微分積分学 I　2009 年 7 月 27 日施行の期末試験の解答例と解説

渕野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

July 28, 2009

last modified on: August 4, 2009

渕野担当の微分積分学 I で 2009 年 7 月 27 日に行なった期末試験のための演習の解答例とそこでの考え方を示します.

解答例は計算ミスなどがないよう注意して書いたつもりですが，もし間違えを発見した場合には，上記のアドレス宛にメールで書いて知らせてください.
このテキストは

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-ss07-kimatsu.pdf

としてダウンロードできます.

科 目 名	微 分 積 分 学 I	担当者名	渕 野 昌	所要時間	75 分	2009 年 7 月 27 日 (月) 15:20〜16:35 施行
持 込	すべて可					
添付する 解答用紙	1 枚配付（問題用紙の回収 要 ・ 否）		計算用紙 0 枚配付			

1) 次の式であらわされる関数の導関数を求めよ: (a) $4e^{-2x^2+1}$ (b) $\sin(2x + \frac{3}{7}\pi)$

2) $f(x)$ は，定義域が $(0, \infty)$ で値域が $[0, \infty)$ の微分可能な関数で，$f(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{2}$ のときのみであるという．また，$f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ である．$g(x) = \frac{1}{(f(x))^2} + 2$ として関数 $g(x)$ を定義するとき次に答えよ．

(a) $g(x)$ の定義域と値域は何か？ (b) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いてあらわせ．

(c) グラフ $y = f(x)$ の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(d) $g(1)$ と $g'(1)$ を求めよ． (e) グラフ $y = g(x)$ の点 $(1, g(1))$ における接線を求めよ．

3) 次の不定積分を計算せよ

(a) $\int e^{\sqrt{\pi}x} + \pi dx$ (b) $\int (3x^7 - 2x + 1)dx$

4) 次の等式が正しいことを示せ: $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = x \tan \frac{x}{2} + C$

5) $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ とする．このとき， (a) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ． (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ は何か？

(c) $f(x)$ の増減表（$f'(x)$, $f''(x)$ の正負の表示を含むもの）を作成し，この関数の増加，減少，極大，極小，極値，凹凸，変曲点を調べよ．

(d) (b) と (c) を用いてグラフの概略図を描け．

6) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin 3x$ とする．このとき

(a) $0 \leq x$ となるすべての x に対し，$f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(b) 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, および y-軸と直線 $x = \pi$ で囲まれる xy-平面上の領域を図示せよ．

(c) (b) での領域の面積を計算せよ．

7) (a) $\int_1^e (\log x + \frac{1}{x})dx$ を計算せよ．

(b) 極座標表示を用いて $r = 2\theta + 2$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で現わされる曲線と x 軸で囲まれる図形の概略を図示し，この図形の面積を求めよ．

問題の解答例と解説

1) 次の関数の導関数を求めよ: (a) $4e^{-2x^2+1}$　　(b) $\sin(2x+\frac{3}{7}\pi)$

(a): u を変数とする関数 $4e^u$ の変数 u に，関数 $-2x^2+1$ を代入して得られた合成関数と見て，合成関数の微分法により計算する．$\frac{d}{du}4e^u = 4e^u$ だから，$(4e^{-2x^2+1})' = 4e^{-2x^2+1}\cdot(-2x^2+1)' = 4e^{-2x^2+1}\cdot(-4x) = -16xe^{-2x^2+1}$

(b): u を変数とする関数関数 $\sin u$ の変数 u に，関数 $2x+\frac{3}{7}\pi$ を代入して得られた合成関数と見て，合成関数の微分法により計算する．$\frac{d}{du}\sin u = \cos u$ だから，$(\sin(2x+\frac{3}{7}\pi))' = \cos(2x+\frac{3}{7}\pi)\cdot(2x+\frac{3}{7}\pi)' = 2\cos(2x+\frac{3}{7}\pi)$.

2) $f(x)$ は，定義域が $(0,\infty)$ で値域が $[0,\infty)$ の微分可能な関数で，$f(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{2}$ のときのみであるという．また，$f(1)=2$, $f'(1)=-3$ である．$g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}+2$ として関数 $g(x)$ を定義するとき次に答えよ．

(a)　$g(x)$ の定義域と値域は何か？

$g(x)$ の定義域は $f(x)$ の定義域から，$f(x)$ の定義域に含まれる実数 x で $g(x)$ の定義式が意味をなさないようなものすべてを除いたものである．$g(x)$ の定義式は，$(f(x))^2$ が 0 になるところで意味をなさないものになる．これは $f(x)$ が 0 になるところ，と言っても同じである．$f(x)$ が 0 になるのは $x=\frac{1}{2}$ のときだから，$g(x)$ の定義域は $f(x)$ の定義域 $(0,\infty)$ から $\frac{1}{2}$ を除いたものである．これは $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqq x, x\neq\frac{1}{2}\}$ あるいは，$(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\infty)$ などと表すことができる．
$g(x)$ 値は，$f(x)$ の値がどんどん大きくなるとき，減少して 2 に近づく．また，$f(x)$ の値が 0 に近づくとき，$g(x)$ の値は限りなく大きくなる．$f(x)$ が連続であることから $g(x)$ も連続で，したがって，$g(x)$ の値は一つながりの（連結な）領域になる．このことから，$g(x)$ の値域は $(2,\infty)$ となることがわかる．

(b)　$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いてあらわせ．

教科書 p.13 の式 (1.9) を用いる（2 番目の $=$ では定理 1.3 (3) または合成関数の微分法を用いている）:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{(f(x))^2}+2\right)' = -\frac{\left((f(x))^2\right)'}{\left((f(x))^2\right)^2} = -\frac{2f(x)f'(x)}{(f(x))^4} = \frac{-2f'(x)}{(f(x))^3}$$

(c)　グラフ $y=f(x)$ の点 $(1,2)$ における接線の方程式を求めよ．

グラフ $y=f(x)$ の点 $(1,2)$ における接線は，傾きが $f'(1)$ で点 $(1,2)$ を通る直線だから，その方程式は，$y-2=f'(1)(x-1)$ で与えれられる．これに $f'(1)=-3$ を代入すると，$y-2=-3(x-1)\Leftrightarrow y=-3x+5$

(d)　$g(1)$ と $g'(1)$ を求めよ．

$g(x)$ の定義式と (b) での $g'(x)$ を与える式の変数 x に 1 を代入して，$f(1)=2$, $f'(1)=-3$ を用いると，

$$g(1) = \frac{1}{(f(1))^2}+2 = \frac{1}{2^2}+2 = \frac{9}{4},$$

$$g'(1) = -\frac{2f'(1)}{(f(1))^3} = -\frac{2\times(-3)}{2^3} = \frac{3}{4}$$

となる．

(e)　グラフ $y=g(x)$ の点 $(1,g(1))$ における接線を求めよ．

(c) と同様に考えて，(d) で求めた値を用いると，

$$y-\frac{9}{4} = \frac{3}{4}(x-1)$$

が接線を与える式となることがわかる．この式を移項して整理すると，$y=\frac{3}{4}x-3$

3) 次の不定積分を計算せよ

(a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{\pi}x}+\pi\,dx$ (b) $\displaystyle\int (3x^7-2x+1)\,dx$

両方とも暗算で求められる．結果が正しいかどうかは次の問題と同じように，結果を微分してみることで確かめられる．

(a): $\displaystyle\int e^{\sqrt{\pi}x}+\pi\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\sqrt{\pi}x}+\pi x+C$

(b): $\displaystyle\int (3x^7-2x+1)\,dx=\frac{3}{8}x^8-x^2+x+C$

4) 次の等式が正しいことを示せ: $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx=x\tan\frac{x}{2}+C$

不定積分は被積分関数の原始関数の一般形（原始関数の 1 つに不定定数をたした形のもの）のことだったから，積分結果を微分したときに被積分関数が得られる，ということと，積分結果が正しいということは同値である．特に，積分結果を微分してみることで検算ができる．

上の式で右辺を微分すると，

$$\begin{aligned}\left(x\tan\frac{x}{2}+C\right)'&=(x)'\tan\frac{x}{2}+x\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\tan\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'\\&=\tan\frac{x}{2}+\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

ここで，

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\sin x$$

また，

$$2\cos^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}+\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=1+\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$$

だから，これらを上の式に代入すると，等式の右辺の微分が左辺の被積分関数に等しいくなる，つまり，$x\tan\dfrac{x}{2}$ は $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$ の原始関数（の一つ）となっていることが分かるので，等式が成り立つことが示せたことになる．

5) $f(x)=(x-1)e^{-x}$ とする．このとき， (a) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ．

$\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}$ に注意して関数の積の微分法（教科書 p.12 定理 1.3 (3)）を用いると，

$$f'(x)=(x-1)'e^{-x}+(x-1)\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-(x-1)e^{-x}=(2-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=(2-x)'e^{-x}+(2-x)\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}-(2-x)e^{-x}=(x-3)e^{-x}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ は何か？

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x-1=-\infty$ で $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$ だから， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=(\lim_{x\to-\infty}x-1)(\lim_{x\to-\infty}e^{-x})=-\infty$ となる．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ は直観的な解ともう少し厳密な解を与えておく．

（解 その 1）指数関数 e^x の増減は多項式関数の絶対値と比べると本質的に“早い”（指数関数的に増加する）ので，このことを使うと， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^x}=0$ となることがわかる．

（解 その 2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x-1=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$ だから，ロピタルの定理（p.97, 定理 3.15）を用いることができて

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

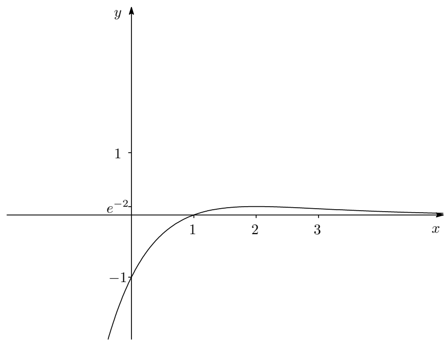
となることがわかる．

(c) $f(x)$ の増減表（$f'(x)$, $f''(x)$ の正負の表示を含むもの）を作成し，この関数の増加，減少，極大，極小，極値，凹凸，変曲点を調べよ．

$f(x)=(x-1)e^{-x}$ だから，$f'(x)=e^{-x}-(x-1)e^{-x}=(2-x)e^{-x}$ $f''(x)=-e^{-x}-(2-x)e^{-x}=(x-3)e^{-x}$ となる．このことと $e^{-x}>0$ がすべての x に対し成り立つことから，$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ である．これを用いて以下のような増減表が作成できる:

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$	0	$\curvearrowright$	e^{-2} 最大	$\curvearrowright$	$2e^{-3}$ 変曲点	$\curvearrowleft$

(d)　(b) と (c) を用いてグラフの概略図を描け.



6) $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 3x$ とする．このとき
(a)　$0\le x$ となるすべての x に対し，$f(x)\ge g(x)$ が成り立つことを示せ.

$0\le x$ に対し，$g(x)\le \dfrac{1}{2}<1\le f(x)$ だから，$g(x)\le f(x)$ が成り立つ.

(b)　曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, および y-軸と直線 $x=\pi$ で囲まれる xy-平面上の領域を図示せよ.

(c)　(b) での領域の面積を計算せよ.

次の積分計算をすればよい:

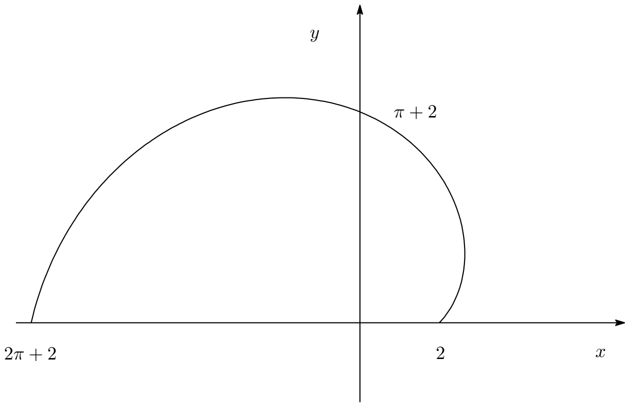
$$\int_0^{\pi}(x^2+1-\frac{1}{2}\sin 3x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x+\frac{1}{6}\cos 3x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi^3+\pi-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\pi^3+\pi-\frac{1}{3}$$

7) (a)　$\displaystyle\int_1^e (\log x + \frac{1}{x})dx$ を計算せよ.

$\log x + \dfrac{1}{x}$ の原始関数は，$x\log x - x + \log x$ だから，

$$\int_1^e (\log x + \frac{1}{x})dx = \Big[x\log x - x + \log x\Big]_1^e = e - e + 1 - (0 - 1 + 0) = 2$$

(b)　極座標表示を用いて $r = 2\theta + 2$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で現わされる曲線と x 軸で囲まれる図形の概略を図示し，この図形の面積を求めよ.



図形の面積は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\pi (2\theta+2)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi 4\theta^2 + 8\theta + 4d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\theta^3 + 4\theta^2 + 4\theta\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 + 2\pi^2 + 2\pi
\end{aligned}$$