

置換 (n-次の –, permutation of n elements), 203
稠密 (dense), 411
頂点 (多角形の –, vertex), 456
超平面 (hyperplane), 173, 303
直積 (2 つの集合の –, direct product), 35
直線 ($\mathbb{R}^2$ での –, line), 144
直線 ($\mathbb{R}^n$ での –, line), 165
直交行列 (orthogonal matrix), 124
直交する (2 つの線分が –, perpendicular), 137
直交変換 (orthogonal transformation), 124, 128

繋げる (concatenate), 47
徒然草, 479

定義域 (domain), 31
定数関数 (constant function), 37
定値写像 (constant mapping), 37
デカルト積 (Cartesian product), 35
点 (point), 89
転置行列 (transpose), 6

同型 (2 つの群が –, isomorphic), 218
同型 (一階の構造構造が –, isomorphic), 367
同型 (代数構造が –, isomorphic), 363
同型 (線型空間が –, isomprphic), 307
同型 (部分代数構造上で –, isomorphic over –), 365
同型写像 (一階の構造の –, isomorphism), 367
同型写像 (代数構造の –, isomorphism), 363
同型写像 (線型空間の –, isomorphism), 306
同型写像 (群の –, isomorphis), 218
同型写像 (部分代数構造上の –, isomorphism over –), 365
同値 (2 つの一次方程式が –, equivalent), 171
同値 (2 つの係数行列が –, equivalent), 176
同値 (2 つの命題が –, equivalent), 24
同値 (2 つの拡大係数行列が –, equivalent), 176
同値 (連立一次方程式が –, equivalent), 174
同値関係 (equivalence relation), 356
同値関係 (クラス上の —, class equivalence relation), 359
同値 (2 つの命題が –, equivalent), 14
等長埋め込み (isometric embedding, 419
等長同相 (isometric), 420
等長同相写像 (isometry), 420
同値類 (equivalence class), 357

特性多項式 (characteristic polynomial), 323
特性方程式 (characteristic equation), 322
特別な場合 (special case), 5
独立 (ベクトル $\mathbb{b}$ が, $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$ 上 –, independent (over $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$)), 258
独立 (線型空間 X の要素 $\mathbb{b}$ が, $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\} \subseteq X$ 上で –, independent (over $\{\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_k\}$)), 270
独立 (線型空間 X の要素 $\mathbb{b}$ が, $S \subseteq X$ 上で –, independent (over S)), 270
凸領域 (convex region (convex set)), 458
ド・モルガンの法則 (De Morgan's laws), 26
トレース (trace), 337

な行

内積 (inner product), 84
内部 (多角形の –, interior), 455
長さ (区間の –, length), 96

二項関係 (binary relation), 352
2 次元の回転行列 (two dimensinal rotation matrix), 123
任意の (arbitrary), 4

ノルム (norm), 85

は行

場合分け (proof by exhaustion, proof by cases), 46
掃き出し法 (Gaussian elimination), 187
ハメル基底 (Hamel basis), 273
パラメタ (parameter), 13, 189
パリティの破れ (parity violation), 132
張る空間 (2 つのベクトルの –, plane spanned by two vectors), 145
S の張る線型部分空間 (linear subspace spanned by S), 282
反射律 (reflexivity), 356
半順序 (partial ordering), 55, 353
反数 (additive inverse または, opposite) , 16
反対称律 (anti-symmetry), 353
反反射律 (anti-reflexivity), 353
反例 (counter-example), 34

非可換 (行列の積が –, non-commutative), 67
非軸列 (non-pivotal column), 191
非有界 ($\mathbb{R}^2$ の部分集合が –, unbounded), 455
ピュタゴラスの定理 (Pythagorean theorem), 87
表現行列 (f の $\mathcal{B}$ に関する –, matrix representing f with respect to $\mathcal{B}$), 317
表現行列 (f の –, matrix respresenting f), 104
標準化された 交代的多重線型写像 (normalized alternating multi-linear map), 249

∀-文 (∀-sentence), 311
複素数 (complex numbers), 17
符号 (signature), 213
付随する線型写像 (アファイン写像 f に –, linear mapping associated with f), 300
付随する型部分空間 (アファイン部分空間 $\mathcal{A}$ に –, linear subspace associated with $\mathcal{A}$), 290
不定定数 (ふていじょうすう, unknown), 170
不定変数 (unknown variable), 170
部分空間 (距離空間の –, subspace), 409
部分構造 (一階の構造の –, substructure), 367
部分構造 (代数構造の –, substructure), 363
部分集合 (subset), 18
分割 ($\mathbb{R}^3$ での, 区間の $r : s$ の –, division), 152
分割 (区間の $r : s$ の –, division), 96
分配律 (体の演算の –, distributivity), 51

平行 ($\mathbb{R}^2$ の 2 直線が –, parallel), 97
平行 ($\mathbb{R}^3$ の 2 直線が –, parallel), 152
平行移動 ($\mathbb{R}^3$ での –, translation), 152
平行移動 (translation), 98
閉集合 (closed set), 412
平面 ($\mathbb{R}^3$ での –, plane), 148
平面 ($\mathbb{R}^n$ での –, plane), 165
冪等行列 (idempotent matrix), 72
冪零行列 (nilpotent matrix), 72
ベルトランの仮説 (Bertrand's Postulate), 47
辺 (多角形の —, edge), 456
変位ベクトル (displacement vector), 89
変換 (transformation), 31
ベン図 (Venn diagram), 27
変数 (一次方程式の –, variable), 170

方程式 (equation), 175
方程式 (一般の –, equation), 175
保存する (埋め込みが関係を –, preserve), 366
保存する (埋め込みが関数を –, preserve), 363
補題 (lemma), 7

ま行

枚挙 (–する，enumerate), 44
または，それぞれ (respectively), xx
マンハッタン距離 (Manhattan distance), 430

矛盾する (連立方程式が –, inconsistent), 191
無内容的 (vacuously), 20, 21
無内容的真理 (vacuous truth), 21
無理数 (irrational number), 17

モデル理論 (model theory), 265, 311

や行

有界 ($\mathbb{R}^2$ の部分集合が –, bounded), 455
有界 (集合 X 上の距離が –, bounded), 427
ユークリッド距離 (Euclidean distance), 430
有限 (finite), 41
有限次元 (finite dimensional), 276
有限集合 (finite set), 14, 41
優先順位 (priority), 53
有理数 (rational numbers), 16
有理数のコーシー列 (Cauchy sequence of rational numbers), 379

余因子行列 (co-factor matrix), 243
余因子展開 (行列の列に関する –, co-factor expansion), 234
余因子展開 (行列の行に関する –, co-factor expansion), 234
要素 (element), 13
要素の個数 (有限集合の –, cardinality), 41

ら行

ラグランジュの四平方定理 (Lagrange's Four-Square Theorem), 55
ラッセルのパラドックス (Russell's paradox), 359

ラプラス展開 (行列の列に関する –, Laplace expansion), 234
ラプラス展開 (行列の行に関する –, Laplace expansion), 234
ラプラスの悪魔 (Paplace's demon), 234

リプシッツ同値 (Lipschitz equivalent), 422
両立する (同値関係が代数構造と –, congruent with), 361
両立する (同値関係が関係 R^* と –, congruent with R^*), 358
両立する (同値関係が関係と –, congruent with), 358
両立する (同値関係が関数 f と –, congruent with f), 358

累積的帰納法 (cumulative induction principle), 13, 22

例証 (witness), 33
列 (sequence), 43
列 (行列の –, (column)), 2
列ベクトル (column vector), 7
連続な時間変化としての回転, 130
連立一次方程式 (system of linear equations), 173
連立方程式 (system of equations), 175

わ行

和 (線型空間の要素の –, addition), 264
yz-平面 (yz-plane), 145
和集合 (2 つの集合の –, union), 14
和集合 (集合族の –, union), 15
1-1 (写像が –, one-to-one), 32
1-1 onto (写像が -, 1-1 onto), 32

記号表 (記号の順列は，LaTeX マクロの読みのアルファベット順に準拠するものになっている)

(x, y) (x, $y \in \mathbb{R}^n$), 84
$(i\ j)$, 206
$(i\ j)_n$, 206
$+_{rad}$, 364
$-_{rad}$, 365
$:=$, 6
$:\Leftrightarrow$, 23
$[S]^K_X$, 282
$[S]_X$, 282
$A + B$, 63
A^{-1}, 106
a^{-1}, 217

$A - B$, 66
$A = \langle A, \ldots \rangle$, 365
$A_{\frac{1}{2}}$, 132
$A\check{B}$, 67
$[A \vdots \mathbb{b}]$, 175
$| \cdot |$, 57, 395
$\mathbb{a} \overline{} \mathbb{b}$, 95
$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, 363, 367
$a \cdot b$, 51
A_f, 104
$A^f_{\mathcal{B}}$, 317
$A^f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}$, 315
$\mathbb{a} \sqcap \mathbb{b}$, 96
$A_{k,\ell}$, 233
A^k, 69
$a \not{R}\, b$, 352
$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, 367
$A|\ell$, 471
$B_{\frac{1}{m}}(x)$, 411
$\mathbb{b} \downarrow n$, 191
$\bigcup_{i \in I} S_i$, 15
$\bigcup X$, 15
$\bullet$, 441
$\bullet$, 439
C, 342
$\mathbb{C}$, 17
cA, 65
$\mathcal{E}_A$, 329
$\mathcal{E}_f$, 328
$\mathcal{Q}$, 373
$\mathcal{Q}_{rad}$, 439
$\mathcal{R}_{rad}$, 364
:, xix
$:=$, 6
$:\Leftrightarrow$, 23
$\mathbb{C}^n$, 77
$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, 363
$\mathcal{D}$, 439
d_{C}, 440
d_E, 430
$\det(A)$, $\det[a_{i,j}]$, 213
$\dim(\mathcal{A})$, 290
$\dim(X)$, 276
D, 439
$\mathbb{d}^k_n$, 439
d_M, 430
$dom(f)$, 31
$\dot{\bigcup} X$, 23
$\dot{\cup}$, 23
d_{rad}, 408
$\tilde{d}_{\mathsf{C}}$, 440, 452
$d|r_0$, 426
$d(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$, 87
$\mathcal{E}_A$, 329
E^A_a, 322
$\mathcal{E}_f$, 328
E^f_a, 321
$\ell \equiv m \pmod{k}$, 356
E_n, 5
$\mathbb{e}^n_i$, 80
$[a]_R$, 357
$\equiv_{rad}$, 357
$f(a_1, \ldots, a_n)$, 42
$f^{-1}{}''T$, 32
$f_{\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y}$, 315
f^{-1}, 39
$f \restriction S$, 32
$f : X \xrightarrow{\cong} Y$, 307
$f : X \to Y$, 31
$\mathsf{GL}(n, K)$, 220
H_n, 446
i_{C}, 440
$f''S$, 32
$\mathrm{Im}(f)$, 295, 300
$\in$, 14
$i_{\mathbb{N}^*}$, 369
$\iota : \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$, 363, 366
$\iota : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$, 363, 367
$i_{\mathbb{Q}}$, 390, 397
i_{rad}, 364
K, 54
$(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, 207
$\mathrm{Ker}(f)$, 295
K^n, 77
$\wedge$, 26
$\Leftrightarrow$, 24
$\leq$, 56
$\lim_{n\to\infty} q_n$, 380
$\lim_{n\to\infty} r_n$, 395
$\lim_{n\to\infty} x_n$, 411
$\lim^d_{n\to\infty} x_n$, 411
$\vee$, 26
$<$ ($\mathbb{Q}$ 上の標準的順序), 54, 378
$<$ ($\mathbb{R}$ 上の標準的順序), 57, 392
$<_{\mathcal{R}}$, 381
$\max_R S$, $\max S$, 354
$\min_R S$, $\min S$, 354
$\mathbb{N}$, 13
$\mathbb{N}^*$, 16
$n!$, 214
$\neg$, 23
$\| \cdot \|$, 85

$\notin$, 14
O, 4
O_n, 4
$O_{m\times n}$, 4
$\overline{m}$, $\overline{n}$, xxii, 42
π, 341, 448
PL, 211
p_n, P_n, 446
$\prod_{i\in I} a_i$, 45
$\prod_{i=1}^{n} k_i$, 45
$\prod S$, 45
$\mathcal{Q}$, 373
$\mathbb{Q}$, 16
Q_{C}, 439
❏, 7
Q_{rad}, 439
$\mathcal{Q}_{rad}$, 439
$\mathbb{R}$, 17
$R(a_1, \ldots, a_n)$, 352
$range(f)$, 32
$rank(A)$, 193
$\mathbb{Q}^n$, 77
$\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{> 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{< 0}$, 402
$\mathbb{R}^n$, 76
$\overrightarrow{q}$, 390
$\mathcal{R}_{rad}$, 364
R_θ, 122, 123
r_θ, 494
$R_x(\theta)$, 161
$R_y(\theta)$, 161
$R_z(\theta)$, 160
$S_1 \cap \cdots \cap S_n$, 16
$S_1 \cup \cdots \cup S_n$, 15
$\mathsf{S}(\mathcal{S})$, 173
$S \cap T$, 15
$S \cup T$, 14
$\mathsf{S}(\mathbb{E})$, 175
$\mathsf{S}(\mathsf{E})$, 171
$sgn(\cdot)$, 36, 213, 223
$\#(X)$, 14, 41
σ^{-1}, 205
$\sim_{\mathcal{Q}}$, 374
$\sim_{\mathcal{R}}$, 382
S_n, 203
$\sum_{i\in I} a_i$, 44
$\sum_{i=1}^{n} a_i$, 44
$\sum S$, 44
$supp(\sigma)$, 207
${}^tA$, 6
$\mathrm{tr}(A)$, 337
ε_n, 205
φ_A, 101
$\varphi_{\mathcal{B}}$, 308
X/R, 357
$X \cong^K Y$, 307
$X \cong Y$, 307
$X \subseteq Y$, 18
$X \subsetneqq Y$, 18
$\mathbb{Z}$, 16
$\mathbb{O}$, 77
$\mathbb{O}_n$, 77

人名

アーベル (Niels Henrik Abel), 1802(享和 2 年，ネドストランド (デンマーク-ノルウェイ))〜1829(文政 12 年，フロランド (ノルウェイ)), 217
アイクナー (Martin Aigner), 1942(昭和 17 年，リンツ (オーストリア))〜, xxv
アインシュタイン (Albert Einstein), 1879(明治 12 年，ヴュルテンベルク (ドイツ))〜1955(昭和 30 年，プリンストン), 314
ヴァンデルモンド ((Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735(享保（きょうほう）20 年，パリ)〜1796(寛政 8 年，パリ)), 211
エルデシュ (Paul Erdős), 1913(大正 2 年，ブダペスト)〜1996(平成 8 年，ワルシャワ), 47, 49, 76, 480
オイラー (Leonhard Euler), 1707(宝永 4 年，バーゼル)〜1783(天明 3 年，サンクトペテルブルク), 44, 335, 337
ガウス (Carl Friedrich Gauß), 1777(安永 6 年，ブルンスウィック)〜1855(安政 2 年，ゲォッテンゲン) , 45, 187
カルヴィーノ (Italo Calvino) 1923 (大正 12 年，サンティャゴ・デ・ラスヴェガス (キューバ))〜1985 (昭和 60 年，シエナ), x
カントル (Georg Cantor) 1845(弘化 2 年，ペテルスブルク (ロシア帝国))〜1918(大正 7 年，ハレ (ドイツ帝国)), 379
グールド (Glenn Gould), 1932(昭和 7 年，トロント)〜1982(昭和 57 年，トロント), 49
クラトフスキー (Kazimierz Kuratowski), 1896(明治 29 年，ワルシャワ)〜1980(昭和 55 年，ワルシャワ), 35
クラメール (Gabriel Cramer), 1704(宝永 1 年，ジュネーヴ)〜1752(宝暦 2 年,

バニョール=シュル=セーズ), 247
クローネカ (Leopold Kronecker), 1823(文政 6 年，レグニツァ (リークニッツ)) ～1891(明治 24 年，ベルリン), 5
ケイリー (Arthur Cayley), 1821(文政 4 年，リッチモンド (英国))～1895(明治 28 年，ケンブリッジ (英国)), 170
コーシー (Augustin-Louis Cauchy) 1789(寛政元年，パリ)～1857(安政 4 年，ソー), 379
ゴダール (Jean-Luc Godard), 1930(昭和 5 年，巴里)～2022(令和 4 年，ロル (スイス)), xxiii, 477
小寺 平治，1940(昭和 15 年，東京)～ 2016(平成 28 年，名古屋), xxv, 490
シェラハ (Saharon Shelah), 1945 (昭和 20 年，エルサレム)～, 37, 477
シュヴァルツ (Hermann Schwartz), 1843(天保 14 年，イェジマノーヴァ (ヘルムスドルフ))～1921(大正 10 年，ベルリン), 86
シュタイニッツ (Ernst Steinitz), 1871(明治 4 年，ラウラヒュッテ (現在はポーランド))～1928(昭和 3 年，キール (ドイツ)), 279
ジョルダン (Camille Jordan), 1838(天保 9 年，リヨン)～1922(大正 11 年，パリ), 455
シルヴェスター (James Joseph Sylvester), 1814(文化 11 年，ロンドン)～ 1897(明治 30 年，ロンドン) , 2
関孝和，??～1708(宝永 5 年，江戸), 247
高木貞治，1875 (明治 8 年，岐阜) ～1960 (昭和 35 年，東京), 2
高野長英， 1804(文化 1 年，水沢藩 (現・岩手県奥州市))～1850(嘉永 3 年，江戸), 193
武満徹 1930(昭和 5 年，東京)～1996(平成 8 年，東京), x
玉木 大, 350
チェビシェフ (Pafnuty Chebyshev, Пафну́тий Чебышёв), 1821(文政 4 年，ボロフスク)～1894(明治 27 年，サンクトペテルベルグ), 47
ツィーグラー (Günter M. Ziegler), 1963(昭和 38 年，ミュンヘン)～, xxv
ツィーグラー (Martin Ziegler), 1948(昭和 23 年，カッセル (西ドイツ))～, 265
ディラック (Paul Dirac), 1902(明治 35 年，ブリストル)～1984(昭和 59 年，テラヘシー (アメリカ合衆国)), 12
デカルト (René Descartes), 1596 (文禄 5 年, デカルト (旧 La Hayne en Touraine))～1650 (寛永 27 年，ストックホルム), 35
デデキント (Richard Dedekind), 1831(天保 2 年，ブラウンシュヴァイク)～ 1916(大正 5 年，ブラウンシュヴァイク), ix, 350
デューラー (Albrecht Dürer), 1471(応仁 5 年，ニュルンベルク)～1528(明応 37 年，ニュルンベルク), xxv
ド・モルガン (Augustus De Morgan), 1806(文化 3 年，マドラス (現在のインド))～1871(明治 4 年，ロンドン), 26
西脇順三郎，1894(明治 27 年，小千谷)～ 1982(昭和 57 年，小千谷), iii
バッハ (Johann Sebastian Bach), 1685(貞亨（じょうきょう）2 年，アイゼナッハ)～1750(寛延 3 年，ライプツィヒ), 49
ハメル (Georg Hamel), 1877(明治 10 年，デューレン (ドイツ))～1954(昭和 29 年，ランツフート (西ドイツ)), 273
ヒルベルト (David Hilbert) 1862(文久 2 年，クゥーニヒスベルク (プロシア)) ～1943(昭和 18 年，ゲッティンゲン (ドイツ)), 320
ファン・デル・ヴェルデン (Bartel Leendert van der Waerden), 1903(明治 36 年，アムステルダム)～1996(平成 8 年，チューリッヒ), 279
フェルマー (Pierre de Fermat) 1607 (慶長 5 年，ボーモン・デュ・ロマーニュ (フランス))～1665(寛文 5 年，カストル (フランス)), 35
フックス (Ulrich Fuchs ??～1998(平成 10 年，ブランデンブルク)), 7
ブラウア (L.E.J. Brouwer), 1881(明治 14 年，ロッテルダム)～1966(昭和 41 年，ブラリクム (オランダ)), 336
ペアノ (Giuseppe Peano), 1858 (安政 5 年，クーネオ)～1932 (昭和 7 年，トリノ), xii
ベートーベン (Ludwig van Beethoven), 1770(明和 7 年，ボン)～1827(文政 10 年，ウィーン), 314
ベルトラン (Joseph Bertrand) 1822(文政 5 年，パリ)～1900(明治 33 年，パリ), 47
ベン (John Venn), 1834(天保 5 年， ヨークシャー (英国))～1923(大正 12 年，ケンブリッジ (英国)), 27
ポアンカレ (Henri Poincaré), 1854(安政 1

年，ナンシー)〜1912(明治 45 年，パリ), 336
松尾芭蕉，1644(寛永 21 年，伊賀)〜1694(元禄 7 年，大阪), iii
三宅敏恒，1944(昭和 19 年)〜, xi
Arnold W. Miller, 477, 490
ユークリッド (Εὐκλείδης), 紀元前 4 世紀中盤〜紀元前 3 世紀中盤, 47
吉田兼好 1283(弘安 3 年) 頃〜1350 年代, 479
ラウテンベルク (Wolfgang Rautenberg), 1936(昭和 11 年，ポツダム)〜2011(平成 23 年，ベルリン), 7
ラプラス (Pierre-Simon Laplace), 1749(寛延 2 年，ボモン・アン・オージ)〜1827(文政 10 年，パリ), 234
リプシッツ (Rudolf Lipschitz), 1832 (天保 3 年, ケゥニッヒスベルク)〜1903 (明治 36 年，ボン), 422
レニイ (Alfréd Rényi), 1921(大正 10 年，ブダペスト)〜1970(昭和 45 年，ブダペスト), 76
ロケット (Peter Roquette), 1927(昭和 2 年，クゥーニヒスベルク (ドイツ))〜, 279