理学教室 Colloquium 第３回講演

**2005 年 5 月 30 日 (月)　17:00〜18:00**
**場所：9 号館 2 階　924 教室**

# 面積のない図形について

中部大学理学教室　教授　**渕野　昌 (Sakaé Fuchino)**

**2005 年 5 月 28 日**

---

## アブストラクト

「平面図形」の概念を最も一般的に捉えるには，二次元平面 $\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合を平面図形と呼ぶことにするべきであろう．

同様に，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の任意の部分集合のことを「空間図形」のことと考えてよいであろう．3 次元以上の空間での図形についても同様である．一次元空間での図形の長さ，二次元空間での図形の面積，3 次元空間での図形の体積 etc. は数学的には次元に依存せずに同様に扱かえることが知られており，このようなものを測度 (measure) と総称する．フラクタル理論におけるハウスドルフ測度のように測度論的次元の議論できるような測度もあるが，空間図形の面積，体積の自然な定式化となっている測度では次元に依存しない議論が可能である．このような，面積や体積の自然な概念のうち，最も一般的な定式化となっているものは，このような測度の理論の基礎を築いたフランスの数学者 Henri Lebesgue (1875 - 1941) にちなんで Lebesgue 測度と呼ばれている．

以下では簡単のため，主に一次元で議論することにするが，$\mathbb{R}$ の部分集合の中には，集合のサイズとしては $\mathbb{R}$ 自身と同じ大きさを（つまり連続体濃度を）持つのに測度は 0 となるようなものが存在する．例えば，これもフラクタル集合の例として話題にのぼることも多いカントル集合がそのような例の 1 つである:

カントル集合 $C$ は，単位区間 $C_0 = [0,1]$ から出発して，その集合に含まれるすべての区間の 1/3 から 2/3 までの真中の開区間をとりのぞく，という操作を繰り返し $C_1, C_2, \ldots$ を作っておき，$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ とすることで定義される．各 $C_n$ の測度は，$1 - \sum_{k=0}^{n}(1/3) * 2^{n-1}$ となるが，この値の $n \to \infty$ での極限は 0 である．したがって，$C \subseteq C_n$, $n \in \mathbb{N}$ の測度も 0 でなくてはならない．一方，$C$ の元は，3 進数の小数点表示で表現したときに，小数点以下に 0 と 2 のみが並んでいるような無限小数の全体となるが，このようなものは，連続体個あることが容易にわかる．

このような例は，単に，集合の「要素の数の多さ」と「かさ」が異なることがありえることを示しているだけで，何ら矛盾ではない．これに対して，$\mathbb{R}$ の部分集合の中には，測度を持たない（持ちえない）ものが存在することが示せる．Giuseppe Vitali (1975 - 1932) によって発見され，現在では Vitali 集合と呼ばれているものはそのような集合の一例である．

**定理 (Vitali 1905 – 明治 38 年)** $\mu$ を 平行移動で不変な任意の測度とするとき，$\mu$ で非可測な集合が存在する．

**証明．** $X$ を区間 $[0,1]$ の部分集合で，

(a) 任意の異なる $x, y \in X$ に対し，$x - y$ は無理数で，

(b) $X$ はそのような集合のうち極大

なものとする．特に，どんな $z \in [0,1] - X$ をとってきても， $z - x$ が有理数になるような $x \in X$ が存在する．

このような $X$ が $\mu$ で非可測となることを示す．

有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対し，$X + q = \{x + q : x \in X\}$ とする．つまり $X + q$ は $X$ を $q$ だけ平行移動して得られる集合である．(a) から，異なる $q, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，$X + q$ と $X + q'$ は共通部分を持たない．
一方 (b) から，$Y = \bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} X + q$ は $[0,1]$ を覆い $[-1,2]$ の部分集合となっている．$[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ は可算だから，もし $\mu(X)$ が存在すれば，$\mu(Y)$ も存在するが，$\mu(X) = 0$ なら $\mu(Y) = 0$ となり矛盾．$\mu(X) > 0$ なら $\mu(Y) = \infty$ となり矛盾である．

**（証明終り）**

測度を持たない集合は非可測集合と呼ばれる．測度が 0 の集合とは異なり，非可測な集合は，ある意味で病的な集合と考えられ，できれば，さけて通りたいような集合であるとも言える．

それでは，どのくらい複雑な集合が非可測な集合になりうるのであろうか? 記述集合論とよばれる研究分野の初期の研究結果により，(ある高い次元の空間での) 閉集合の射影として表せる集合はすべて測度を持つことが知られている．閉集合の射影として表せる集合は，解析集合と呼ばれることもあるが，実はこのような集合のクラスは，実質上初等的な解析学で扱われるような集合をすべて含んでいる．たとえば，上で触れたカントル集合も解析集合である．

ところが，閉集合の射影の補集合（空間全体からその集合をのぞいた残りの集合）の射影をふたたびとるという操作で得られる集合を考えると,「こような集合のクラスに含まれる集合はすべて測度を持つ」という命題は，通常の数学の議論では証明も否定もできない（ことが証明できる）のである!

> **集合論にある程度詳しい人のための解説:** 解析集合の補集合の射影は $\Sigma^1_2$-集合ともよばれる．ゲーデルの構成可能性公理 $V = L$ を仮定すると，$\Sigma^1_2$-集合で非可測なものの存在が証明できる．
>
> 一方，W. Sierpiński の定理により， $\Sigma^1_2$ 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和として表せるから，マルティンの公理と連続体仮説の否定から，すべての $\Sigma^1_2$-集合は可測となることが導かれる．
>
> 一方巨大基数の存在が，この問題に影響を与えることが知られている: R. Solovay による古典的な結果 (1969) により，可測基数が存在するときには，すべての $\Sigma^1_2$-集合は可測となる．
>
> 解析集合から出発して補集合と射影の操作を有限回ほどこして得られるような集合は，射影集合と呼ばれるが，Shelah-Woodin の結果により，無限個の Woodin 基数が存在するときには，すべての射影集合は可測となる．

この『通常の数学の議論では証明も否定もできない（ことが証明できる)』という不思議な状況の裏には，ゲーデルの不完全性定理と呼ばれる現象がひそんでいるのであるが，本講演では，このあたりの事情についての解説を試み，できれば講演者自身の現在の研究との関連についても触れたいと思っている．

# 参考文献


[1] もう少し簡単な アブストラクト

[2] 渕野 昌，数学の中の無限 — 無限の中の数学,（中学校や高校程度の数学の予備知識のみを仮定した集合論の解説文）

[3] 渕野 昌，Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から —，数学 (Sugaku), Vol.56, No.3 (2004), 248–259.