微分積分学 II　2009年7月27日施行の期末試験の解答例と解説

淵野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

July 27, 2009

last modified on: August 3, 2009

淵野担当の微分積分学 II で2009年7月27日に行なった期末試験の解答例とそこでの考え方を示します.

解答例は計算ミスなどがないよう注意して書いたつもりですが，もし間違えを発見した場合には，上記のアドレス宛にメールで書いて知らせてください.
このテキストは

http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki2-ss09-kimatsu.pdf

としてダウンロードできます.

科 目 名	**微 分 積 分 学 II**	担当者名	**渕 野 昌**	所要時間	**75** 分	2009 年 7 月 27 日 (月) 17:05〜18:20 施行
持 込	**すべて可**					
添付する 解答用紙	1 枚配付（問題用紙の回収 要・否）		計算用紙 0 枚配付			

1. $f(x,y) = -6x^3y + xy + 2y^2 - 3$ とするとき，次の問に答えてください．

(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めてください．

(b) $f(1,2)$, $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ の値を求めてください．

(c) $z = f(x,y)$ のグラフの，点 $(1,2,f(1,2))$ での接平面の方程式を求めてください．

(d) xy-平面上の点 $(1,3)$ は 方程式 $f(x,y) = 0$ を満たすことを確かめてください．

(e) 陰関数の定理を用いて，$f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の曲線の，点 $(1,3)$ での接線の方程式を求めてください．

2. 次の (a) と (b) での関数 $f(x,y)$ が極値をとる点を持つなら，そのような点のすべてと，そこでの極値の値を求め，それが極小値か極大値のどちらかを答えてください．もし極値をとる点を持たないなら，なぜそう結論できるかを説明してください．

(a) $f(x,y) = -3x^2 + 2xy - y^2$

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

3. (a) xy-平面上で式 $x^2 + y^2 = 1$ のあらわす曲線は何になるかを答えてください．

(b) （x, y, z をそれぞれ縦横高さの座標に持つ）3 次元空間で，式 $x^2 + y^2 \leq 1$ のあらわす領域は何になるかを答えてください．

(c) $f(x,y) = 2x + y$ とするとき，$x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を求めてください．

(d) 連続な関数 $f(x,y)$ は有界閉曲線上で必ず最大値と最小値をとることが証明できます．このことを用いて (c) での関数 $f(x,y)$ の $x^2 + y^2 = 1$ の条件下での最大値と最小値は何になるかを答えてください．

(e) 3 次元空間で，$z = 0$ のあらわす平面と，$x^2 + y^2 = 1$ のあらわす曲面と，$z = 2x + y$ のあらわす平面とで囲まれる領域の体積を求めてください．

4. xy-平面上の領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y \leq 2\}$ について次の問に答えてください．

(a) D を図示してください．

(b) 曲面 $z = x + y^2$ と xy-平面ではさまれる領域のうち，D の上にある部分の体積を求めてください．

5. 次の式であらわされる 4 平面で囲まれる立体の体積を求めてください: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

問題の解答例と解説

1. $f(x,y) = -6x^3y + xy + 2y^2 - 3$ とするとき，次の問に答えてください．

(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めてください．

$f_x(x,y) = -18x^2y + y, \quad f_y(x,y) = -6x^3 + x + 4y$

(b) $f(1,2)$, $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ の値を求めてください．

$f(1,2) = -6 \cdot 1^3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 - 3 = -5$

$f_x(1,2) = -18 \cdot 1^2 \cdot 2 + 2 = -34$

$f_y(1,2) = -6 \cdot 1^3 + 1 + 4 \cdot 2 = 3$

(c) $z = f(x,y)$ のグラフの，点 $(1,2,f(1,2))$ での接平面の方程式を求めてください．

$(1,2,f(1,2))$ つまり，$(1,2,-5)$ での接平面は，この点を含む平面で，x-軸方向の傾きが $f_x(1,2) = -34$, y-軸方向の傾きが $f_y(1,2) = 3$ となるようなものだから，この接平面は，方程式

$$z - (-5) = -34(x-1) + 3(y-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -34x + 3y + 23$$

であらわされる．

(d) xy-平面上の点 $(1,3)$ は 方程式 $f(x,y) = 0$ を満たすことを確かめてください．

$f(1,3) = -6 \cdot 1^3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 3 = -18 + 3 + 18 - 3 = 0$ だからよい．

(e) 陰関数の定理を用いて，$f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の曲線の，点 $(1,3)$ での接線の方程式を求めてください．

$\varphi(x)$ で曲線 $f(x,y) = 0$ の $(1,3)$ の近傍での陰関数をあらわすことにすると，陰関数の定理により，$\varphi'(1) = -\dfrac{f_x(1,3)}{f_y(1,3)} = -\dfrac{-18 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3}{-6 \cdot 1^3 + 1 + 4 \cdot 3} = \dfrac{51}{7}$ である．したがって，曲線 $f(x,y) = 0$ の，点 $(1,3)$ での接線は，方程式 $y - 3 = \dfrac{51}{7}(x-1) \Leftrightarrow y = \dfrac{51}{7}x - \dfrac{30}{7}$ であらわされる．

2. 次の関数 $f(x,y)$ が極値をとる点を持つなら，そのような点のすべてと，そこでの極値の値を求め，それが極小値か極大値のどちらかを答えてください．もし極値をとる点を持たないなら，なぜそう結論できるかを説明してください．

定理 7.3 (p.162) を用いる．

(a) $f(x,y) = -3x^2 + 2xy - y^2$

$f_x(x,y) = -6x + 2y$, $f_y(x,y) = 2x - 2y$ だから，連立方程式

$$\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) が $f(x,y)$ が極値をとる点の候補（つまり $f(x,y)$ が極値をとる可能性のある点の全て）となる．$x = 0$, $y = 0$ がこの連立方程式の唯一の解となるが，$f_{xy}(x,y) = 2$, $f_{xx}(x,y) = -6$, $f_{yy}(x,y) = -2$ により，$(f_{xy}(0,0))^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) = 2^2 - (-6) \times (-2) < 0$ となり，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとる．特に，$f_{xx}(0,0) < -6$ により，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大値 $f(0,0) = 0$ をとることがわかる．

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

$f_x(x,y) = 2x - 2y$ $f_y(x,y) = -2x - 6y$ だから，

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$$

の解 (x,y) が，$f(x,y)$ が極値をとる点の候補となるが，点 $(0,0)$ が上の連立方程式を満たす唯一の解である．ここで，$f_{xy}(x,y) = -2$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = -6$ により，$(f_{xy}(0,0))^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) = (-2)^2 - 2 \times (-6) > 0$ となり，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらないことがわかる．したがって，$f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) は存在しない．

3. (a) xy-平面上で式 $x^2 + y^2 = 1$ のあらわす曲線は何になるかを答えてください．

$x^2 + y^2$ は点 (x,y) の原点 $(0,0)$ からの距離の二乗をあらわす式であることを思い出すと，式 $x^2 + y^2 = 1$ であらわされる xy-平面上の点の集まり $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円をなることがわかる．

(b) （x, y, z をそれぞれ縦横高さの座標に持つ）3 次元空間で，式 $x^2 + y^2 \leq 1$ のあらわす領域は何になるかを答えてください．

xyz-空間で $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす点 (x,y,z) は xy-平面に射影したときに，原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円板に含まれる．したがって，$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は，z 軸を中心として半径が 1 の z-軸の $\pm$ 方向に無限に延びる円柱である．

(c) $f(x,y) = 2x + y$ とするとき，$x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を求めてください．

ラグランジュの未定定数法（教科書の定理 7.5 (p.167)）を用いる．$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると，問題は，$g(x,y) = 0$ のもとで，$f(x,y)$ が極値をとる点の候補を求める，と表現しなおせる．したがって，$f_x(x,y) = 2$, $f_y(x,y) = 1$, $g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$ を用いて，

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 & \cdots (1) \\ 2 + 2\lambda x = 0 & \cdots (2) \\ 1 + 2\lambda y = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

の解となる (λ, x, y) に対する (x,y) が $f(x,y)$ が $g(x,y) = 0$ のもとで極値をとる点の候補となる．
(2) から，$x = -\dfrac{1}{\lambda} \cdots$ (2)', (3) から，$y = -\dfrac{1}{2\lambda} \cdots$ (3)' となるから，これらを (1) に代入して，

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

これを (2)' と (3)' に代入すると，$x = \mp\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $y = \mp\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
したがって，$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ と $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ が (1), (3), (3) の解（の x, y-成分）となる．

(d) 連続な関数 $f(x,y)$ は有界閉曲線上で必ず最大値と最小値をとることが証明できます．このことを用いて (c) での関数 $f(x,y)$ の $x^2 + y^2 = 1$ の条件下での最大値と最小値は何になるかを答えてください．

最大値をとる点の存在を仮定すると，そのような点は (c) で求めた $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ と $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ のうちのどちらかでなくてはならないことがわかるが，$f\Big(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\Big) > f\Big(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Big)$ だから，$f(x, y)$ は $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで，点 $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ で最大値 $f\Big(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\Big) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ をとることがわかる．

(e) 3次元空間で，$z = 0$ のあらわす平面と，$x^2 + y^2 = 1$ のあらわす曲面と，$z = 2x + y$ のあらわす平面とで囲まれる領域の体積を求めてください．

求める立体の体積 V は極座標を用いると，

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |2r\cos\theta + r\sin\theta| \; r dr d\theta$$

であらわされる．ここで，$2r\cos\theta + r\sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \pi$ となるように θ_0 がとれるが，対称性から，

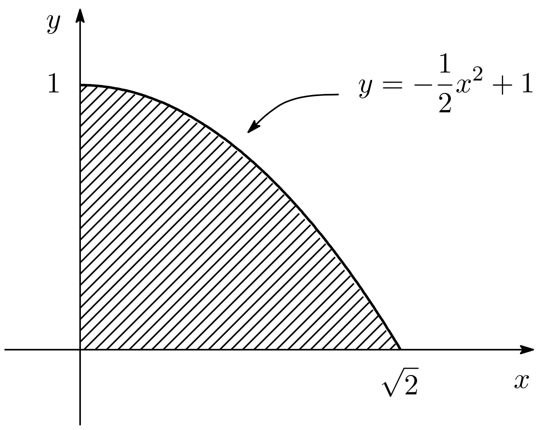
$$V = 2\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \int_0^1 (2r\cos\theta + r\sin\theta) r dr d\theta$$

である．ここで，$\sin\theta_0 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin(\theta_0 + \pi) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\cos(\theta_0 + \pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を用いると，積分の値が求まる（以下略）．

4. xy-平面上の領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y \leq 2\}$ について次の問に答えてください．

(a) D を図示してください．

$x^2 + 2y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$ に注意すると，



(b) 曲面 $z = x + y^2$ と xy-平面ではさまれる領域のうち，D の上にある部分の体積を求めてください.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y^2)dxdy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{-\frac{1}{2}x^2+1} (x+y^2)dydx = \int_0^{\sqrt{2}} \left[xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=-\frac{1}{2}x^2+1} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(x(-\frac{1}{2}x^2+1) + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}x^2+1)^3 \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2)^3 + \frac{1}{3}\cdot 3(\frac{1}{2}x^2)^2\cdot 1^1 - \frac{1}{3}\cdot 3(\frac{1}{2}x^2)^1 \cdot 1^2 + 1^3 \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{24\times 7}x^7 + \frac{1}{4\times 5}x^5 - \frac{1}{2\times 4}x^4 - \frac{1}{2\times 3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{24\times 7}\cdot(\sqrt{2})^7 + \frac{1}{4\times 5}\cdot(\sqrt{2})^5 - \frac{1}{2\times 4}\cdot(\sqrt{2})^4 - \frac{1}{2\times 3}\cdot(\sqrt{2})^3 + \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \\
&= -\frac{1}{21}\sqrt{2} + \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} \\
&= \left(-\frac{1}{21} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 \right)\sqrt{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{32}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5. 次の式であらわされる 4 平面で囲まれる立体の体積を求めてください: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

教科書 p.177, 問題 8.2 (1) を参照.